Περιγραφική Θεωρία Συνόλων

⇝ Μελέτη υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ και γενικότερα συνόλων σε πλήρεις και διαχωρίσιμους μετρικούς χώρους.

⇝ Κίνητρο: 1) Μελέτη συναρτήσεων με βάση τον «γενικό» ορισμό του Riemann.

2) Ύπαρξη συνόλων με ιδιότητες που θεωρήθηκαν «περίεργες».

Παράδοξο Banach–Tarski

Λέμε ότι μια συνάρτηση $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ διατηρεί τον όγκο αν για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^3$, που έχει όγκο, το $T(A)$ είναι σύνολο που έχει όγκο και ισχύει

$T[A]$

$V(A) = V(T(A))$

$V(\cdot)$ = ο όγκος του συνόλου

<u>Θεώρημα</u> (Banach-Tarski):

Θεωρούμε τη μοναδιαία μπάλα B του $\mathbb{R}^3$.
Τότε υπάρχει μια διαμέριση $A_1, \dots, A_n$, του B και μετασχηματισμοί
$T_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $i=1,\dots,n$ που διατηρούν τον όγκο έτσι ώστε τα $T_1(A_1), \dots, T_n(A_n)$ να αποτελούν τη διαμέριση δύο μπαλών, η κάθε μία από τις οποίες έχει όγκο όσο και η B.

<u>Παράδοξο</u>: Μοιάζει να διπλασιάσαμε τον όγκο της B με μετασχηματισμούς που διατηρούν τον όγκο.

Εξήγηση: Τα A_i, $i=1,\dots,n$ δεν έχουν όγκο!

$$V(B) = V(A_1 \cup \dots \cup A_n)$$

$$= V(A_1) + \dots + V(A_n)$$

$$= V(T_1(A_1)) + \dots + V(T_n(A_n))$$

$$= V(B) + V(B)$$

$$= 2V(B) \quad \text{Άτοπο.}$$

Η περιγραφική θεωρία συνόλων ασχολείται με την ταξινόμηση και τις ιδιότητες των συνόλων (και κατ' επέκταση των συναρτήσεων) που ορίζονται με «φυσιολογικό» τρόπο.

Ιστορικά στοιχεία

1900 – 1910 : Lebesgue, Baire, Borel
(1905)

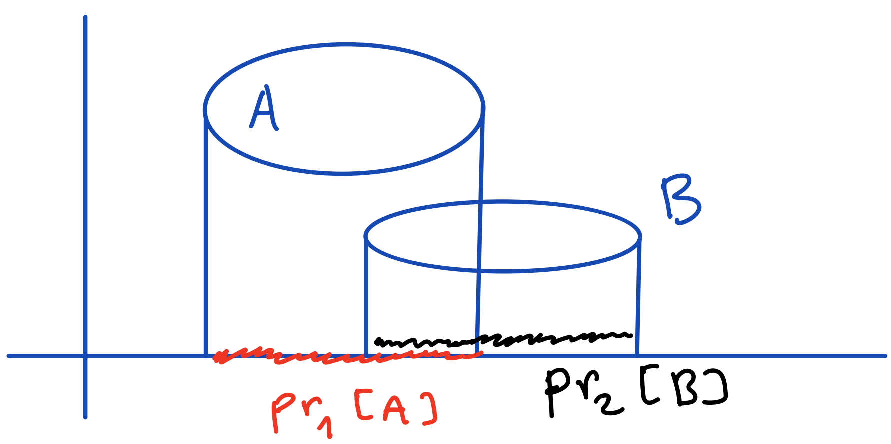
Αρχική θεμελίωση
Borel σύνολα

Λανθασμένος ισχυρισμός Lebesgue:

«Οι συνεχείς εικόνες Borel συνόλων είναι Borel σύνολα.»

Το λάθος στην απόδειξη:

«Αν $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ τότε
$pr_1[A \cap B] = pr_1[A] \cap pr_2[B]$ »



$pr_1[A] \cap pr_1[B] \neq \emptyset$

$pr_1[A \cap B] = pr_1[\emptyset] = \emptyset$

1910 – 1940: Suslin, Lusin, Sierpinski

Αναλυτικά σύνολα
(συνεχείς εικόνες Borel)
και πιο σύνθετα σύνολα.

1940 – 1960 Ανάπτυξη μεθόδων
από τη Θεωρία Αναδρομής
(Recursion Theory
ή αλλιώς Computability Theory)

→ Αναλογίες με τη θεωρία
που αναπτύχθηκε από τους
Lebesgue, Suslin, Lusin, κ.τ.λ.

Turing, Kleene, Church, Post,
Mostowski

Μελέτη υποσυνόλων του $\mathbb{N}$

$0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1 \ldots \to \{1, 3, 5, \ldots\}$

$0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5$

τα οποία « υπολογίζονται ».

Η πρώτη συστηματική μελέτη αυτών των αναλογιών έγινε με τον Addison (μαθητή του Kleene)

Με τη μελέτη μεταγενέστερων μαθητών του Kleene, όπως ο Μοσχοβάκης, έγινε μια ενοποίηση σε μία θεωρία, η οποία είναι γνωστή ως

effective descriptive set theory

(κατασκευαστική περιγραφική θεωρία συνόλων)

Άλλοι ερευνητές: Louveau, Becker κτλ.

⇝ μέχρι τη δεκαετία του 70.

Παρόλ' αυτά η effective dst δεν έλυσε τα ανοικτά προβλήματα που απασχολούσαν τους Lusin, Sierpinski και τους λοιπούς ερευνητές της περιοχής.

Ένα βασικό πρόβλημα:

Με τη βοήθεια των αναλυτικών συνόλων ορίζονται πιο σύνθετα σύνολα (προβολικά σύνολα).
Έχει κάθε προβολικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$ όγκο;

Αποδείχτηκε ότι το πιο πάνω πρόβλημα είναι ανεξάρτητο από τα Αξιώματα των Μαθηματικών.

Για να αποδειχτεί αυτό, καθοριστική ήταν η συμβολή της Θεωρίας Παιγνίων.

1960 — 1980 Ανάπτυξη της Θεωρίας παιγνίων στην περιγραφική θεωρία συνόλων.

Martin, Solovay, Κεχρής κ.α.

1990 — Σήμερα Εφαρμογές όλων των προηγουμένων σε άλλες περιοχές των Μαθηματικών

Κεχρής και άλλοι

2005 — Σήμερα Εφαρμογές της Θεωρίας Γραφημάτων στην ΠΘΣ.

Ben Miller, Andrew Marks

Εισαγωγή: Review των βασικών εννοιών

$$\forall x \in A \; p(x) \overset{\text{λογικά ισοδύναμη}}{\equiv} \forall x \, (x \in A \to P(x))$$

$$Q(x) \to P(x) \equiv \neg Q(x) \vee P(x)$$

Οπότε η πρόταση

$\forall x \in A \; p(x)$ είναι λογικά ισοδύναμη

με την:

$$\forall x \, (x \notin A \text{ ή } p(x))$$

Αν θέσουμε $A = \emptyset$, τότε:

$$\forall x \in \emptyset \; p(x) \equiv \forall x \, \underbrace{(\underbrace{x \notin \emptyset}_{\text{αληθής}} \text{ ή } p(x))}_{\text{αληθής}}$$

Π.χ. Η πρόταση

$$\forall x \in \emptyset \ (x \neq x)$$

είναι αληθής.

$$\forall x \ (x \notin \emptyset \text{ ή } x \neq x)$$

Το να πούμε ότι η f είναι συνάρτηση από το $\emptyset$ στο $\mathbb{R}$ είναι το ίδιο με το να πούμε

$$\underbrace{\forall x \in \emptyset \ \ \overset{\text{μοναδικό}}{\exists} y \in \mathbb{R} \ \ f(x) = y}_{\text{αληθές}}$$

Αυτή η f είναι μόνο ένα αντικείμενο, το κενό σύνολο, και τη λέμε κενή συνάρτηση.

Μπορούμε επίσης να δούμε την κενή συνάρτηση σαν συνάρτηση

$f : \emptyset \to \emptyset$ γιατί:

$$\underbrace{\forall x \in \emptyset \ \exists y \in \emptyset \ f(x) = y}_{\text{ισχύει πάντα}}$$

$\forall x \in \emptyset \ P(x)$

$f : X \to Y$

ένα - προς - ένα:

$$\forall x_1, x_2 \in X \ (f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2)$$

Για $X = \emptyset$:

$$\forall x_1, x_2 \in \emptyset \ (\ldots - \quad)$$

Η $f : \emptyset \to \emptyset$ είναι ένα-προς-ένα και επί:

$$\underbrace{\forall y \in \emptyset \quad \exists x \in \emptyset \quad f(x) = y}_{\text{αληθές.}}$$

Αριθμήσιμα και υπεραριθμήσιμα σύνολα

Δίνονται δύο σύνολα A και B.

A, B: ισοπληθικά αν

υπάρχει $f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow B$ ένα-προς-ένα και επί.

Για $A = B = \emptyset$ έχουμε ότι η κενή συνάρτηση $f : \emptyset \to \emptyset$ είναι ένα-προς-ένα και επί, άρα το $\emptyset$ είναι ισοπληθικό με το $\emptyset$.

Cantor

Συμβολισμός: $A =_c B$

σημαίνει ότι τα A, B είναι ισοπληθικά.

Ιδιότητες:

$$A \overset{f(x)=x}{=_c} A$$

$$\underbrace{A =_c B}_{f} \Rightarrow \underbrace{B =_c A}_{f^{-1}}$$

$$(\underbrace{A =_c B}_{f} \text{ και } \underbrace{B =_c C}_{g}) \rightarrow \underbrace{A =_c C}_{g \circ f}$$

Θα λέμε ότι το A έχει πληθάριθμο μικρότερο ή ίσο από το B, συμβολικά $A \leq_c B$, αν υπάρχει $f: A \to B$ που είναι ένα-προς-ένα.

Η κενή συνάρτηση $f: \emptyset \to B$ είναι ένα-προς-ένα, άρα $\emptyset \leq_c B$.

Ιδιότητες: $A \leq_c A$

$$(\underbrace{A \leq_c B}_{f} \text{ και } \underbrace{B \leq_c C}_{g}) \to \underbrace{A \leq_c C}_{g \circ f}.$$

Θεώρημα: (Schröder - Bernstein)

Αν $A \leq_c B$ και $B \leq_c A$ τότε $A =_c B$.

Ένα σύνολο A λέγεται πεπερασμένο αν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε

$$A =_c \{ i \in \mathbb{N} \mid i < n \}$$

Π.χ. $A = \{a\}$
$A =_c \{ i \mid i < 1 \}$

(για $n = 0$ έχουμε $A = \emptyset$)

Το A λέγεται αριθμήσιμο αν είναι πεπερασμένο ή $A =_c \mathbb{N}$.

Το A λέγεται <u>υπεραριθμήσιμο</u> αν δεν είναι αριθμήσιμο.

Τα εξής είναι ισοδύναμα:

1) A: αριθμήσιμο

2) $A \leq_c \mathbb{N}$

3) $A = \emptyset$ ή υπάρχει $\pi : \mathbb{N} \to A$ που είναι επί.

$$A = \{\pi(0), \pi(1), \ldots, \pi(n), \ldots\}$$
$$= \{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$$

Βασικά αποτελέσματα:

1) Αν A_n: αριθμήσιμο, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$: αριθμήσιμο.

2) Αν $A_1, \dots, A_n$: αριθμήσιμα τότε

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n : \text{αριθμήσιμο}$$

3) Αν το B είναι αριθμήσιμο και $A \leq_c B$ τότε και το A είναι αριθμήσιμο.

Συνέπειες:

- Το $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-1)\cdot\mathbb{N}$ είναι αριθμήσιμο σύνολο.

- Το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο σύνολο.

$$\mathbb{Q} \leq_c \underset{\text{αριθμ.}}{\mathbb{Z}} \times \underset{\text{αριθμ.}}{\mathbb{N}}$$

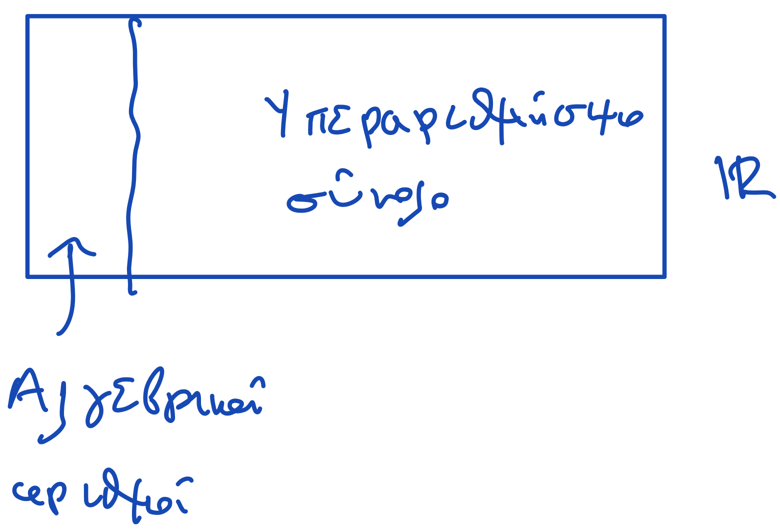
$$\mathbb{Q} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{n}{m} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z} \right\} : \text{αριθμήσιμη ένωση αριθμ. συνόλων}$$

Άρα $\mathbb{N} =_c \mathbb{Z} =_c \mathbb{Q}$

Άλλες γνωστές ισοπληθικότητες:

$\mathbb{N} =_c$ το σύνολο όλων των αλγεβρικών αριθμών

το $\mathbb{R}$ δεν είναι αριθμήσιμο σύνολο, δηλαδή είναι υπεραριθμήσιμο



$$\mathbb{R} =_c \mathcal{P}(\mathbb{N}) =_c \{0,1\}^{\mathbb{N}} =_c \mathbb{N}^{\mathbb{N}} =_c \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

$$\mathbb{R} =_c (a,b) =_c (a,b] =_c [a,b) =_c [a,b] \quad a<b$$

$\mathbb{R} =_c C([0,1])$ το σύνολο όλων των συνεχών $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

$\mathbb{R} =_c \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$\mathbb{R} =_c \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$A \neq_c P(A)$ και $A \leq_c P(A)$

Συμβολισμός : $A <_c P(A)$

$\mathbb{N} <_c \mathbb{R}$

$\mathbb{N} <_c P(\mathbb{N})$

$\mathbb{N}$ | ? | $\mathbb{R}$

$\mathbb{Z}$ | Cantor | (a,b) κ.τ.λ. $a<b$

$\mathbb{Q}$ | | $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Αλγεβρικοί

Λέμε ότι ένα σύνολο A έχει τον πληθάριθμο του συνεχούς αν $A =_c \mathbb{R}$ και ότι το A έχει πληθάριθμο μικρότερο ή ίσο του συνεχούς αν $A \leq_c \mathbb{R}$.

Υπόθεση του Συνεχούς (Continuum Hypothesis)

Για κάθε άπειρο $A \subseteq \mathbb{R}$ ισχύει $A =_c \mathbb{N}$ ή $A =_c \mathbb{R}$

Θεώρημα Cantor: Αν το A είναι κλειστό $\subseteq \mathbb{R}$ τότε είτε $A =_c \mathbb{N}$ είτε $A =_c \mathbb{R}$.

Στοιχεία μετρικών χώρων και τοπολογίας

Έστω $X \neq \emptyset$ σύνολο και
$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$.

Η d ονομάζεται μετρική στο X
αν ικανοποιεί τα εξής:

- $d(x,y) \geq 0$ και
  $d(x,y) = 0 \iff x = y$
- $d(x,y) = d(y,x)$
- $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$
  $x, y, z \in X$.

συνήθης μετρική

Π.χ. $X = \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$

Το ζεύγος (X,d) ονομάζεται μετρικός χώρος.

Η διακριτή μετρική στο X είναι

η $d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y. \end{cases}$

Στο εξής θεωρούμε ότι έχουμε έναν μετρικό χώρο (X, d).

Αν $Y \subseteq X$, $Y \neq \emptyset$ θεωρούμε τον περιορισμό $d_Y = d|(Y \times Y)$, δηλαδή $d_Y : Y \times Y \to \mathbb{R}$

$$d_Y(x,y) = d(x,y).$$

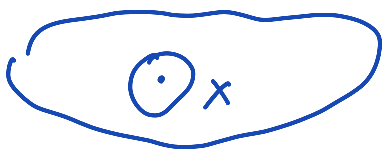
Τότε η d_Y είναι μετρική στο Y. Ο (Y, d_Y) λέγεται υπόχωρος του (X, d).

Αν $x \in X$ και $r > 0$, η ανοικτή μπάλα κέντρου x και ακτίνας r

είναι το σύνολο

$$B_d^X(x,r) \equiv B_d(x,r) \equiv B(x,r)$$
$$= \{ y \in X \mid d(x,y) < r \}.$$

Το x είναι <u>εσωτερικό σημείο</u> του $A \subseteq X$ αν υπάρχει $r>0$ με $B_d^X(x,r) \subseteq A$.



A

Το $A \subseteq X$ λέγεται ανοικτό στον (X,d) αν κάθε σημείο του είναι εσωτερικό. Δηλαδή:

$$\forall x \in A \ \exists r>0 : B(x,r) \subseteq A.$$

Το <u>εσωτερικό A°</u> του $A \subseteq X$

είναι το σύνολο των εσωτερικών σημείων του A. Ισχύει

$$A^\circ = \bigcup \{ V \subseteq X \mid V: \text{ανοικτό} \subseteq A \}$$

$$A^\circ \subseteq A$$

$$A: \text{ανοικτό} \iff A = A^\circ$$

$f: \mathbb{N} \longrightarrow X \quad x_n = f(n)$

Μια ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στον (X, d) συγκλίνει στο $x \in X$ αν

$$\lim_{n \to +\infty} d(x_n, x) = 0.$$

Ισοδύναμα:

$$\forall r > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \ d(x_n, x) < r.$$

Συμβολισμός: $x_n \xrightarrow{d} x$ ή πιο απλά

$$x_n \longrightarrow x$$

για να πούμε ότι η $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στο x.

Λέμε ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>είναι</u> <u>συγκλίνουσα</u> αν συγκλίνει σε κάποιο $x\in X$

και ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι <u>συγκλίνουσα στο $A\subseteq X$</u> αν συγκλίνει σε κάποιο $x\in A$.

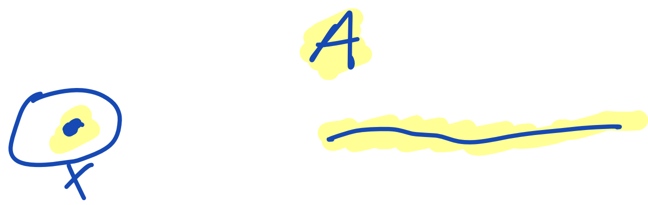
Ένα $x\in X$ είναι <u>οριακό</u> <u>σημείο</u> του $A\subseteq X$ αν υπάρχει $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $x_n\in A$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, και $x_n\to x$.

Ισοδύναμα: $\forall\, r>0\ \exists\, y\in A\ d(x,y)<r$.

Το $x\in X$ είναι <u>σημείο</u> <u>συσσώρευσης</u> του $A\subseteq X$ αν υπάρχει $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $x_n\in A$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, και $x_n\to x$ και $x_n\neq x$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

Ισοδύναμα: $\forall\, r>0\ \exists\, y\in A\setminus\{x\}\ d(x,y)<r$.

Το $x \in A$ ονομάζεται *μεμονωμένο σημείο του A* αν υπάρχει $r>0$ με $B(x,r) \cap A = \{x\}$.



Rudin Principles of mathematical analysis.

Ισχύει το εξής

Οριακά σημεία του A

$=$ (Σημεία συσσώρευσης του A) $\cup$ (Μεμονωμένα σημεία του A)

Το $A \subseteq X$ είναι *κλειστό* αν περιέχει όλα τα οριακά του σημεία, ισοδύναμα αν περιέχει όλα τα σημεία συσσώρευσής του.

Το A ονομάζεται *τέλειο* αν είναι κλειστό και δεν έχει μεμονωμένα σημεία.

Η <u>κλειστότητα $\bar{A}$</u> του A είναι το σύνολο όλων των εφαπτόμενων σημείων του A, ισοδύναμα

$$\bar{A} = \bigcap \{ F \subseteq X \mid F : \text{κλειστό} \supseteq A \}$$

Ισχύει $A^\circ \subseteq A \subseteq \bar{A}$ και

A : ανοικτό $\Leftrightarrow$ $A = A^\circ$ και

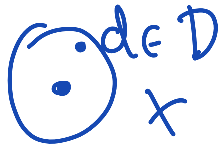
A : κλειστό $\Leftrightarrow$ $A = \bar{A}$.

Ισχύει επίσης,

A : κλειστό $\Leftrightarrow$ $X \setminus A$: ανοικτό

A : ανοικτό $\Leftrightarrow$ $X \setminus A$: κλειστό.

Ένα $D \subseteq X$ ονομάζεται <u>πυκνό</u> αν για κάθε $x \in X$ και κάθε $r > 0$ ισχύει $B(x, r) \cap D \neq \emptyset$.



$(d_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}}$

Ισοδύναμα: $\forall x \in X$ $\exists\, (d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο D με $d_n \to x$.

Ισοδύναμα $\overline{D} = X$.

Ο (X, d) ονομάζεται <u>διαχωρίσιμος</u> αν υπάρχει $D \subseteq X$ που είναι αριθμήσιμο και πυκνό.

<u>Π.χ.</u> Το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο και πυκνό στον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Ένα $K \subseteq X$ ονομάζεται <u>συμπαγές</u> αν για κάθε οικογένεια $(V_i)_{i\in I}$ από ανοικτά σύνολα στο X με $K \subseteq \bigcup_{i\in I} V_i$ υπάρχουν $i_1, \dots, i_n \in I$

με $K \subseteq V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_n}$.

Ισοδύναμα: για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο K υπάρχει υπακολουθία $(x_{m_n})_{n\in\mathbb{N}}$ και υπάρχει $\underline{x \in K}$ με $x_{m_n} \to x$.

Κάθε συμπαγές είναι κλειστό.

Συνεχείς συναρτήσεις -

Θεωρούμε μετρικούς χώρους (X,d) και (Y,ρ), $x \in X$ και μια συνάρτηση $f: (X,d) \to (Y,\rho)$.
Η f είναι συνεχής στο x αν

$\forall r>0 \ \exists \delta>0 \quad f[B_d(x,\delta)] \subseteq B_\rho(f(x),r)$

$\Leftrightarrow$

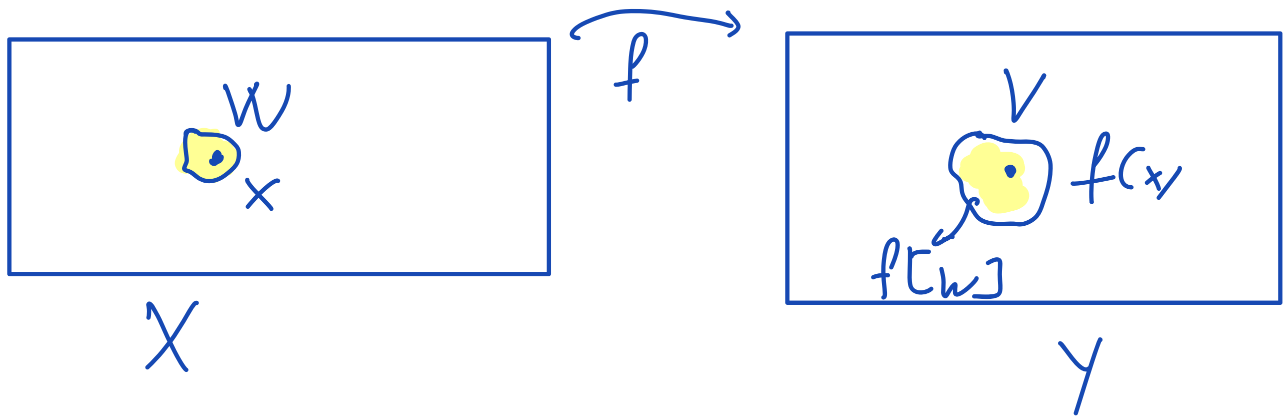
$\forall y$ με $d(x,y)<\delta \Rightarrow \rho(f(x),f(y))<r$

Ισοδύναμα:

$\forall V \subseteq Y$ ανοικτό με $f(x) \in V$

$\exists W \subseteq X$ ανοικτό με $x \in W$

έτσι ώστε $f[W] \subseteq V$.



Ισοδύναμα: $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο X

με $x_n \xrightarrow{d} x$

ισχύει $f(x_n) \xrightarrow{\rho} f(x)$

Η f είναι <u>συνεχής</u> αν είναι

συνεχής σε κάθε $x \in X$.

Ισοδύναμα: $\forall V \subseteq Y$ ανοικτό ισχύει

ότι το σύνολο $f^{-1}[V]$ είναι ανοικτό.

Η f λέγεται <u>τοπολογικός</u> <u>ισομορφισμός</u> αν είναι ένα-προς-ένα, επί, συνεχής και η $f^{-1}: Y \to X$ είναι επίσης συνεχής.

<u>Ισοδύναμες μετρικές:</u>

Δύο μετρικές d_1, d_2 σε ένα μη κενό σύνολο X είναι <u>ισοδύναμες</u>, συμβολικά $d_1 \sim d_2$, αν έχουν τα ίδια ανοικτά σύνολα. Δηλαδή $\forall V \subseteq X$ το V είναι d_1-ανοικτό $\Leftrightarrow$ το V είναι d_2-ανοικτό.

Ισοδύναμα: η ταυτοτική συνάρτηση

$$id: (X, d_1) \longrightarrow (X, d_2)$$

$$id(x) = x$$

$V \subseteq X$ d_2-ανοικτό.

$id^{-1}[V] = V$: d_1-ανοικτό.

είναι τοπολογικός ισομορφισμός

$id^{-1}: (X, d_2) \to (X, d_1)$

$V \subseteq X$ d_1-ανοικτό

$(id^{-1})^{-1}[V] = V$: d_2-αν.

Ισοδύναμα: $\forall$ ακολουθία στο X και $\forall x \in X$

$$x_n \xrightarrow{d_1} x \iff x_n \xrightarrow{d_2} x$$

Αν έχουμε έναν μετρικό χώρο (X, d_1) τότε μπορούμε να ορίσουμε τις συναρτήσεις

$f(t) = \frac{t}{1+t}$ $t \geq 0$

$$d_2 = \min\{d_1, 1\} \quad \text{και} \quad d_3 = \frac{d_1}{1+d_1}$$

$f' \uparrow$

Οι d_2, d_3 είναι μετρικές στο X και μάλιστα ισοδύναμες με την d_1.

Παρατηρούμε ότι $d_2, d_3 \leq 1$.

Η οικογένεια όλων των ανοικτών συνόλων σε ένα μετρικό χώρο (X, d) ικανοποιεί τα εξής:

α) το $\emptyset$ και το X είναι ανοικτά

β) αν τα $A_i, i \in I$ είναι ανοικτά τότε η ένωση $\bigcup_{i \in I} A_i$ είναι ανοικτό

γ) αν $A_1, \ldots, A_n$ είναι ανοικτά τότε $A_1 \cap \ldots \cap A_n$ είναι ανοικτό.

Τοπολογία:

Δίνεται ένα μη κενό σύνολο X.
Μια οικογένεια $\mathcal{T}$ από υποσύνολα του X ονομάζεται τοπολογία στο X αν ικανοποιεί τις προηγούμενες ιδιότητες α), β) γ).

Δηλαδή:

α) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

β) Αν $A_i \in \mathcal{T}$, για κάθε $i \in I$

τότε $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$.

γ) Αν $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{T}$ τότε $\bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{T}$.

Παρατηρούμε ότι αν έχουμε έναν μετρικό χώρο (X, d) και θέσουμε

$\mathcal{T}_d = \{ V \subseteq X \mid V:$ d-ανοικτό$\}$

τότε η $\mathcal{T}_d$ είναι τοπολογία στο X.

Αυτή η $\mathcal{T}_d$ ονομάζεται <u>τοπολογία του (X, d).</u>

Τοπολογικός χώρος είναι ένα ζεύγος $(X, \mathcal{T})$ όπου το X είναι μη κενό σύνολο και $\mathcal{T}$ είναι τοπολογία στο X. (*) Τα στοιχεία της τοπολογίας λέγονται ανοικτά σύνολα

Ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T})$ λέγεται <u>μετρικοποιήσιμος</u> αν υπάρχει μετρική d στο X έτσι ώστε $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$.

<u>Σχόλιο</u>: Όλες οι προηγούμενες έννοιες (εσωτερικό, κλειστότητα, πυκνότητα, σύγκλιση κ.τ.λ.) μπορούν να δοθούν στο πλαίσιο των τοπολογικών χώρων αντικαθιστώντας την $B_d(x, r)$ με ένα $V \in \mathcal{T}$ που ικανοποιεί $x \in V$.

<u>Π.χ.</u> x: εσωτερικό του A
$\iff \exists V \in \mathcal{T}$ με $x \in V \subseteq A$.

<u>Βάση</u> ενός τοπολογικού χώρου $(X, \mathcal{T})$ είναι μια οικογένεια $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$

έτσι ώστε για κάθε $\mathcal{U} \in \mathcal{T}$ ισχύει $\mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} B_i$, όπου $B_i \in \gamma$, για κάθε $i \in I$.

Αν ο $(X, \mathcal{T})$ είναι μετρικοποιήσιμος από την d τότε μια βάση της $\mathcal{T}$ δίνεται από την

$$\gamma = \{ B_d(x, q) \mid x \in D,\ q \in \mathbb{Q},\ q > 0 \}$$

όπου $D \subseteq X$ είναι πυκνό.

Αν ο $(X, \mathcal{T})$ είναι μετρικοποιήσιμος και διαχωρίσιμος και το $D \subseteq X$ είναι αριθμήσιμο και πυκνό, τότε η γ όπως πιο πάνω είναι αριθμήσιμο σύνολο.

Και ταυτόχρονα ισχύει το εξής:
Κάθε διαχωρίσιμος μετρικός χώρος έχει αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του.
Ισχύει και το αντίστροφο: κάθε μετρικός χώρος που έχει αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του είναι διαχωρίσιμος.

Πλήρεις μετρικοί χώροι:

Δίνεται ένας μετρικός χώρος (X, d) και μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο X.
Η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ λέγεται Cauchy ή βασική αν για κάθε $r>0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $\forall n, m \geq n_0$ να ισχύει $d(x_n, x_m) < r$.
Ο (X, d) λέγεται πλήρης αν

κάθε ακολουθία Cauchy στο X συγκλίνει σε κάποιο $x \in X$.

$(\mathbb{Q}, |\cdot - \cdot|)$

$q_n \to \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

$(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$: Cauchy στον $(\mathbb{Q}, |\cdot-\cdot|)$ αλλά όχι συγκλίνουσα στον $(\mathbb{Q}, |\cdot-\cdot|)$

<u>Σχόλιο:</u> Οι προηγούμενες κατασκευές

$d \longmapsto \min\{d, 1\}$

$d \longmapsto \dfrac{d}{1+d}$

διατηρούν την πληρότητα.

Η πληρότητα όμως δεν διατηρείται κάτω από ισοδύναμες μετρικές.

Δηλαδή μπορεί να έχουμε δύο μετρικές d και ρ σε ένα $X \neq \emptyset$ $d \sim \rho$, ο (X, d) να είναι πλήρης αλλά ο (X, ρ) να μην είναι πλήρης.

Παράδειγμα: $X = \{ 2^{-n} \mid n \in \mathbb{N} \}$

$$\rho(x,y) = |x-y|$$

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

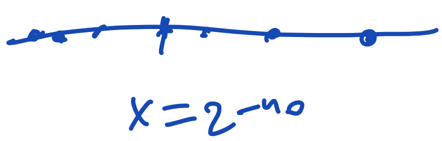
Ο (X,ρ) δεν είναι πλήρης, παίρνοντας $x_n = 2^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Ο (X,d) είναι πλήρης.

(Κάθε ακολουθία Cauchy ως προς τη διακριτή μετρική είναι τελικά σταθερή και επομένως συγκλίνουσα).

Ισχύει επίσης ότι $\rho \sim d$.

Γιατί: $x_n \xrightarrow{\rho} x \iff x_n \xrightarrow{d} x$



Προκύπτει ότι η πληρότητα δεν διατηρείται κάτω από τοπολογικούς ισομορφισμούς.

Επίσης προκύπτει ότι η πληρότητα είναι μια έννοια που δεν επεκτείνεται σε τοπολογικούς χώρους.

Συγκεκριμένα δεν υπάρχει ιδιότητα P τοπολογικών χώρων έτσι ώστε για κάθε μετρική d, αν η $\mathcal{T}$ είναι μετρικοποιήσιμη από την d τότε:

ο $(X, \mathcal{T})$ έχει την P $\Leftrightarrow$ ο (X, d) είναι πλήρης.