ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ

ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ ΓΡΗΓΟΡΙΑΔΗΣ

Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο Σχολη Εφαρμοσμενων Μαθηματικων και Φυσικων Επιστημων Ηρωων Πολυτεχνειου 9, 157 80, Αθηνα

Ηλεκτρονική Διεύθυνση: `vgregoriades@math.ntua.gr`

Περιεχόμενα

Ακρωνύμια και Συμβολισμοί

AC	Αξίωμα Επιλογής
DC	Αξίωμα Εξαρτημένων Επιλογών
$\mathcal{N}$	ο χώρος του Baire
$2^{\mathbb{N}}$	ο χώρος του Cantor
$\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}, \mathcal{W}$	Πολωνικοί χώροι
Λ	η κενή ακολουθία
$\langle\cdot\rangle$	η συνάρτηση κωδικοποίησης πεπερασμένων ακολουθιών
$\mathtt{Seq}$	το σύνολων όλων των κωδικών πεπερασμένων ακολουθιών
$*$	παράθεση πεπερασμένων ακολουθιών
$X^{<\mathbb{N}}$	το σύνολο όλων των πεπερασμένων ακολουθιών από το X
$\sqsubseteq$	αρχικό τμήμα
$d_{\mathcal{N}}$	η μετρική του χώρου του Baire
$\mathcal{N}_u$	βασική περιοχή του χώρου του Baire
$[T]$	το σώμα του δένδρου T
Tr	ο χώρος όλων των δένδρων στους φυσικούς
IF	το σύνολο όλων των μη θεμελιωμένων δένδρων
WF	το σύνολο όλων των θεμελιωμένων δένδρων
Γ	κλάση συνόλων ή συναρτήσεων
$\mathsf{Hom}^{\mathsf{u}}$	ξεδιπλωμένοι ομομορφισμοί

Πρόλογος

Η περιγραφική θεωρία συνόλων είναι η περιοχή των μαθηματικών που ασχολείται με τη δομή των συνόλων σε Πολωνικούς χώρους, τα οποία ορίζονται μέσω της εφαρμογής των συνηθισμένων λογικών και συνολοθεωρητικών τελεστών ξεκινώντας από τα βασικά ανοικτά σύνολα. Πέρα από ανεξάρτητη ερευνητική περιοχή η περιγραφική θεωρία συνόλων έχει αλληλεπιδράσεις με άλλες περιοχές των μαθηματικών όπως η συναρτησιακή ανάλυση, η αρμονική ανάλυση, η εργοδική θεωρία, η θεωρία ομάδων και η λογική.

Αναφέρουμε μερικά ιστορικά στοιχεία από τις απαρχές της περιγραφικής θεωρίας συνόλων, τα οποία ρίχνουν φως στα κίνητρα για την ανάπτυξη της περιοχής. Για μια πλήρη ιστορική ανάλυση παραπέμπουμε τους αναγνώστες στην εξαιρετική εισαγωγή του συγγράμματος [**33**].

Η περιοχή έχει τις ρίζες της στα τέλη του 19ου αιώνα όταν οι Γάλλοι αναλύστες της εποχής (Lebesgue, Baire, Borel) ασχολούνταν με την έννοια της ορισιμότητας (definability). Ο ορισμός της έννοιας της συνάρτησης από τον Riemann ως μιας αντιστοιχίας που δεν διέπεται απαραίτητα από κάποιον τύπο –αυτό δηλαδή που δεχόμαστε σήμερα– ήταν σχετικά καινούργιος. Σε συνδυασμό με το Αξίωμα Επιλογής, το οποίο εξασφαλίζει την ύπαρξη τέτοιων «αυθαίρετων» συναρτήσεων, προκύπτουν αποτελέσματα που θεωρήθηκαν τουλάχιστον περίεργα, όπως η ύπαρξη υποσυνόλων του επιπέδου που δεν έχουν εμβαδόν ή η ύπαρξη διάταξης στους πραγματικούς αριθμούς ως προς την οποία κάθε μη κενό σύνολο έχει ελάχιστο στοιχείο.

Από την άλλη μεριά όλα τα γνωστά παραδείγματα συναρτήσεων ορίζονται μέσω της εφαρμογής κάποιου κανόνα, είναι πολυώνυμα, ρητές συναρτήσεις, δυναμοσειρές, διακλάδωση αυτών και παρόμοιοι ορισμοί. Προτάθηκε επομένως η ακόλουθη προσέγγιση: *αντί να περιορίσουμε την έννοια της συνάρτησης ή των αξιωμάτων της θεωρίας συνόλων, να ασχοληθούμε με τις συναρτήσεις που μπορούμε να ορίσουμε, οι οποίες αποτελούν τη συντριπτική πλειοψηφία των περιπτώσεων που συναντάμε.*

Το ενδιαφέρον επικεντρωνόταν αρχικά στις συναρτήσεις και στα σύνολα των πραγματικών αριθμών. Προκειμένου όμως να μελετηθούν αυτά έπρεπε κανείς να ασχοληθεί και με υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$, με σύνολα συνεχών συναρτήσεων, με γινόμενα αυτών των χώρων και ούτω καθεξής. Κοινός παρονομαστής όλων αυτών είναι ότι αποτελούν πλήρεις και διαχωρίσιμους μετρικούς χώρους. Οι τοπολογικοί χώροι που προκύπτουν από αυτούς ονομάζονται *Πολωνικοί χώροι*, οι οποίοι είναι το κυρίως πλαίσιο στο οποίο αναπτύσσεται η περιγραφική θεωρία συνόλων.

Η εργασία του Lebesgue [**14**] θεωρείται θεμελιώδης για την περιγραφική θεωρία συνόλων. Σε αυτή γίνεται συστηματική μελέτη διάφορων εννοιών ορισιμότητας συναρτήσεων και συνόλων που σχετίζονται με τα Borel σύνολα, αναπτύσσονται κλασικές τεχνικές της περιοχής και δίνονται τα πρώτα αποτελέσματα ιεράρχησης κλάσεων. Ο Lebesgue ισχυρίστηκε –λανθασμένα– ότι η προβολή ενός Borel υποσυνόλου του επιπέδου είναι επίσης Borel υποσύνολο της ευθείας των πραγματικών αριθμών. Το λάθος εντοπίστηκε δέκα χρόνια αργότερα από τον Suslin, έναν νεαρό μαθητή του Lusin. Όπως περιγράφει γλαφυρά ο Sierpinski [**40**], ο Suslin έτρεξε να πει στον Lusin για το λάθος που εντόπισε. Οι Suslin-Lusin ανακάλυψαν ότι οι προβολές των Borel συνόλων οδηγούν σε μια νέα κλάση με πλούσια δομή, αυτή των αναλυτικών συνόλων. Τα αναλυτικά σύνολα ικανοποιούν την Υπόθεση του Συνεχούς (δηλαδή ένα αναλυτικό σύνολο είναι είτε αριθμήσιμο είτε ισοπληθικό με το $\mathbb{R}$) και είναι μετρήσιμα ως προς οποιοδήποτε σ-πεπερασμένο Borel μέτρο.

Ο Suslin δυστυχώς απεβίωσε το 1919 νικημένος από τον τύφο, λίγο πριν συμπληρώσει τα 25. Η δουλειά του όμως συνεχίστηκε από τους Lusin και Sierpinski, οι οποίοι εισήγαγαν τις προβολικές κλάσεις συνόλων. Αυτές αποτελούν μια νέα ιεραρχία, το πρώτο βήμα της οποίας είναι η κλάση των αναλυτικών συνόλων. Τίθενται με φυσιολογικό τρόπο τα ίδια ερωτήματα για τη δομή των προβολικών κλάσεων, όπως για παράδειγμα αν τα στοιχεία τους ικανοποιούν την Υπόθεση του Συνεχούς ή αν είναι μετρήσιμα. Αυτά τα ερωτήματα παρέμειναν ανοικτά για μεγάλο διάστημα και για καλό λόγο: είναι ανεξάρτητα από τα συνήθη αξιώματα της θεωρίας συνόλων. Για την απόδειξή της χρειάστηκε η περίφημη μέθοδος του forcing η οποία ανακαλύφθηκε από τον Cohen το 1963.

Η περιγραφική θεωρία συνόλων γνώρισε μεγάλη ανάπτυξη στις δεκαετίες που ακολούθησαν. Καθοριστική υπήρξε η συμβολή από άλλες περιοχές όπως η θεωρία αναδρομής (recursion theory), η θεωρία παιγνίων και η θεωρία γραφημάτων. Από τη δεκαετία του 1990 και έπειτα δόθηκε μεγάλη έμφαση στις εφαρμογές και αλληλεπιδράσεις με άλλες περιοχές των μαθηματικών, μερικές από τις οποίες αναφέραμε πιο πάνω. Χαρακτηριστικό σύγγραμμα αναφοράς αποτελεί το [**8**].

Μερικά λόγια για το περιεχόμενο. Σε αυτές τις σημειώσεις επιχειρείται μια εισαγωγή στο αντικείμενο της περιγραφικής θεωρίας συνόλων. Οι προαπαιτούμενες γνώσεις εστιάζονται κυρίως στη θεωρία μετρικών χώρων και στις στοιχειώδεις γνώσεις της γενικής τοπολογίας. Για την πλήρη εμβάθυνση σε όλες τις πτυχές του κειμένου χρειάζονται και γνώσεις από τη θεωρία μέτρου, καθώς και από τη θεωρία συνόλων κυρίως στο κομμάτι που αφορά τους διατακτικούς αριθμούς και την υπερπεπερασμένη επαγωγή.

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζονται συνοπτικά οι προαπαιτούμενες έννοιες που αφορούν το μεγαλύτερο μέρος του κειμένου. Στο δεύτερο κεφάλαιο αναπτύσσεται η θεωρία των Πολωνικών χώρων. Δίνεται έμφαση στους θεμελιώδεις χώρους του Baire και του Cantor, καθώς και στην έννοια του δένδρου, η οποία αποτελεί ένα πολύτιμο συνδυαστικό εργαλείο για τη συνέχεια. Μελετώνται το Θεώρημα Cantor-Bendixson, μερικές καθολικές ιδιότητες που αναφέρονται σε Πολωνικούς χώρους, οι μηδενοδιάστατοι Πολωνικοί χώροι και αποδεικνύονται τοπολογικοί χαρακτηρισμοί των χώρων του Baire και Cantor.

Το τρίτο κεφάλαιο ασχολείται με τη γενική θεωρία των κλάσεων συνόλων σε Πολωνικούς χώρους καθώς και με τους θεμελιώδεις τελεστές από τη λογική και τη θεωρία συνόλων. Παρατίθεται μια μέθοδος εκτίμησης της κλάσης στην οποία ανήκει ένα δοσμένο σύνολο με βάση τους λογικούς τελεστές που το ορίζουν. Αυτή η μέθοδος προέρχεται από την *κατασκευαστική* περιγραφική θεωρία συνόλων (effective descriptive set theory), η οποία αποτελεί κλάδο της περιοχής όπου γίνεται χρήση βαθιών εννοιών από τη θεωρία αναδρομής. Διευκρινίζεται ότι δεν προαπαιτείται γνώση από την κατασκευαστική θεωρία και πως ούτε επιχειρείται κάποια ανάπτυξη της τελευταίας στις παρούσες σημειώσεις.

Στη συνέχεια του τρίτου κεφαλαίου εισάγονται και μελετώνται δύο από τις πιο θεμελιώδεις κατηγορίες κλάσεων της περιοχής: οι κλάσεις των Borel συνόλων πεπερασμένης τάξης και οι προβολικές κλάσεις. Με βάση την έννοια του καθολικού συνόλου αποδεικνύεται ότι αυτές οι κλάσεις συνιστούν μια γνήσια ιεραρχία συνόλων στους υπεραριθμήσιμους Πολωνικούς χώρους. Επιπλέον μελετώνται και άλλες συναφείς έννοιες, όπως η μετρησιμότητα συνάρτησης και η πληρότητα συνόλου ως προς κλάση, η ενοποίηση, η αναγωγή και ο διαχωρισμός.

Το τέταρτο κεφάλαιο ασχολείται με τα Borel σύνολα και τις Borel-μετρήσιμες συναρτήσεις. Αποδεικνύεται το Θεώρημα του Borel-ισομορφισμού, το οποίο στην ουσία λέει ότι όλοι οι υπεραριθμήσιμοι Πολωνικοί χώροι έχουν την ίδια Borel δομή. Έπειτα μελετάται η σχέση των Borel συνόλων με τις ένα-προς-ένα συναρτήσεις και αποδεικνύεται η γνωστή αναπαράσταση των Borel συνόλων ως οι ένα-προς-ένα συνεχείς εικόνες κλειστών υποσυνόλων του χώρου του Baire. Τέλος, εισάγονται οι κλάσεις των Borel συνόλων υπερπεπερασμένης τάξης και αποδεικνύονται οι βασικές τους ιδιότητες.

Στο πέμπτο κεφάλαιο γίνεται βαθύτερη μελέτη της κλάσης των αναλυτικών συνόλων, τα οποία απαρτίζουν το πρώτο βήμα στην ιεραρχία των προβολικών συνόλων. Αρχικά δίνονται ιδιότητες και χαρακτηρισμοί και στη συνέχεια αποδεικνύονται μερικά από τα θεμελιώδη αποτελέσματα αυτής της κλάσης: το Θεώρημα Διαχωρισμού του Lusin, το Θεώρημα του Suslin, το Θεώρημα Τέλειου Συνόλου, το Θεώρημα Kunen-Martin, καθώς και ότι τα αναλυτικά σύνολα είναι μετρήσιμα ως προς την πλήρωση οποιουδήποτε σ-πεπερασμένου μέτρου.

Το έκτο κεφάλαιο ασχολείται με τη βαθύτερη μελέτη της κλάσης των συναναλυτικών συνόλων (δηλαδή των συμπληρωμάτων των αναλυτικών), καθώς και με τις συνέπειες αυτών στην ενοποίηση των Borel συνόλων. Σε αυτό το σημείο παρουσιάζεται μια καινούργια προσέγγιση με τεχνικές που προέρχονται από την κατασκευαστική περιγραφική θεωρία συνόλων. Μια από τις επιτυχίες της τελευταίας είναι η ανακάλυψη ενός κοινού παρονομαστή, γνωστού ως Θεώρημα Περιορισμένου Ποσοδείκτη (Theorem on Restricted Quantification), με βάση τον οποίο προκύπτουν –με κάποια δουλειά– πολλά από τα γνωστά αποτελέσματα που αφορούν την ενοποίηση των Borel συνόλων. Στη δική μας καινούργια προσέγγιση γίνεται αναπροσαρμογή του Θεωρήματος Περιορισμένου Ποσοδείκτη σε γλώσσα που είναι ελεύθερη από την κατασκευαστική θεωρία και τη θεωρία αναδρομής. Το αποτέλεσμα είναι μια ασθενέστερη εκδοχή του Θεωρήματος Περιορισμένου Ποσοδείκτη, το οποίο όμως επαρκεί για τους σκοπούς μας. Φιλοδοξούμε αυτή η προσέγγιση να αποτελέσει εφαλτήριο για νέα έρευνα στην περιοχή όπως και να καταστήσει την κατασκευαστική θεωρία πιο προσιτή σε ένα ευρύτερο κοινό.

Για την υλοποίηση των πιο πάνω δίνεται στο έκτο κεφάλαιο ένα θεώρημα ενοποίησης πάνω σε συναναλυτικά σύνολα, γνωστό και ως Θεώρημα Ενοποίησης του Kreisel. Επίσης αποδεικνύεται ένα θεώρημα τύπου σταθερού σημείου του Kleene και μια παραμετρικοποιημένη εκδοχή του Θεωρήματος Τέλειου Συνόλου.

Στο έβδομο κεφάλαιο γίνεται παρουσίαση στοιχείων της θεωρίας παιγνίων και δίνονται μερικές εφαρμογές στην περιγραφική θεωρία συνόλων. Αναφέρουμε ιδιαίτερα το αποτέλεσμα ότι τα προβολικά σύνολα ικανοποιούν την Υπόθεση του Συνεχούς υπό το πρόσθετο αξίωμα της προσδιοριστότητας των προβολικών παιγνίων. Το όγδοο και τελευταίο κεφάλαιο αφορά μερικές σύγχρονες εφαρμογές από τη θεωρία γραφημάτων. Συγκεκριμένα παρουσιάζεται η απόδειξη της Διχοτομίας των Kechris-Solecki-Todorcevic από τον Ben Miller και εφαρμογές αυτής στη θεωρία των Borel συνόλων.

Οι σημειώσεις περιέχουν μια μεγάλη συλλογή από ασκήσεις μεταβαλλόμενης δυσκολίας. Στο παράρτημα που ακολουθεί το κυρίως κείμενο δίνονται λύσεις και υποδείξεις στις περισσότερες από αυτές.

Κλείνοντας αναφέρουμε ότι το παρόν σύγγραμμα είναι το πρώτο στην ελληνική γλώσσα, το οποίο έχει ως στόχο μια ολοκληρωμένη εισαγωγή στην περιγραφική θεωρία συνόλων. Πιστεύουμε ότι αυτό καλύπτει ένα κενό στην ελληνική μαθηματική βιβλιογραφία.

Ευχαριστίες. Η εκπόνηση αυτού του συγγράμματος δεν θα ήταν δυνατή χωρίς τη σύζυγό μου *Στέλλα* και τα παιδιά μας *Φίλιππο* και *Άγγελο*, στους οποίους αφιερώνεται το παρόν σύγγραμμα. Τους ευχαριστώ θερμά για την ηθική συμπαράσταση και την κατανόηση για όλες τις οικογενειακές ώρες που αφιέρωσα μπροστά από τον υπολογιστή. Εκφράζω επίσης τις ευχαριστίες μου στους *Γιάννη Μοσχοβάκη*, *Αλέξανδρο Κεχρή* και *Βασίλη Κανελλόπουλο* για τα σχόλια και τις παρατηρήσεις τους. Ιδιαίτερες ευχαριστίες οφείλονται στην *Αναστασία Λαμπροπούλου*, η οποία ανέλαβε το έργο του εντοπισμού των γλωσσικών μου αστοχιών και μάλιστα σε σύντομο χρονικό διάστημα – ελπίζω αυτή η παράγραφος να μην χρειάζεται την επέμβασή της. Ευχαριστώ επίσης τον *Μανώλη Γεωργούλη*, σύντροφο στον Κάλλιπο και συναγωνιστή στον αγώνα της τεχνικής επιμέλειας των κειμένων μας σε κώδικα TEX. Τέλος, ο κατάλογος των ευχαριστιών δεν θα ήταν πλήρης χωρίς *τους/τις φοιτητές/τριες* του μαθήματος «Περιγραφική Θεωρία συνόλων» που διάβασαν τις πρώιμες εκδοχές του συγγράμματος. Με τις παρατηρήσεις και τις απορίες τους συνέβαλαν με τον δικό τους τρόπο στη διαμόρφωσή του.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Ανασκόπηση των θεμελιωδών εννοιών

Σύνοψη:
- Συμβολισμοί.
- Σύντομη αναφορά στις στοιχειώδεις γνώσεις πραγματικής ανάλυσης και τοπολογίας.
- Στοιχεία από τη θεωρία συνόλων.

Προαπαιτούμενη γνώση:
- Πραγματική ανάλυση και τοπολογία.
- Επιθυμητή η γνώση της ισοπληθικότητας από τη θεωρία συνόλων.

1.1. Ορολογία και συμβολισμοί

Με $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{R}$ εννοούμε τα σύνολα των φυσικών, ακέραιων, ρητών και πραγματικών αριθμών αντίστοιχα, όπου στο $\mathbb{N}$ συμπεριλαμβάνουμε και το 0, έτσι που

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Το **δυναμοσύνολο** $\mathcal{P}(X)$ ενός συνόλου X είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων του X.

Δοσμένων δύο μη κενών συνόλων X και Y συμβολίζουμε με Y^X το **σύνολο όλων των συναρτήσεων** από το X στο Y. Αν $(X_i)_{i\in I}$ είναι μια οικογένεια μη κενών συνόλων συμβολίζουμε με $\prod_{i\in I} X_i$ την οικογένεια όλων των συναρτήσεων $f : I \to \bigcup_{i\in I} X_i$ με $f(i) \in X_i$ για κάθε $i \in I$. Στην περίπτωση όπου $X_i = X$ για κάθε $i \in I$ τότε το σύνολο $\prod_{i\in I} X_i$ είναι προφανώς το X^I. Θα μας απασχολήσουν ιδιαίτερα σύνολα της μορφής $X^{\mathbb{N}}$.

Μια ένα-προς-ένα συνάρτηση θα καλείται και **μονομορφισμός** ενώ μια επί συνάρτηση θα καλείται και **επιμορφισμός**. Με τον όρο **ισομορφισμός** ή **αντιστοιχία** εννοούμε μια συνάρτηση που είναι ένα-προς-ένα και επί. Επίσης συμβολίζουμε

$$\begin{aligned} f : X \rightarrowtail Y &\iff \text{η } f \text{ είναι μονομορφισμός,}\\ f : X \twoheadrightarrow Y &\iff \text{η } f \text{ είναι επιμορφισμός,}\\ f : X \rightarrowtail\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow Y &\iff \text{η } f \text{ είναι ισομορφισμός.} \end{aligned}$$

Αν $f \in Y^X$, $A \subseteq X$ και $B \subseteq Y$ συμβολίζουμε με $f[A]$ την **εικόνα** του A κάτω από την f και με $f^{-1}[B]$ την **αντίστροφη εικόνα** του B κάτω από την f, δηλαδή

$$\begin{aligned} f[A] &= \{y \in Y \mid \text{υπάρχει } x \in X \text{ με } f(x) = y\}\\ f^{-1}[B] &= \{x \in X \mid f(x) \in B\}. \end{aligned}$$

Ο **περιορισμός** μιας συνάρτησης $f : X \to Y$ στο σύνολο $A \subseteq X$ συμβολίζεται με $f|A$. Στις συναρτήσεις $f : X \to Y$ συμπεριλαμβάνουμε και τις περιπτώσεις όπου τα X, Y είναι κενά με την προϋπόθεση ότι δεν έχουμε $X \neq \varnothing$ και $Y = \varnothing$. Αν έχουμε μια συνάρτηση $f : X \to Y$ και τουλάχιστον ένα από τα X, Y είναι το κενό σύνολο, τότε θα λέμε ότι η f είναι η **κενή συνάρτηση**. Θεωρούμε ότι η κενή συνάρτηση είναι πάντα μονομορφισμός και πως η $f : \varnothing \to \varnothing$ είναι ισομορφισμός.

Πολλές φορές όταν γράφουμε μαθηματικές προτάσεις θα χρησιμοποιούμε τους λογικούς τελεστές της **διάζευξης** $\vee$, **σύζευξης** &, **άρνησης** $\neg$, και λογικής **συνεπαγωγής** $\longrightarrow$, που ορίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned}
P(x) \ \vee \ Q(y) &\iff \text{το } x \text{ έχει την ιδιότητα } P \text{ ή το } y \text{ την } Q \\
P(x) \ \& \ Q(y) &\iff \text{το } x \text{ έχει την ιδιότητα } P \text{ και το } y \text{ την } Q \\
\neg P(x) &\iff \text{το } x \text{ δεν έχει την ιδιότητα } P \\
P(x) \ \longrightarrow Q(y) &\iff \text{αν το } x \text{ έχει την ιδιότητα } P \text{ τότε το } y \text{ έχει την } Q.
\end{aligned}$$

Με τον όρο «ποσοδείκτης» εννοούμε είτε το $\exists$ (υπαρξιακός ποσοδείκτης) είτε το $\forall$ (καθολικός ποσοδείκτης). Όταν γράφουμε λογικές προτάσεις με σύμβολα, θα παραλείπουμε τις παρενθέσεις όσο είναι δυνατόν. Για παράδειγμα, με

$$\exists i \in I \ \forall j \in J \ (i, j) \in A$$

εννοούμε ότι υπάρχει ένα στοιχείο i του I, έτσι ώστε για κάθε στοιχείο j του J ισχύει $(i, j) \in A$.

Ιδιαίτερη σημασία έχουν οι ποσοδείκτες με «κενό πεδίο» δηλαδή οι εκφράσεις $\exists i \in I$ και $\forall i \in I$, όπου I είναι το κενό σύνολο. Κάθε έκφραση της μορφής

$$\exists i \in I \ P(i)$$

για $I = \varnothing$ είναι πάντα ψευδής, γιατί είναι λογικά ισοδύναμη με την $\exists i \ (i \in \varnothing \ \& \ P(i))$. Από την άλλη, κάθε έκφραση της μορφής

$$\forall i \in I \ P(i)$$

για $I = \varnothing$ είναι πάντα αληθής, γιατί είναι λογικά ισοδύναμη με την $\forall i \ (i \notin \varnothing \ \vee \ P(i))$.

1.2. Αριθμήσιμα και υπεραριθμήσιμα σύνολα

Αναφέρουμε σύντομα μερικά βασικά στοιχεία από τη θεωρία συνόλων. Ένα σύγγραμμα αναφοράς είναι το [**32**]. Δύο σύνολα A, B ονομάζονται **ισοπληθικά** αν υπάρχει μια ένα-προς-ένα και επί συνάρτηση $f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow B$. Σε αυτή την περίπτωση γράφουμε $A =_c B$. Αντιλαμβανόμαστε τη σχέση $=_c$ ως μαθηματική έκφραση της διαισθητικής έννοιας «το A έχει το ίδιο πλήθος στοιχείων με το B». Η θεώρησή μας ότι η κενή συνάρτηση $f : \varnothing \to \varnothing$ είναι ένα-προς-ένα και επί εκφράζει τη βασική αρχή ότι το κενό σύνολο έχει τον ίδιο αριθμό στοιχείων με τον εαυτό του, συγκεκριμένα δεν έχει καθόλου στοιχεία.

Θα λέμε ότι το σύνολο A έχει **πληθάριθμο μικρότερο ή ίσο** από το B και θα γράφουμε $A \leqslant_c B$ αν υπάρχει μια ένα-προς-ένα συνάρτηση $f : A \rightarrowtail B$. Αντιλαμβανόμαστε την έκφραση $\leqslant_c$ ως μαθηματική έκφραση της διαισθητικής έννοιας «το A έχει μικρότερο ή ίσο πλήθος στοιχείων από το B». Η θεώρησή μας ότι η κενή συνάρτηση $f : \varnothing \to B$ είναι πάντα ένα-προς-ένα εκφράζει τη βασική αρχή ότι το κενό σύνολο έχει πάντα λιγότερα στοιχεία από οποιοδήποτε μη κενό σύνολο.

Οι πιο πάνω ορισμοί θα είχαν μικρό νόημα αν δεν επαλήθευαν την εξής θεμελιώδη απαίτηση:

αν

το A έχει μικρότερο ή ίσο πλήθος στοιχείων από το B και

το B έχει μικρότερο ή ίσο πλήθος στοιχείων από το A

τότε

το A και το B έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων.

Αυτό ικανοποιείται για τους πιο πάνω ορισμούς από το επόμενο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 1.2.1 (Schröder-Bernstein). *Για όλα τα σύνολα A, B αν $A \leqslant_c B$ και $B \leqslant_c A$ τότε $A =_c B$.*

Ένα σύνολο A είναι **πεπερασμένο** αν είναι ισοπληθικό με το σύνολο $\{i \in \mathbb{N} \mid i < n\}$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Όταν $n = 0$ το τελευταίο σύνολο είναι το κενό έτσι που το κενό σύνολο είναι πεπερασμένο. Το A είναι **αριθμήσιμο** αν είναι πεπερασμένο ή ισοπληθικό με το $\mathbb{N}$. Όπως είναι γνωστό, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- το A είναι αριθμήσιμο,
- $A \leqslant_c \mathbb{N}$,
- $A = \varnothing$ ή υπάρχει επιμορφισμός $\pi : \mathbb{N} \twoheadrightarrow A$ (όχι απαραίτητα ένα-προς-ένα).

Ο τελευταίος χαρακτηρισμός λέει ότι τα αριθμήσιμα σύνολα είναι ακριβώς αυτά που επιδέχονται μια απαρίθμηση $A = \{\pi(0), \pi(1), \dots, \pi(n), \dots\} = \{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\}$, χωρίς να μας απασχολεί αν κάποιες τιμές επαναλαμβάνονται, δηλαδή επιτρέπουμε $\pi(n) = \pi(m)$ για $n \neq m$.

Μερικά βασικά αποτελέσματα στα αριθμήσιμα σύνολα είναι τα εξής:

- Αν $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία από αριθμήσιμα σύνολα, τότε η ένωση $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ είναι αριθμήσιμο σύνολο.
- Αν τα A_0,..., A_n είναι αριθμήσιμα σύνολα, τότε το καρτεσιανό γινόμενο $A_0 \times \dots \times A_n$ είναι αριθμήσιμο σύνολο.
- Αν το B είναι αριθμήσιμο σύνολο και $A \leqslant_c B$, τότε το A είναι αριθμήσιμο σύνολο.

Από τα προηγούμενα προκύπτει εύκολα ότι οι ακέραιοι αριθμοί $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-1) \cdot \mathbb{N}$ και οι ρητοί αριθμοί $\mathbb{Q} \leqslant_c \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ είναι αριθμήσιμα σύνολα. Συνεπώς $\mathbb{N} =_c \mathbb{Z} =_c \mathbb{Q}$. Άλλες γνωστές ισοπληθικότητες είναι:

$\mathbb{N} =_c$ το σύνολο όλων των αλγεβρικών αριθμών,

$\mathbb{R} =_c \mathcal{P}(\mathbb{N}) =_c \{0,1\}^{\mathbb{N}} =_c \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$,

$\mathbb{R} =_c (a,b) =_c [a,b) =_c (a,b] =_c [a,b]$ όπου $a < b$,

$\mathbb{R} =_c C([0,1]) =$ το σύνολο όλων των συνεχών συναρτήσεων $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$\mathbb{R} =_c \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} =$ το σύνολο όλων των άρρητων αριθμών.

Θα λέμε ότι ένα σύνολο A **έχει τον πληθάριθμο του συνεχούς** αν $A =_c \mathbb{R}$ και ότι το A **έχει πληθάριθμο μικρότερο ή ίσο του συνεχούς** αν $A \leqslant_c \mathbb{R}$.

Σε όλα τα προηγούμενα παραδείγματα βλέπουμε ότι όπου έχουμε ένα άπειρο υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ ισχύει είτε $A =_c \mathbb{N}$ είτε $A =_c \mathbb{R}$. Ο Cantor, θεμελιωτής της θεωρίας συνόλων, έθεσε το ερώτημα κατά πόσον αυτό το συμπέρασμα ισχύει για όλα τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Αυτή η πρόταση έγινε γνωστή ως

Υπόθεση του Συνεχούς (Continuum Hypothesis).
Για κάθε άπειρο $A \subseteq \mathbb{R}$ ισχύει είτε $A =_c \mathbb{N}$ είτε $A =_c \mathbb{R}$.

Όπως αποδείχθηκε από τους Gödel (1940) και Cohen (1963) η Υπόθεση του Συνεχούς είναι *ανεξάρτητη* από τα συνήθη αξιώματα των μαθηματικών. Δηλαδή δεν μπορεί ούτε να αποδειχθεί (Cohen) αλλά ούτε και να διαψευστεί (Gödel) με εργαλεία τα συνηθισμένα αξιώματα που δεχόμαστε στα μαθηματικά.

Από την άλλη, έγινε γρήγορα γνωστό πως κάθε κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ ικανοποιεί την Υπόθεση του Συνεχούς. Βλέπουμε λοιπόν ότι η προσθήκη μιας τοπολογικής συνθήκης απαντά θετικά στο πρόβλημα. Θα δούμε ότι η Υπόθεση του Συνεχούς επαληθεύεται από πολύ περισσότερα «ορίσιμα» σύνολα.

Τέλος αναφέρουμε το γνωστό αποτέλεσμα του Cantor, ότι για κάθε σύνολο A έχουμε $A <_c \mathcal{P}(A)$, δηλαδή $A \leqslant_c \mathcal{P}(A)$ και $A \neq_c \mathcal{P}(A)$. Συνεπώς υπάρχουν σύνολα με μεγαλύτερη πληθικότητα από το $\mathbb{R}$, το $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ για παράδειγμα. Από την άλλη, τα σύνολα με τα οποία θα ασχοληθούμε είναι συνήθως $\leqslant_c \mathbb{R}$.

1.3. Στοιχεία μετρικών χώρων και τοπολογίας

Δίνουμε μια σύντομη ανασκόπηση των εννοιών που θα χρειαστούμε. Ένα σύγγραμμα αναφοράς είναι το **[37]**. **Μετρική** σε ένα μη κενό σύνολο X είναι μια συνάρτηση $d : X \times X \to \mathbb{R}$ με τις ιδιότητες

$$\begin{aligned}
&d(x,y) \geqslant 0 \text{ και } d(x,y) = 0 \iff x = y\\
&d(x,y) = d(y,x)\\
&d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,x)
\end{aligned}$$

όπου $x, y \in X$. Το ζεύγος (X, d) ονομάζεται μετρικός χώρος.

Η **διακριτή μετρική** σε ένα σύνολο X είναι η

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, \text{ αν } x \neq y, \\ 0, \text{αν } x = y, \end{cases} \qquad \text{όπου } x, y \in X.$$

Εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά θα θεωρούμε τα σύνολα $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{R}$ με τη **συνήθη μετρική** της απόστασης $\sigma(x,y) = |x - y|$.

Στους επόμενους ορισμούς θεωρούμε ότι μας δίνεται ένας μετρικός χώρος (X, d). Για κάθε μη κενό $Y \subseteq X$ μπορούμε να πάρουμε τον **περιορισμό** $d|(Y \times Y) \equiv d_Y$ της μετρικής d στο σύνολο Y, δηλαδή $d_Y(x,y) = d(x,y)$ για κάθε $x, y \in Y$. Ο (Y, d_Y) θα λέγεται **υπόχωρος** του (X, d).

Αν $x \in X$ και $r > 0$, η **ανοικτή μπάλα** κέντρου x και ακτίνας r στον (X, d) είναι το σύνολο

$$B_d^X(x,r) \equiv B_d(x,r) \equiv B(x,r) = \{y \in X \mid d(x,y) < r\}.$$

Το σημείο x είναι **εσωτερικό σημείο** του $A \subseteq X$ αν υπάρχει $r > 0$ με $B_d(x,r) \subseteq A$. Το A είναι **ανοικτό** αν κάθε $x \in A$ είναι εσωτερικό σημείο του A.

Το **εσωτερικό** A° του A είναι το σύνολο όλων των εσωτερικών σημείων του A, ισοδύναμα

$$A^\circ = \bigcup \{V \subseteq X \mid V\text{: ανοικτό και } V \subseteq A\}.$$

Μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον X **συγκλίνει** στο $x \in X$ ως προς την μετρική d αν $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) \to 0$. Γράφουμε $x_n \xrightarrow{d} x$ ή πιο απλά $x_n \to x$ όταν η d είναι σαφής από το κείμενο, για να δηλώσουμε ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο x. Λέμε ότι μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του $A \subseteq X$ είναι **συγκλίνουσα** στο A αν υπάρχει $x \in A$ με $x_n \to x$.

Ένα $x \in X$ είναι **οριακό σημείο** του $A \subseteq X$ αν για κάθε $r > 0$ υπάρχει $y \in A$ με $d(x,y) < r$. Παρατηρούμε ότι το προηγούμενο y μπορεί να είναι ίσο με το x (όταν $x \in A$), έτσι που κάθε στοιχείο του A είναι και οριακό σημείο του A. Στους μετρικούς χώρους το x είναι οριακό σημείο του A αν υπάρχει μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο A με $x_n \to x$ ως προς d.

Το x είναι **σημείο συσσώρευσης** του A αν για κάθε $r > 0$ υπάρχει $y \in A\backslash\{x\}$ με $d(x, y) < r$. Στους μετρικούς χώρους αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο A με $x_n \to x$ και $x_n \neq x$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Το σημείο $x \in A$ είναι **μεμονωμένο σημείο** του $A \subseteq X$ αν υπάρχει $r > 0$ με $B(x, r) \cap A = \{x\}$. Είναι σαφές ότι τα οριακά σημεία του A είναι ακριβώς τα μεμονωμένα σημεία μαζί με τα σημεία συσσώρευσης του A.

Το A είναι **κλειστό** αν περιέχει όλα τα οριακά του σημεία (ισοδύναμα περιέχει όλα τα σημεία συσσώρευσής του) ενώ το A είναι **τέλειο** αν είναι κλειστό και δεν έχει μεμονωμένα σημεία.

Η κλειστότητα $\overline{A}$ του A είναι το σύνολο όλων των οριακών σημείων του A, ισοδύναμα

$$\overline{A} = \bigcap\{F \subseteq X \mid F\text{: κλειστό και } F \supseteq A\}.$$

Προφανώς $A^\circ \subseteq A \subseteq \overline{A}$, το A είναι ανοικτό αν και μόνο αν $A = A^\circ$ και το A είναι κλειστό αν και μόνο αν $A = \overline{A}$. Όπως είναι γνωστό, το A είναι ανοικτό αν και μόνο αν το συμπλήρωμα $X\backslash A$ είναι κλειστό.

Ένα $D \subseteq X$ είναι **πυκνό** στον (X, d) αν για κάθε $x \in X$ και κάθε $r > 0$ ισχύει $B_d(x, r) \cap D \neq \varnothing$. Προφανώς, αν το D είναι πυκνό υποσύνολο του (X, d), τότε κάθε στοιχείο του X είναι όριο ακολουθίας του D. Ο μετρικός χώρος (X, d) είναι **διαχωρίσιμος** αν έχει αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο.

Ένα $K \subseteq X$ είναι **συμπαγές** αν για κάθε οικογένεια $(V_i)_{i\in I}$ ανοικτών υποσυνόλων του X με $K \subseteq \bigcup_{i\in I} V_i$ υπάρχουν $i_1, \dots, i_n \in I$ με $K \subseteq \bigcup_{t=1}^{n} V_{i_t}$, δηλαδή για κάθε ανοικτό κάλυμμα του K υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα. Η συμπάγεια στους μετρικούς χώρους είναι ισοδύναμη με την **ακολουθιακή συμπάγεια**, δηλαδή το K είναι συμπαγές αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του υπάρχει υπακολουθία $(x_{m_n})_{n\in\mathbb{N}}$ που συγκλίνει σε κάποιο $x \in K$. Κάθε συμπαγές σύνολο είναι κλειστό.

Μια συνάρτηση $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ ανάμεσα σε μετρικούς χώρους είναι **συνεχής στο σημείο** $x \in X$ αν για κάθε $r > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε $f[B_d(x, \delta)] \subseteq B_\rho(f(x), r)$. Ισοδύναμα για κάθε $V \subseteq Y$ που είναι ρ-ανοικτό υπάρχει $W \subseteq X$ που είναι d-ανοικτό έτσι ώστε $f[W] \subseteq Y$. Σύμφωνα με την *Αρχή Μεταφοράς* για μετρικούς χώρους, η f είναι συνεχής στο x αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον X με $x_n \xrightarrow{d} x$ ισχύει $f(x_n) \xrightarrow{\rho} f(x)$.

Η συνάρτηση f είναι **συνεχής** αν είναι συνεχής *σε κάθε* $x \in X$ ή ισοδύναμα για κάθε ανοικτό $V \subseteq Y$ η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}[V]$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X. Τέλος θα λέμε ότι η f είναι **τοπολογικός ισομορφισμός**.

Δύο μετρικές d_1 και d_2 στο σύνολο X είναι **ισοδύναμες**, συμβολικά $d_1 \sim d_2$ αν παράγουν την ίδια τοπολογία, δηλαδή για κάθε $V \subseteq X$ το V είναι d_1-ανοικτό αν και μόνο αν το V είναι d_2-ανοικτό. Ισοδύναμα $d_1 \sim d_2$ αν και μόνο αν η **ταυτοτική συνάρτηση**

$$\mathrm{id} : (X, d_1) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow (X, d_2)$$

είναι τοπολογικός ισομορφισμός. Ισοδύναμα για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο σύνολο X και κάθε $x \in X$ ισχύει

$$x_n \xrightarrow{d_1} x \iff x_n \xrightarrow{d_2} x.$$

Για κάθε μετρικό χώρο (X, d_1) οι συναρτήσεις

$$d_2 = \min\{d_1, 1\} \quad \text{και} \quad d_3 = \frac{d_1}{1 + d_1}$$

είναι μετρικές, οι οποίες είναι ισοδύναμες με την d_1. Παρατηρούμε ότι $d_2, d_3 \leqslant 1$, γι' αυτό είναι σύνηθες να θεωρείται ότι η μετρική παίρνει τιμές μικρότερες από ή ίσες με τη μονάδα.

Η οικογένεια των ανοικτών υποσυνόλων του X ικανοποιεί τις εξής βασικές ιδιότητες: (α) το κενό σύνολο $\varnothing$ και το X είναι ανοικτά συνόλα, (β) οποιαδήποτε ένωση ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό, και (γ) η πεπερασμένη τομή ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό.

Μια οικογένεια $\mathcal{T}$ υποσυνόλων του X ονομάζεται **τοπολογία** στο X αν περιέχει το κενό σύνολο $\varnothing$ και το X, για κάθε οικογένεια $(A_i)_{i \in I}$ συνόλων της $\mathcal{T}$ έχουμε $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$, και για κάθε $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{T}$ έχουμε $\bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{T}$. Με άλλα λόγια, μια τοπολογία ικανοποιεί τις προηγούμενες ιδιότητες (α), (β), (γ) των ανοικτών συνόλων, έτσι που η οικογένεια των ανοικτών υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου αποτελεί τοπολογία. Η οικογένεια των ανοικτών υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου (X, d) είναι **η τοπολογία του** (X, d).

Ένα ζεύγος $(X, \mathcal{T})$ λέγεται **τοπολογικός χώρος** αν το $\mathcal{T}$ είναι τοπολογία στο X. Τα στοιχεία της $\mathcal{T}$ λέγονται **ανοικτά** σύνολα του τοπολογικού χώρου. Τα **κλειστά** υποσύνολα ενός τοπολογικού χώρου είναι τα συμπληρώματα ανοικτών. Ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T})$ είναι **μετρικοποιήσιμος** ή πιο απλά η $\mathcal{T}$ είναι **μετρικοποιήσιμη** αν υπάρχει μετρική d στο X ώστε η $\mathcal{T}$ να είναι η τοπολογία του (X, d), δηλαδή η οικογένεια των d-ανοικτών υποσυνόλων του X.

Οι προηγούμενες έννοιες, όπως για παράδειγμα το εσωτερικό, η κλειστότητα, η συμπάγεια, η σύγκλιση, η συνέχεια, και η διαχωρισιμότητα επεκτείνονται στο πλαίσιο των τοπολογικών χώρων αντικαθιστώντας τις d-ανοικτές μπάλες $B_d(x, r)$ με στοιχεία της τοπολογίας V που περιέχουν το x. Εμείς θα ασχοληθούμε μόνο με μετρικοποιήσιμους τοπολογικούς χώρους. Παρόλα αυτά είναι χρήσιμο να βλέπουμε αυτές τις έννοιες από τη σκοπιά της τοπολογίας.

Μια οικογένεια $\mathcal{V}$ από υποσύνολα ενός τοπολογικού χώρου $(X, \mathcal{T})$ είναι **βάση της τοπολογίας** του X ή πιο απλά **βάση** του X αν $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$ και κάθε $U \in \mathcal{T}$ είναι ίσο με ένωση (πεπερασμένη ή άπειρη) στοιχείων της $\mathcal{V}$, δηλαδή υπάρχει οικογένεια $(B_i)_{i \in I}$ στοιχείων της $\mathcal{V}$ με $U = \bigcup_{i \in I} B_i$. Στους μετρικούς χώρους αυτό σημαίνει ότι κάθε στοιχείο της $\mathcal{V}$ είναι ανοικτό σύνολο και κάθε ανοικτό σύνολο γράφεται ως ένωση στοιχείων της $\mathcal{V}$.

Αν το D είναι πυκνό υποσύνολο ενός μετρικού χώρου (X, d), τότε το σύνολο

$$\mathcal{V} = \{B_d(x, q) \mid x \in D,\ q \in \mathbb{Q},\ q > 0\}$$

αποτελεί βάση για την τοπολογία του (X, d). Ειδικότερα, αν ο X είναι διαχωρίσιμος τότε η τοπολογία του έχει αριθμήσιμη βάση (χρησιμοποιούμε ότι το σύνολο $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο). Ισχύει και το αντίστροφο: κάθε μετρικός χώρος που έχει αριθμήσιμη βάση είναι διαχωρίσιμος.

Μια ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στον (X, d) είναι **Cauchy** ή **βασική** αν για κάθε $r > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, έτσι ώστε για κάθε $n, m \geqslant n_0$ ισχύει $d(x_n, x_m) < r$. Ο μετρικός χώρος (X, d) είναι **πλήρης** αν κάθε ακολουθία Cauchy είναι συγκλίνουσα στον (X, d).

Οι προηγούμενες κατασκευές ισοδύναμων μετρικών $d \mapsto \min\{1, d\}$ και $d \mapsto \dfrac{d}{1+d}$ διατηρούν την πληρότητα. Δηλαδή αν ο (X, d) είναι πλήρης μετρικός χώρος, τότε οι μετρικοί χώροι (X, d) και $\left(X, \dfrac{d}{1+d}\right)$ είναι επίσης πλήρεις (Άσκηση 2.1.10).

Από την άλλη μεριά, η πληρότητα δεν διατηρείται γενικά κάτω από ισοδύναμες μετρικές, και επομένως ούτε κάτω από τοπολογικούς ισομορφισμούς.

Ως παράδειγμα θεωρούμε το σύνολο $X = \{2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ με τις μετρικές

$$\rho(x,y) = |x-y|$$

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, \text{ αν } x \neq y, \\ 0, \text{αν } x = y, \end{cases} \qquad \text{(διακριτή μετρική)}.$$

Τότε κάθε $A \subseteq X$ είναι ρ-ανοικτό όπως επίσης και d-ανοικτό. Ειδικότερα οι δύο μετρικές είναι ισοδύναμες και η ταυτοτική συνάρτηση $\mathrm{id} : (X,\rho) \to (X,d)$ είναι τοπολογικός ισομορφισμός. Επιπλέον ο (X,d) είναι πλήρης μετρικός χώρος. Ωστόσο η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $x_n = 2^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, είναι ρ-Cauchy η οποία όμως δεν συγκλίνει ως προς την ρ σε κάποιο $x \in X$.

Προκύπτει από τα πιο πάνω ότι η πληρότητα δεν επεκτείνεται στους τοπολογικούς χώρους. Συγκεκριμένα *δεν υπάρχει* ιδιότητα τοπολογικών χώρων P έτσι ώστε *για κάθε* μετρική d αν η $\mathcal{T}$ είναι μετρικοποιήσιμη από την d τότε

$$\text{ο } (X,\mathcal{T}) \text{ έχει την } P \iff \text{ο } (X,d) \text{ είναι πλήρης μετρικός χώρος.}$$

Για να το δούμε αυτό παίρνουμε τους μετρικούς χώρους (X,ρ) και (X,d) του προηγούμενου παραδείγματος και βλέπουμε ότι εφόσον οι μετρικές είναι ισοδύναμες τότε παράγουν την ίδια τοπολογία $\mathcal{T}$. Ο ένας μετρικός χώρος όμως είναι πλήρης ενώ ο άλλος όχι.

Όπως είναι γνωστό, οι ιδιότητες της διαχωρισιμότητας και της συμπάγειας διατηρούνται κάτω από τοπολογικούς ισομορφισμούς ή αλλιώς λέμε ότι είναι **τοπολογικές ιδιότητες**.

Τέλος αναφερόμαστε σε κάποιες συγκεκριμένες κατασκευές μετρικών χώρων από ήδη δοσμένους. Το **ευθύ άθροισμα** δύο μετρικών χώρων (X,d_X) και (Y,d_Y) είναι ο μετρικός χώρος (Z,d) με

$$Z = (\{0\} \times X) \bigcup (\{1\} \times Y)$$

$$d((i,x),(j,y)) = \begin{cases} d_X(x,y), \text{ αν } i = j = 0 \\ d_Y(x,y), \text{ αν } i = j = 1 \\ 1, \text{ αν } i \neq j. \end{cases}$$

Με άλλα λόγια, θεωρούμε δύο ξένα αντίτυπα των X, Y και τα τοποθετούμε σε μια θετική απόσταση (π.χ. 1) το ένα από το άλλο. Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι τα $\{0\} \times X$ και $\{1\} \times Y$ είναι ανοικτά και κλειστά υποσύνολα του Z. Θα συμβολίζουμε το ευθύ άθροισμα των (X,d_X) και (Y,d_Y) με $X \oplus Y$ και θα το εννοούμε πάντα με την πιο πάνω μετρική d.

Το **καρτεσιανό γινόμενο** των χώρων (X,d_X) και (Y,d_Y) είναι το σύνολο $X \times Y$ με τη μετρική

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = d_X(x_1,y_1) + d_Y(x_2,y_2).$$

Εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά θα θεωρούμε τον $X \times Y$ με την πιο πάνω μετρική d. Με όμοιο τρόπο ορίζουμε το πεπερασμένο καρτεσιανό γινόμενο $X_1 \times \cdots \times X_n$ μετρικών χώρων. Ειδικότερα στον $\mathbb{R}^n$ θα θεωρούμε τη μετρική

$$d(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|, \quad \text{όπου } \vec{x} = (x_1,\ldots,x_n), \vec{y} = (y_1,\ldots,y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Όπου θεωρούμε την ισοδύναμη Ευκλείδια μετρική θα το αναφέρουμε.

Αν έχουμε μια ακολουθία μετρικών χώρων $((X_n, d_n))_{n\in\mathbb{N}}$ τότε θεωρούμε τον χώρο γινόμενο $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ με τη μετρική

$$d(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cdot \min\{d_n(x(n), y(n)), 1\},$$
$$\text{όπου } x = (x(n))_{n\in\mathbb{N}},\ y = (y(n))_{n\in\mathbb{N}} \in \textstyle\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n.$$

Αν $\mathcal{V}_n$ είναι βάση για την τοπολογία (ενδεχομένως και η ίδια η τοπολογία) του X_n, $n \in \mathbb{N}$, τότε μια βάση για την τοπολογία του $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ είναι η οικογένεια $\mathcal{V}$ όλων των συνόλων της μορφής

$$V_0 \times \cdots \times V_n \times X_{n+1} \times X_{n+2} \times \dots,$$

όπου $V_i \in \mathcal{V}_i$ για κάθε $i = 0, \dots, n$ και $n \in \mathbb{N}$.

Αν $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία στοιχείων του $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ με $x_i = (x_i(n))_{n\in\mathbb{N}}$, $i \in \mathbb{N}$, και $x = (x(n))_n \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ τότε

$$x_i \to x \text{ στον } \textstyle\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n \iff \text{για κάθε } n \text{ ισχύει } x_i(n) \xrightarrow{i\to\infty} x(n) \text{ στον } X_n.$$

Οι προηγούμενες κατασκευές μετρικών χώρων σέβονται την πληρότητα και τη διαχωρισιμότητα. Δηλαδή το *ευθύ άθροισμα, πεπερασμένο και απειροαριθμήσιμο γινόμενο πλήρων και διαχωρίσιμων μετρικών χώρων είναι πλήρης και διαχωρίσιμος μετρικός χώρος*.

Επίσης οι προηγούμενες κατασκευές *επεκτείνονται και στους τοπολογικούς χώρους* με τρόπο που *σέβεται τη μετρικοποιησιμότητα*.

Εξηγούμε το προηγούμενο αναλυτικά. Για το ευθύ άθροισμα δύο τοπολογικών χώρων $(X, \mathcal{T}_X)$ και $(Y, \mathcal{T}_Y)$ παίρνουμε όπως πιο πάνω $X \oplus Y = (\{0\} \times X) \bigcup (\{1\} \times Y)$ και ορίζουμε

$$V \in \mathcal{T}_{X\oplus Y} \iff \{x \in \mathcal{X} \mid (0,x) \in V\} \in \mathcal{T}_X \quad \text{και} \quad \{y \in \mathcal{Y} \mid (1,y) \in V\} \in \mathcal{T}_V.$$

Τότε η οικογένεια $\mathcal{T}_{X\oplus Y}$. Μάλιστα αν οι X, Y είναι μετρικοποιήσιμοι τότε ο $(X \oplus Y, \mathcal{T}_{X\oplus Y})$ είναι μετρικοποιήσιμος με τη μετρική που αναφέραμε πιο πάνω.

Για το καρτεσιανό γινόμενο $X \times Y$ ορίζουμε

$$V \in \mathcal{V}_{X\times Y} \iff V = V_X \times V_Y$$

όπου $V_X \in \mathcal{T}_X$ και $V_Y \in \mathcal{T}_Y$. Θεωρούμε την οικογένεια $\mathcal{T}_{X\times Y}$ που προκύπτει από όλες τις ενώσεις στοιχείων της $\mathcal{V}_{X\times Y}$. Τότε η $\mathcal{T}_{X\times Y}$ είναι τοπολογία στο $X \times Y$ με βάση τη $\mathcal{V}_{X\times Y}$. Αν οι X, Y είναι μετρικοποιήσιμοι, τότε ο $(X \times Y, \mathcal{T}_{X\times Y})$ είναι μετρικοποιήσιμος με τη μετρική που αναφέραμε πιο πάνω.

Το άπειρο γινόμενο ορίζεται όμοια με πριν. Αν έχουμε τοπολογικούς χώρους $(X_n, \mathcal{T}_n)$, $n \in \mathbb{N}$, τότε ορίζουμε τη $\mathcal{V}_\infty$ ως την οικογένεια όλων των συνόλων της μορφής

$$V_0 \times \cdots \times V_n \times X_{n+1} \times X_{n+2} \times \dots, \tag{1.1}$$

όπου $V_i \in \mathcal{T}_i$ για κάθε $i = 0, \dots, n$ και $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε την οικογένεια $\mathcal{T}_\infty$ όλων των ενώσεων από στοιχεία της $\mathcal{V}_\infty$. Τότε η $\mathcal{T}_\infty$ είναι τοπολογία στο σύνολο $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$, γνωστή και ως **τοπολογία γινόμενο**, η οποία έχει βάση την οικογένεια $\mathcal{V}_\infty$. Αν οι X_n, $n \in \mathbb{N}$, είναι μετρικοποιήσιμοι τότε ο $(\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n, \mathcal{T}_\infty)$ είναι μετρικοποιήσιμος με τη μετρική που αναφέραμε πιο πάνω.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Πολωνικοί Χώροι

Σύνοψη:
- Πολωνικοί χώροι, οι χώροι του Baire και Cantor.
- Το Θεώρημα Cantor-Bendixson.
- Δένδρα.
- Καθολικές ιδιότητες Πολωνικών χώρων και τοπολογικοί χαρακτηρισμοί των χώρων του Baire και Cantor.

Προαπαιτούμενη γνώση:
- Θεωρία μετρικών χώρων (πραγματική ανάλυση).
- Στοιχειώδεις γνώσεις τοπολογίας.

2.1. Ορισμός και αρχικά αποτελέσματα

Ξεκινάμε με τις εισαγωγικές έννοιες γύρω από τους Πολωνικούς χώρους [**34, 8, 32**].

Ορισμός 2.1.1. Ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T})$ είναι **Πολωνικός χώρος** αν υπάρχει μετρική d που παράγει την $\mathcal{T}$ και ο (X, d) είναι πλήρης και διαχωρίσιμος μετρικός χώρος.

Μια μετρική d, όπως πιο πάνω, θα λέγεται **συμβατή** ή **κατάλληλη** μετρική για τον $\mathcal{X}$. Συνήθως θα συμβολίζουμε τους Πολωνικούς χώρους με $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, και $\mathcal{Z}$ χωρίς να συμβολίζουμε την τοπολογία, εκτός αν αυτό κρίνεται χρήσιμο.

Μερικά απλά παραδείγματα Πολωνικών χώρων είναι το $\mathbb{R}$ το $\mathbb{C}$ και τα κλειστά υποσύνολά τους, όλα με τη συνήθη τοπολογία. Ένα τετριμμένο αλλά χρήσιμο παράδειγμα Πολωνικού χώρου είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ με τη συνήθη μετρική, η οποία είναι ισοδύναμη με τη διακριτή και κάθε υποσύνολο του $\mathbb{N}$ είναι ανοικτό.

Το ανοικτό διάστημα $(0, 1)$ με τη συνήθη μετρική είναι διαχωρίσιμος αλλά όχι πλήρης μετρικός χώρος. Όπως θα δούμε πιο κάτω, υπάρχει μια ισοδύναμη μετρική ως προς την οποία είναι πλήρες και συνεπώς το $(0, 1)$ είναι Πολωνικός χώρος.

Πρόταση 2.1.2. *Δίνεται ένας Πολωνικός χώρος $\mathcal{X}$ και ένας τοπολογικός χώρος Y. Αν οι $\mathcal{X}$, Y είναι τοπολογικά ισομορφικοί τότε και ο Y είναι Πολωνικός χώρος.*

Απόδειξη. Θεωρούμε μια συμβατή μετρική d για τον $\mathcal{X}$, και έναν τοπολογικό ισομορφισμό $f : (Y, \mathcal{T}_Y) \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow (\mathcal{X}, d)$, όπου $\mathcal{T}_Y$ είναι η τοπολογία του Y. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\rho : Y \times Y \to \mathbb{R}$ με

$$\rho(y_1, y_2) = d(f(y_1), f(y_2)).$$

Εύκολα μπορεί να δει κανείς ότι η ρ είναι μετρική στο Y. Εξ ορισμού η

$$f : (Y, \rho) \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow (\mathcal{X}, d)$$

είναι ισομετρία και επί.

Ειδικότερα οι συναρτήσεις $f : (Y, \rho) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow (\mathcal{X}, d)$ και $f^{-1} : (\mathcal{X}, d) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow (Y, \rho)$ είναι συνεχείς. Προκύπτει επίσης ότι ο (Y, ρ) είναι πλήρης και διαχωρίσιμος μετρικός χώρος (Άσκηση 2.1.11).

Τέλος δείχνουμε ότι η ρ παράγει την τοπολογία του Y. Για κάθε $A \subseteq Y$ που ανήκει στην $\mathcal{T}_Y$ το σύνολο $\left(f^{-1}\right)^{-1}[A] = f[A]$ είναι d-ανοικτό γιατί η $f^{-1} : (\mathcal{X}, d) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ είναι συνεχής. Επομένως το σύνολο $f^{-1}[f[A]] = A$ είναι ρ-ανοικτό γιατί η συνάρτηση $f : (Y, \rho) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow (\mathcal{X}, d)$ είναι συνεχής. Αντίστροφα θεωρούμε ότι το $B \subseteq Y$ είναι ρ-ανοικτό. Επειδή η $f^{-1} : (\mathcal{X}, d) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow (Y, \rho)$ είναι συνεχής το σύνολο $\left(f^{-1}\right)^{-1}[B] = f[B]$ είναι d-ανοικτό και εφόσον η $f : (Y, \mathcal{T}_Y) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow (\mathcal{X}, d)$ είναι συνεχής το $f^{-1}[f[B]] = B$ ανήκει στην $\mathcal{T}_Y$. ▫

Πόρισμα 2.1.3. *Κάθε ανοικτό διάστημα (a, b) με $a < b$ του $\mathbb{R}$ με την τοπολογία που παράγει η συνήθης μετρική της απόστασης είναι Πολωνικός χώρος.*

Απόδειξη. Η συνάρτηση της εφαπτομένης $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathbb{R}$ είναι τοπολογικός ισομορφισμός και από την Πρόταση 2.1.2 το διάστημα $(-\pi/2, \pi/2)$ είναι Πολωνικός χώρος. (Μάλιστα από την απόδειξη της πρότασης μπορούμε να δούμε ότι μια κατάλληλη μετρική είναι η $\rho(x, y) = |\tan x - \tan y|$.)

Το ζητούμενο προκύπτει από το γεγονός ότι όλα τα μη τετριμμένα ανοικτά διαστήματα του $\mathbb{R}$ είναι τοπολογικά ισομορφικά μεταξύ τους. Συγκεκριμένα, αν έχουμε ανοικτά διαστήματα πραγματικών αριθμών $I = (a, b)$ και $J = (c, d)$ με $a < b$ και $c < d$ τότε η συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R} : f(x) = (d-c) \cdot (b-a)^{-1} \cdot (x-a) + c$ είναι τοπολογικός ισομορφισμός μεταξύ του I και του J. ▫

Ορισμός 2.1.4. Έστω X τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Το A είναι F_σ **σύνολο** του X αν υπάρχει ακολουθία $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από κλειστά υποσύνολα του X με $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$.

Επίσης το A είναι G_δ **σύνολο** του X αν υπάρχει ακολουθία $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από ανοικτά υποσύνολα του X με $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$.

Είναι σαφές ότι ένα σύνολο $A \subseteq X$ είναι F_σ ακριβώς όταν το συμπλήρωμά του $X \backslash A$ είναι G_δ. Επιπλέον είναι ξεκάθαρο ότι κάθε κλειστό σύνολο F είναι F_σ καθώς μπορούμε να πάρουμε $F_n = F$, $n \in \mathbb{N}$. Ισοδύναμα κάθε ανοικτό σύνολο είναι G_δ.

Τέλος παρατηρούμε ότι η αριθμήσιμη ένωση F_σ συνόλων είναι επίσης F_σ σύνολο, γιατί αν $A_n = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_n^i$, όπου $n \in \mathbb{N}$ κάθε F_n^i είναι κλειστό, τότε η $\mathcal{A} = \{F_n^i \mid i, n \in \mathbb{N}\}$ είναι αριθμήσιμη οικογένεια κλειστών συνόλων και $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup \mathcal{A}$.

Προκύπτει ότι και η αριθμήσιμη τομή G_δ συνόλων είναι G_δ. Αργότερα θα δούμε ότι ισχύουν οι αντίστοιχες ιδιότητες για τις πεπερασμένες τομές (F_σ συνόλων) ή ενώσεις (G_δ συνόλων).

Ορισμός 2.1.5. Δοσμένου ενός μετρικού χώρου (X, d) και ενός μη κενού $A \subseteq X$ ορίζεται η συνάρτηση της **απόστασης από το σύνολο** A,

$$f : X \to [0, +\infty) : f(x) = d(x, A) = \inf\{d(x, z) \mid z \in A\}. \tag{2.1}$$

Όπως είναι γνωστό, η f είναι συνεχής συνάρτηση, για την ακρίβεια ισχύει

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leqslant d(x, y), \quad x, y \in A.$$

Πρόταση 2.1.6. *Αν ο X είναι μετρικοποιήσιμος τοπολογικός χώρος τότε κάθε κλειστό σύνολό του, εκτός από F_σ, είναι και G_δ.*

Ισοδύναμα κάθε ανοικτό υποσύνολο του X είναι G_δ και F_σ.

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα κλειστό $F \subseteq X$, μια μετρική d που παράγει την τοπολογία του X, και τη συνάρτηση της απόστασης από το F, $f = (x \mapsto d(x, F))$ από το (2.1) πιο πάνω. (Υποθέτουμε ότι $F \neq \emptyset$, αλλιώς το συμπέρασμα είναι προφανές.) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$U_n = \{x \in X \mid d(x, F) < 2^{-n}\}.$$

Τότε $U_n = f^{-1}[(-1, 2^{-n})]$ και αφού η f είναι συνεχής το σύνολο U_n είναι ανοικτό υποσύνολο του X για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Επειδή $d(x, F) = 0$ για κάθε $x \in F$ είναι σαφές ότι $F \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$. Υποθέτουμε ότι $x \in U_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μέσα από το F με $d(x, x_n) < 2^{-n}$ για κάθε n. Επομένως $x_n \to x$ και αφού το F είναι κλειστό έχουμε $x \in F$.

Καταλήγουμε ότι $F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ και άρα το F είναι G_δ σύνολο. ▫

Ορισμός 2.1.7. Αν έχουμε έναν τοπολογικό χώρο $(X, \mathcal{T})$ και G ένα μη κενό υποσύνολο του X τότε μπορούμε να δούμε το G ως τοπολογικό χώρο με τη **σχετική τοπολογία** του X, δηλαδή την τοπολογία $\mathcal{T}_G$ που ορίζεται ως εξής:

$$\mathcal{T}_G = \{V \cap G \mid V \in \mathcal{T}\}.$$

Το ζεύγος $(G, \mathcal{T}_G)$ ονομάζεται **υπόχωρος** του $(X, \mathcal{T})$. Στην περίπτωση που ο $(X, \mathcal{T})$ μετρικοποιείται από την d, τότε ο $(G, \mathcal{T}_G)$ μετρικοποιείται από τον περιορισμό $d|(G \times G)$ της d στο G.

Θεώρημα 2.1.8. *Έστω $\mathcal{X}$ Πολωνικός χώρος και $\emptyset \neq G \subseteq \mathcal{X}$. Τότε το G με τη σχετική τοπολογία του $\mathcal{X}$ είναι Πολωνικός χώρος αν και μόνο αν το G είναι G_δ υποσύνολο του $\mathcal{X}$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά ότι το G είναι Πολωνικός χώρος με τη σχετική τοπολογία του $\mathcal{X}$. Σταθεροποιούμε μια κατάλληλη μετρική d για τον $\mathcal{X}$ και d_G για τον G. (Δεν έχουμε απαραίτητα ότι η d_G είναι ο περιορισμός της d στο G.) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε το σύνολο

$$V_n = \{x \in \mathcal{X} \mid \exists \text{ ανοικτό } U \text{ με } x \in U \text{ και } \forall y, z \in U \cap G \text{ ισχύει } d_G(y, z) < 2^{-n}\}.$$

Ισχυριζόμαστε αρχικά ότι κάθε V_n είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathcal{X}$. Έστω $x \in V_n$, τότε υπάρχει ένα ανοικτό U με $x \in U$ και για κάθε $y, z \in U$ ισχύει $d_G(y, z) < 2^{-n}$. Υπάρχει $r > 0$ με $B_d(x, r) \subseteq U$. Για κάθε $x' \in B_d(x, r)$ το σύνολο $U' = B_d(x, r)$ είναι ανοικτό που περιέχει το x'. Επειδή $U' \subseteq U$ έχουμε επίσης ότι για κάθε $y, z \in U'$ ισχύει $d_G(y, z) < 2^{-n}$. Άρα $x' \in V_n$ για κάθε $x' \in B_d(x, r)$ και το $x \in V_n$ είναι εσωτερικό σημείο του V_n.

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι

$$G = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n \cap \overline{G}. \tag{2.2}$$

Από την πιο πάνω ισότητα και την Πρόταση 2.1.6 (τα κλειστά σύνολα είναι G_δ) προκύπτει ότι το G είναι η τομή δύο G_δ συνόλων και συνεπώς είναι G_δ.

Ξεκινάμε με τον εγκλεισμό $G \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n \cap \overline{G}$. Έστω $x \in G$ και $n \in \mathbb{N}$. Προφανώς $x \in \overline{G}$, δείχνουμε ότι $x \in V_n$. Η μπάλα $B_{d_G}(x, 2^{-(n+1)})$ του G είναι ανοικτό υποσύνολο του G. Επομένως υπάρχει U ανοικτό υποσύνολο του $\mathcal{X}$ με

$$B_{d_G}(x, 2^{-(n+1)}) = U \cap G.$$

Τότε για κάθε $y, z \in U \cap G$ έχουμε $y, z \in B_{d_G}(x, 2^{-(n+1)})$ και συνεπώς

$$d_G(y, z) \leqslant d_G(y, x) + d_G(x, z) < 2^{-(n+1)} + 2^{-(n+1)} = 2^{-n}.$$

Άρα $x \in V_n$.

Αντίστροφα, έστω $x \in \overline{G}$ με $x \in V_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε υπάρχει ακολουθία ανοικτών συνόλων $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $x \in U_n$ και έτσι ώστε $y, z \in U \cap G$ ισχύει $d_G(y, z) < 2^{-n}$.

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η ακολουθία $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα, αλλιώς αντικαθιστούμε κάθε U_n με την τομή $\bigcap_{k=0}^{n} U_k$.

Αφού $x \in \overline{G} \cap U_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από το G με $y_n \in U_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $d(y_n, x) \to 0$. Για κάθε $n \geqslant m$ έχουμε $y_n \in U_n \subseteq U_m$ και αφού $y_m \in U_m$ ισχύει $d_G(y_n, y_m) < 2^{-m}$. Αυτό δείχνει ότι η $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι d_G-Cauchy και αφού ο (G, d_G) είναι πλήρης υπάρχει $y \in G$ με $d_G(y_n, y) \to 0$.

Από την άλλη η τοπολογία του (G, d_G) είναι η ίδια με τη σχετική τοπολογία του G που παίρνει από τον $\mathcal{X}$. Προκύπτει ότι $d(y_n, y) \to 0$ και αφού $d(y_n, x) \to 0$ έχουμε $x = y \in G$. Έτσι έχουμε και τον άλλο εγκλεισμό της (2.2) και αποδείξαμε τη μία κατεύθυνση του θεωρήματος.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση υποθέτουμε ότι το G είναι η τομή μιας ακολουθίας ανοικτών συνόλων $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και θέτουμε $F_n = \mathcal{X} \backslash U_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε κάθε F_n είναι κλειστό σύνολο.

Θεωρούμε d μια κατάλληλη μετρική στον $\mathcal{X}$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τη συνάρτηση $(x \mapsto d(x, F_n))$ της απόστασης του x από το F_n, όπως στο (2.1). Ορίζουμε

$$d_G(x, y) = d(x, y) + \sum_{n=0}^{\infty} \min\left\{2^{-n}, \left|d(x, F_n)^{-1} - d(y, F_n)^{-1}\right|\right\}$$

όπου $x, y \in G$. Παρατηρούμε ότι αν $x \in G$ τότε $x \in U_n$ και άρα $x \notin F_n$ για κάθε n. Επομένως $d(x, F_n) > 0$ και άρα ορίζεται ο αντίστροφος αριθμός $d(x, F_n)^{-1} > 0$.

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η d_G είναι μετρική στο G. Δείχνουμε ότι η d_G παράγει τη σχετική τοπολογία στο G. Ισοδύναμα δείχνουμε ότι η μετρική d_G και ο περιορισμός $d|(G \times G)$ της d στο $G \times G$ είναι ισοδύναμες μετρικές. Θεωρούμε μια ακολουθία $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ στο G και $y \in G$. Δείχνουμε ότι

$$y_i \xrightarrow{d_G} y \iff y_i \xrightarrow{d} y. \tag{2.3}$$

Η ευθεία κατεύθυνση είναι σαφής επειδή $d \leqslant d_G$ στο $G \times G$. Αντίστροφα υποθέτουμε ότι $d(y_i, y) \to 0$ και έστω $r > 0$. Τότε υπάρχει i_0 έτσι ώστε για κάθε $i \geqslant i_0$ ισχύει

$$d(y_i, y) < r/3. \tag{2.4}$$

Η ιδέα είναι να χωρίσουμε το άπειρο άθροισμα στον ορισμό της d_G σε δύο μέρη, όπου το κάθε ένα είναι μικρότερο του $r/3$. Για κάθε $n_0 \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \min\left\{2^{-n}, \left|d(z, F_n)^{-1} - d(w, F_n)^{-1}\right|\right\} \leqslant \sum_{n=n_0+1}^{\infty} 2^{-n} = 2^{n_0}$$

όπου $z, w \in G$. Οπότε λαμβάνοντας αρκετά μεγάλο $n_0 \in \mathbb{N}$ έχουμε για κάθε $z, w \in G$,

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \min\left\{2^{-n}, \left|d(z, F_n)^{-1} - d(w, F_n)^{-1}\right|\right\} < r/3. \tag{2.5}$$

Για κάθε $k \leqslant n_0$ ισχύει $d(y_i, F_k) \to d(y, F_k)$ επειδή η συνάρτηση της απόστασης σημείου από σύνολο είναι συνεχής. Αφού τα y_i, y ανήκουν στο G, όπως αναφέραμε πιο πάνω, έχουμε $d(y_i, F_k)$, $d(y, F_k) > 0$. Άρα $d(y_i, F_k)^{-1} \to d(y, F_k)^{-1}$.

Επομένως υπάρχει i_1, έτσι ώστε για κάθε $i \geqslant i_1$ και κάθε $k = 0, \ldots, n_0$ ισχύει

$$\left|d(y_i, F_k)^{-1} - d(y_i, F_k)^{-1}\right| < \min\{2^{-n},\ r/3 \cdot (n_0 + 1)^{-1}\}.$$

Άρα

$$\sum_{n=0}^{n_0} \min\left\{2^{-n}, \left|d(y_i,F_k)^{-1} - d(y,F_k)^{-1}\right|\right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{n_0} \left|d(y_i,F_k)^{-1} - d(y,F_k)^{-1}\right|$$

$$< \sum_{n=0}^{n_0} r/3 \cdot (n_0+1)^{-1} = r/3. \tag{2.6}$$

Από τις (2.4), (2.5), (2.6) και τον ορισμό της d_G έχουμε για κάθε $i \geqslant \max\{i_0, i_1\}$ ότι $d_G(y_i, y) < r$. Συνεπώς $y_i \overset{d_G}{\to} y$ και οι μετρικές είναι ισοδύναμες.

Αφού η τοπολογία του (G, d_G) είναι η σχετική τοπολογία στο G και ο $\mathcal{X}$ είναι διαχωρίσιμος, είναι σαφές ότι ο μετρικός χώρος (G, d_G) είναι διαχωρίσιμος (υπόχωρος διαχωρίσιμου *μετρικού* χώρου είναι διαχωρίσιμος).

Τέλος δείχνουμε ότι ο (G, d_G) είναι πλήρης. Έστω $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d_G-Cauchy ακολουθία στον G. Εφόσον $d \leqslant d_G$ στο $G \times G$, η $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ είναι και d-Cauchy. Αφού ο $(\mathcal{X}, d)$ είναι πλήρης, υπάρχει $y \in \overline{G}$ με $y_i \overset{d}{\to} y$. Δείχνουμε ότι $y \in G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ και ότι $y_i \overset{d_G}{\to} y$.

Έστω $n \in \mathbb{N}$, τότε $d(y_i, F_n) \overset{i}{\to} d(y, F_n)$. Αν είχαμε $y \in F_n$ θα ίσχυε $d(y, F_n) = 0$ και άρα

$$d(y_i, F_n) \xrightarrow{i} 0.$$

Επομένως $d(y_i, F_n)^{-1} \xrightarrow{i} +\infty$. Ειδικότερα για κάθε $i \in \mathbb{N}$ θα υπήρχαν $j, s \geqslant i$ με

$$|d(y_j, F_n)^{-1} - d(y_s, F_n)^{-1}| > 2^{-n}$$

και

$$d_G(y_j, y_s) \geqslant \min\left\{2^{-n}, \left|d(y_j,F_n)^{-1} - d(y_s,F_n)^{-1}\right|\right\} = 2^{-n}.$$

Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί η $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ είναι d_G-Cauchy. Επομένως $y \notin F_n = \mathcal{X} \backslash U_n$, δηλαδή $y \in U_n$. Επειδή το n είναι τυχαίο καταλήγουμε $y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = G$.

Αφού$y_i \overset{d}{\to} y$ και $y_i, y \in G$, $i \in \mathbb{N}$, προκύπτει από την (2.3) ότι $y_i \overset{d_G}{\to} y$ και ο (G, d_G) είναι πλήρης. □

Το προηγούμενο θεώρημα δίνει μια δεύτερη απόδειξη ότι κάθε ανοικτό διάστημα του $\mathbb{R}$ είναι Πολωνικός χώρος καθώς ως ανοικτό σύνολο είναι G_δ.

Πόρισμα 2.1.9. *Οι άρρητοι αριθμοί $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι Πολωνικός χώρος, ενώ οι ρητοί αριθμοί $\mathbb{Q}$ δεν είναι Πολωνικός χώρος με την σχετική τοπολογία του $\mathbb{R}$.*

Απόδειξη. Το σύνολο $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι G_δ υποσύνολο του $\mathbb{R}$, ενώ το $\mathbb{Q}$ δεν είναι G_δ (γνωστή εφαρμογή του Θεωρήματος του Baire). Το ζητούμενο προκύπτει από το Θεώρημα 2.1.8. □

Ασκήσεις

Άσκηση 2.1.10. Για κάθε μετρικό χώρο (X, d) οι συναρτήσεις

$$\rho = \min\{d, 1\} \quad \text{και} \quad \sigma = \frac{d}{1+d}$$

είναι μετρικές, οι οποίες είναι ισοδύναμες με την d και αν ο (X, d) είναι πλήρης και διαχωρίσιμος, τότε οι χώροι (X, ρ) και (X, σ) είναι επίσης πλήρεις και διαχωρίσιμοι.

Συμπεράνετε ότι κάθε Πολωνικός χώρος επιδέχεται συμβατή μετρική $d \leqslant 1$.

Άσκηση 2.1.11. Δίνονται δύο μετρικοί χώροι (X,d) και (Y,ρ) και

$$f:(Y,\rho)\twoheadrightarrow(X,d)$$

επιμορφισμός. Αν η f είναι ισομετρία, δηλαδή αν ικανοποιεί

$$\rho(y_1,y_2)=d(f(y_1),f(y_2)),\quad y_1,y_2\in Y,$$

τότε η f είναι τοπολογικός ισομορφισμός. Μάλιστα, αν ο (X,d) είναι πλήρης τότε και ο (Y,ρ) είναι πλήρης.

Άσκηση 2.1.12. Για κάθε $a<b$ το σύνολο $C([a,b])$ όλων των συνεχών συναρτήσεων από το $[a,b]$ στο $\mathbb{R}$ με την τοπολογία της νόρμας άπειρο,

$$\|f\|_\infty=\max\{|f(x)|\mid x\in[a,b]\}$$

όπου $f\in C([a,b])$, είναι Πολωνικός χώρος.

Άσκηση 2.1.13. Οι ακολουθιακοί χώροι ℓ^p με $1\leqslant p<\infty$ με την τοπολογία της p-νόρμας $\|\cdot\|_p$ είναι Πολωνικοί χώροι.

Άσκηση 2.1.14. Αν οι (X,d) και (Y,ρ) είναι πλήρεις και διαχωρίσιμοι μετρικοί χώροι, τότε οι $X\oplus Y$ και $X\times Y$ με τις μετρικές που αναφέραμε στην Εισαγωγή είναι επίσης πλήρεις και διαχωρίσιμοι μετρικοί χώροι.

Συμπεράνετε ότι το ευθύ άθροισμα και το πεπερασμένο γινόμενο Πολωνικών χώρων είναι Πολωνικός χώρος.

Άσκηση 2.1.15. Αν $(X_n,d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία πλήρων και διαχωρίσιμων μετρικών χώρων, τότε ο $\prod_{n\in\mathbb{N}}X_n$ με τη μετρική που αναφέραμε στην Εισαγωγή είναι επίσης πλήρης και διαχωρίσιμος.

Συμπεράνετε ότι το άπειρο αριθμήσιμο γινόμενο Πολωνικών χώρων είναι επίσης Πολωνικός χώρος.

Άσκηση 2.1.16. Οι χώροι $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$ με την τοπολογία της συνήθους Ευκλείδιας μετρικής και ο $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ με την τοπολογία γινόμενο είναι Πολωνικοί χώροι.

Άσκηση 2.1.17. Για κάθε μετρικό χώρο (X,d) και κάθε μη κενό σύνολο $A\subseteq X$ ισχύει η (2.1),

$$|d(x,A)-d(y,A)|\leqslant d(x,y)$$

για κάθε $x,y\in A$.

Άσκηση 2.1.18. Το σύνολο όλων των σημείων συνέχειας μιας συνάρτησης

$$f:(X,d)\to(Y,\rho)$$

είναι G_δ σύνολο.

Άσκηση 2.1.19. Τα σύνολα $(0,1]$ και $[0,1)\cup\{3\}$ με τη σχετική τοπολογία του $\mathbb{R}$ είναι Πολωνικοί χώροι.

Το $\mathbb{Q}\times(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\subseteq\mathbb{R}^2$ δεν είναι Πολωνικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$.

2.2. Πεπερασμένες ακολουθίες

Θεωρούμε ένα μη κενό σύνολο X. Με τον όρο **πεπερασμένη ακολουθία** στο X εννοούμε μια συνάρτηση $u:\{i\in\mathbb{N}\mid i<n\}\to X$, όπου $n\in\mathbb{N}$. Συμβολίζουμε μια τέτοια u με $(u(0),\dots,u(n-1))$. Συμπεριλαμβάνουμε στις πεπερασμένες ακολουθίες και την **κενή ακολουθία**, την οποία συμβολίζουμε με Λ. Αυτή προκύπτει από τον προηγούμενο ορισμό για $n=0$ όπου το πεδίο ορισμού $\{i\in\mathbb{N}\mid i<0\}$ της u είναι το κενό σύνολο.

Συμβολίζουμε με $X^{<\mathbb{N}}$ το σύνολο όλων των πεπερασμένων ακολουθιών στο X. Είναι σαφές ότι το προηγούμενο n στον ορισμό της πεπερασμένης ακολουθίας είναι μοναδικό. Το **μήκος** μιας πεπερασμένης ακολουθίας $u : \{i \in \mathbb{N} \mid i < n\} \to X$ είναι ακριβώς αυτό το μοναδικό n και συμβολίζεται με $|u|$. Έτσι έχουμε

$$|u| = 0 \iff u = \Lambda \quad \text{και}$$
$$u = (u(0), \dots, u(|u|-1)), \quad \text{για κάθε } u \in X^{<\mathbb{N}}.$$

Για παράδειγμα, έχουμε τις πεπερασμένες ακολουθίες $u = (a, b, c)$ και $v = (d, e)$ στο σύνολο $\{a, b, c, d, e\}$ μήκους 3 και 2 αντίστοιχα.

Αν έχουμε $x \in X$ και $n \in \mathbb{N}$, με $(x)^n$ εννοούμε την πεπερασμένη ακολουθία u μήκους n που είναι σταθερή στο x, δηλαδή την $u : \{i \in \mathbb{N} \mid i < n\} \to X : u(i) = x$. Όπως πριν με $n = 0$ έχουμε την κενή ακολουθία.

Η **παράθεση** (concatenation) της $u \in X^{<\mathbb{N}}$ με την $v \in X^{<\mathbb{N}}$ είναι η ακολουθία

$$u * v = (u(0), \dots, u(|u|-1), v(0), \dots, v(|v|-1)).$$

Για παράδειγμα, αν $u = (a, b, c)$ και $v = (d, e)$ τότε

$$u * v = (a, b, c, d, e) \quad \text{και} \quad v * u = (d, e, a, b, c).$$

Είναι σαφές ότι $u * \Lambda = \Lambda * u = u$ για κάθε $u \in X^{<\mathbb{N}}$.

Στο σύνολο $X^{<\mathbb{N}}$ ορίζουμε τη διμελή σχέση $\sqsubseteq$ ως εξής:

$$u \sqsubseteq v \iff |u| \leqslant |v| \text{ και } \forall i < |u| \ (u(i) = v(i)).$$

Για παράδειγμα, $(a, b) \sqsubseteq (a, b, c)$ και $(a, b) \not\sqsubseteq (a, c, c)$ για $b \neq c$. Επίσης $\Lambda \sqsubseteq u$ για κάθε $u \in X^{<\mathbb{N}}$ (καθολικός ποσοδείκτης με κενό πεδίο).

Είναι σαφές ότι η σχέση $\sqsubseteq$ ικανοποιεί τις τρεις **ιδιότητες της διάταξης**,

$$\begin{aligned} &u \ \sqsubseteq u \\ &(u \sqsubseteq v \ \ \& \ v \sqsubseteq u) \ \longrightarrow \ u = v \\ &(u \sqsubseteq v \ \ \& \ v \sqsubseteq w) \ \longrightarrow \ u \sqsubseteq v \end{aligned}$$

για κάθε $u, v, w \in X^{<\mathbb{N}}$. Το **αυστηρό μέρος** της $\sqsubseteq$ είναι η σχέση $\sqsubsetneq$ με

$$u \sqsubsetneq v \iff u \sqsubseteq v \ \& \ u \neq v.$$

Για παράδειγμα $(a, b) \sqsubsetneq (a, b, c)$. Είναι σαφές ότι $u \sqsubsetneq v$ αν και μόνο αν $u \sqsubseteq v$ και $|u| < |v|$. Θα λέμε ότι η $u \in X^{<\mathbb{N}}$ είναι **αρχικό τμήμα** της $v \in X^{<\mathbb{N}}$ ή ότι η v είναι **επέκταση** της u αν $u \sqsubseteq v$. Θα λέμε επίσης ότι η u είναι **γνήσιο αρχικό τμήμα** της v ή ότι η v είναι **γνήσια επέκταση** της u αν $u \sqsubsetneq v$. Το v είναι **άμεση επέκταση της** u αν $v = u * (x)$ για κάποιο $x \in X$.

Δύο πεπερασμένες ακολουθίες u, v λέγονται **συμβατές**, συμβολικά $u||v$ αν $u \sqsubseteq v$ ή $v \sqsubseteq u$. Για παράδειγμα, $(a, e, b)||(a, e)$ και $\neg((d, a)||(d, b, c))$ για $a \neq b$. Οι μη συμβατές πεπερασμένες ακολουθίες λέγονται επίσης **ασύμβατες**. Θα συμβολίζουμε $u \perp v$ όταν οι u, v είναι ασύμβατες, έτσι που $u \perp v \iff \neg(u||v)$.

Θα επικεντρωθούμε στην περίπτωση όπου $X = \mathbb{N}$. Το σύνολο $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ είναι αριθμήσιμο σύνολο. Για να το δούμε αυτό, θεωρούμε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το σύνολο A_n όλων των πεπερασμένων ακολουθιών από φυσικούς αριθμούς με μήκος n. Για παράδειγμα, $A_0 = \{\Lambda\}$, $A_1 = \{(i) \mid i \in \mathbb{N}\}$ κ.ο.κ. Τότε

$$\mathbb{N}^{<\mathbb{N}} = \textstyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Είναι σαφές ότι υπάρχει αντιστοιχία ανάμεσα στο A_n και στο πεπερασμένο γινόμενο $\mathbb{N}^n$ για κάθε $n \geqslant 1$. Τότε κάθε A_n είναι αριθμήσιμο και επομένως και το $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ είναι αριθμήσιμο σύνολο.

Είναι χρήσιμο να απομονώσουμε μια συγκεκριμένη απαρίθμηση του $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. Αρχικά θεωρούμε την αύξουσα απαρίθμηση των *πρώτων αριθμών*

$$\mathrm{p}_0 < \mathrm{p}_1 < \mathrm{p}_2 < \cdots < \mathrm{p}_n < \dots,$$

δηλαδή $\mathsf{p}_0 = 2$, $\mathsf{p}_1 = 3$, $\mathsf{p}_2 = 5$, $\mathsf{p}_3 = 7$, $\mathsf{p}_4 = 11$, κ.ο.κ. Ορίζουμε τη **συνάρτηση κωδικοποίησης**

$$(2.7) \qquad \langle \cdot \rangle : \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \to \mathbb{N} : u = (u(0), \dots, u(n-1)) \mapsto \langle u(0), \dots, u(n-1) \rangle$$

με τον εξής τρόπο:

$$\langle u(0), \dots, u(n-1) \rangle = \begin{cases} \mathsf{p}_0^{u(0)+1} \cdot \dots \cdot \mathsf{p}_{n-1}^{u(n-1)+1}, & \text{αν } n \geqslant 1 \\ 1, & \text{αν } n = 0. \end{cases}$$

Για παράδειγμα

$$\langle 4, 0, 1 \rangle = 2^{4+1} \cdot 3^{0+1} \cdot 5^{1+1} = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^2 = 32 \cdot 3 \cdot 25 = 2400.$$

Αντίστροφα, αν πάρουμε τον αριθμό 120 τότε μπορούμε να τον φέρουμε στη μορφή $2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1$ και επομένως βλέπουμε ότι $120 = \langle 2, 0, 0 \rangle$.

Είναι σημαντικό να προσθέτουμε τη μονάδα στους εκθέτες των δυνάμεων γιατί έτσι μπορούμε να ανακτήσουμε την αρχική ακολουθία. Αλλιώς δεν θα είχαμε τρόπο να γνωρίζουμε αν ο αριθμός $2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^0 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^0 \cdot 11^0$ αντιστοιχεί στο $(3, 1, 1)$ ή στο $(3, 1, 1, 0)$ ή στο $(3, 1, 1, 0, 0)$ κ.τ.λ.

Για την ακρίβεια από το Θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμητικής (μοναδικότητα γραφής ως γινόμενο πρώτων) η συνάρτηση $\langle \cdot \rangle$ είναι ένα-προς-ένα (Άσκηση 2.2.1). Από την άλλη, η $\langle \cdot \rangle$ δεν είναι επιμορφισμός. Για παράδειγμα, δεν παίρνει την τιμή 0. Μάλιστα επειδή $\mathsf{p}_0^{k+1} = 2^{k+1} = 2 \cdot 2^k$ βλέπουμε ότι πέραν της μονάδας η $\langle \cdot \rangle$ παίρνει μόνο άρτιες τιμές, δηλαδή ο αριθμός $\langle u(0), \dots, u(n-1) \rangle$ είναι άρτιος ακριβώς όταν η ακολουθία $u = (u(0), \dots, u(n-1))$ δεν είναι η κενή ακολουθία.

Συμβολίζουμε με $\mathtt{Seq}$ το σύνολο όλων των τιμών της $\langle \cdot \rangle$,

$$\mathtt{Seq} = \{ s \in \mathbb{N} \mid \exists u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \; s = \langle u(0), \dots, u(n-1) \rangle \}.$$

Αν $s = \langle u(0), \dots, u(n-1) \rangle$, θα λέμε ότι το s είναι **κωδικός** της u.

Ορίζουμε τη **φυσική απαρίθμηση** $(\mathsf{u}_s)_{s \in \mathbb{N}}$ του $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ ως προς την κωδικοποίηση $\langle \cdot \rangle$ ως εξής:

$$\mathsf{u}_s = \begin{cases} (k_0, \dots, k_{n-1}), & \text{αν } s = \langle k_0, \dots, k_{n-1} \rangle \in \mathtt{Seq}, \\ \Lambda, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Για παράδειγμα, $(3, 0, 1) = \mathsf{u}_{\langle 3,0,1 \rangle} = \mathsf{u}_{2^4 \cdot 3 \cdot 5^2}$. Επίσης, $\Lambda = \mathsf{u}_1$ γιατί το 1 είναι κωδικός της Λ και $\Lambda = \mathsf{u}_5$, γιατί όπως εξηγήσαμε πιο πάνω, $5 \notin \mathtt{Seq}$.

Για κάθε $s = \langle k_0, \dots, k_{n-1} \rangle$ και κάθε $i < n$ ορίζουμε

$$(s)_i = k_i.$$

Με άλλα λόγια, το $(s)_i$ είναι ο μοναδικός φυσικός αριθμός k για τον οποίο υπάρχουν $k_0, \dots, k_{i-1}$ και $k_{i+1}, \dots, k_{n-1}$ για κάποιο $n \geqslant 1$, έτσι ώστε

$$s = \langle k_0, \dots, k_{i-1}, k, k_{i+1}, \dots, k_{n-1} \rangle,$$

εφόσον φυσικά υπάρχει τέτοιος k. Επεκτείνουμε τον ορισμό $(s)_i$ και στις περιπτώσεις όπου $s = \langle k_0, \dots, k_{n-1} \rangle \in \mathtt{Seq}$ και $i \geqslant n$ ή $s \notin \mathtt{Seq}$ θέτοντας τότε $(s)_i = 0$.

Έχουμε λοιπόν

$$(s)_i = \begin{cases} k, & \text{αν υπάρχουν } k_0, \dots, k_{i-1}, k_i, \dots, k_{n-1} \text{ για κάποιο } n > i \\ & \text{με } s = \langle k_0, \dots, k_{i-1}, k, k_{i+1}, \dots, k_{n-1} \rangle, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Για παράδειγμα $(2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^4 \cdot 7^2)_2 = (\langle 2, 0, 3, 1\rangle)_2 = 3$. Ακόμα $(\langle 2, 0, 3, 1\rangle)_{42} = 0$ γιατί $42 > |2, 0, 3, 1| = 4$ και $(5)_{42} = 0$ γιατί $5 \notin \texttt{Seq}$.

Με τη βοήθεια των πιο πάνω συναρτήσεων μπορούμε να εκφράσουμε προτάσεις που αναφέρονται σε πεπερασμένες ακολουθίες φυσικών αριθμών *οσοδήποτε μεγάλου μήκους* σε προτάσεις με ποσοδείκτες που αναφέρονται σε φυσικούς αριθμούς. Για παράδειγμα, αν $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ τότε η πρόταση

«για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το σύνολο P_n περιέχει τουλάχιστον n διαφορετικά στοιχεία»

είναι ισοδύναμη με την

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists s \in \mathbb{N}\ \forall i, j < n\ (\ (s)_i \in P_n\ \&\ (i \neq j \longrightarrow (s)_i \neq (s)_j)\ ),$$

η οποία εκφράζεται προφανώς μόνο με ποσοδείκτες πάνω στους φυσικούς αριθμούς.

Τέλος, αναφέρουμε ότι θα **θεωρούμε το σύνολο** $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ **με την τοπολογία που παράγεται από τη διακριτή μετρική** όπου κάθε υποσύνολο του $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ είναι ανοικτό. Εφόσον το $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ είναι αριθμήσιμο σύνολο, προκύπτει ότι είναι Πολωνικός χώρος.

Ασκήσεις

Άσκηση 2.2.1. Η συνάρτηση

$$\langle\ \cdot\ \rangle : \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \to \mathbb{N} : u = (u(0), \dots, u(n-1)) \mapsto \langle u(0), \dots, u(n-1)\rangle$$

είναι μονομορφισμός.

Άσκηση 2.2.2. Βρείτε έναν άρτιο αριθμό που δεν λαμβάνεται ως τιμή της συνάρτησης $\langle\ \cdot\ \rangle$.

Άσκηση 2.2.3. Θεωρούμε ένα $Q \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Εκφράστε με τη βοήθεια ποσοδεικτών στο $\mathbb{N}$ την πρόταση

«για κάθε n υπάρχουν $k_1, \dots, k_{2n} \in \mathbb{N}$ διαφορετικά ανά δύο
με $(n, \langle n, k_i\rangle) \in Q$, για κάθε $i = 0, \dots, 2n$.»

2.3. Οι χώροι του Baire και Cantor

Ορισμός 2.3.1 (Ο χώρος του Baire). Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ όλων των συναρτήσεων από το $\mathbb{N}$ στο $\mathbb{N}$ (άπειρες ακολουθίες). Συμβολίζουμε τα στοιχεία του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ με τα μικρά ελληνικά γράμματα $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ και το σύνολο $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ με $\mathcal{N}$. Επίσης θα γράφουμε ένα $\alpha \in \mathcal{N}$ ως «άπειρο διάνυσμα» $\alpha = (\alpha(0), \alpha(1), \dots, \alpha(n), \dots)$.

Για $\alpha, \beta \in \mathcal{N}$ με $\alpha \neq \beta$ θέτουμε

$$n(\alpha, \beta) = \text{ο ελάχιστος } n \in \mathbb{N} \text{ με } \alpha(n) \neq \beta(n).$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση $d_{\mathcal{N}} : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \to \mathbb{R}$,

$$d_{\mathcal{N}}(\alpha, \beta) = \begin{cases} 2^{-n(\alpha,\beta)}, & \text{αν } \alpha \neq \beta \\ 0, & \text{αν } \alpha = \beta. \end{cases}$$

Τότε η συνάρτηση $d_{\mathcal{N}}$ είναι μετρική στο $\mathcal{N}$ (Άσκηση 2.3.14). Ο μετρικός χώρος $(\mathcal{N}, d_{\mathcal{N}})$ ονομάζεται **ο χώρος του Baire**.

Θα καλούμε επίσης χώρο του Baire τον *τοπολογικό χώρο* που προκύπτει από τη μετρική $d_{\mathcal{N}}$.

Για παράδειγμα, αν $\alpha = (5, 6, 7, 1, 1, 1, \dots, 1, \dots,)$, $\beta = (5, 6, 1, 1, 1, \dots, 1, \dots)$ και $\gamma = (3, 6, 7, 1, 1, 1, \dots, 1, \dots)$ τότε $n(\alpha, \beta) = 2$ και $n(\alpha, \gamma) = n(\beta, \gamma) = 0$, οπότε $d_{\mathcal{N}}(\alpha, \beta) = 2^{-2}$ και $d_{\mathcal{N}}(\alpha, \gamma) = d_{\mathcal{N}}(\beta, \gamma) = 2^0 = 1$.

Ορισμός 2.3.2 (Περαιτέρω Συμβολισμοί).

Επεκτείνουμε τους ορισμούς των $*$ και $\sqsubseteq$ ανάμεσα σε πεπερασμένες και άπειρες ακολουθίες με τον προφανή τρόπο,

$$u * \alpha = (u(0), \dots, u(|u| - 1), \alpha(0), \dots, \alpha(n), \dots)$$
$$u \sqsubseteq \alpha \iff \forall i < |u| \; u(i) = \alpha(i),$$

όπου $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ και $\alpha \in \mathcal{N}$.

Για κάθε $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ ορίζουμε τη **βασική περιοχή** του χώρου του Baire,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_u &= \{\alpha \in \mathcal{N} \mid u \sqsubseteq \alpha\} \\ &= \{u(0)\} \times \cdots \times \{u(|u|-1)\} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \dots . \end{aligned} \tag{2.8}$$

Θα δούμε ότι κάθε $\mathcal{N}_u$ είναι ανοικτό και κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{N}$ (Λήμμα 2.3.3 και Άσκηση 2.3.16).

Δοσμένων $\alpha \in \mathcal{N}$ και $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$\alpha^* = (\alpha(1), \dots, \alpha(n), \dots) \in \mathcal{N} \tag{2.9}$$

$$\alpha|n = (\alpha(0), \dots, \alpha(n-1)) \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \tag{2.10}$$

$$\overline{\alpha(n)} = \langle \alpha(0), \dots, \alpha(n-1) \rangle \in \mathbb{N} \tag{2.11}$$

$$(\alpha)_n = (\alpha(\langle n, 0\rangle), \alpha(\langle n, 1\rangle), \dots, \alpha(\langle n, t\rangle), \dots) \in \mathcal{N}. \tag{2.12}$$

Μάλιστα, οι πιο πάνω πράξεις ορίζουν συνεχείς συναρτήσεις (Άσκηση 2.3.18).

Για παράδειγμα, αν $u = (3, 4, 5)$ και $\alpha = (7, 8, 9, 10, \dots) = (n \mapsto n + 7)$, τότε

$$\begin{aligned} u * \alpha &= (3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, \dots) \\ (7, 8) &\sqsubseteq \alpha \\ \mathcal{N}_u &= \{\beta \in \mathcal{N} \mid \beta(0) = 3 \; \&\beta(1) = 4 \; \& \; \beta(2) = 5\} \\ \alpha^* &= (8, 9, 10, \dots) \\ \alpha|4 &= (\alpha(0), \alpha(1), \alpha(2), \alpha(3)) = (7, 8, 9, 10) \\ \overline{\alpha(3)} &= \langle 7, 8, 9\rangle \\ (\alpha)_3 &= (\alpha(\langle 3, 0\rangle), \alpha(\langle 3, 1\rangle), \dots, \alpha(\langle 3, t\rangle), \dots) \\ &= (\alpha(2^4 \cdot 3), \alpha(2^4 \cdot 3^2), \dots, \alpha(2^4 \cdot 3^{t+1}), \dots) \\ &= (2^4 \cdot 3 + 7, 2^4 \cdot 3^2 + 7, \dots, 2^4 \cdot 3^{t+1} + 7, \dots). \end{aligned}$$

Είναι σαφές ότι $\Lambda \sqsubseteq \alpha$, $\alpha|0 = \Lambda$ και

$$u \sqsubseteq \alpha \iff \alpha|n = u, \quad \text{όπου } n = |u|$$

για κάθε $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ και $\alpha \in \mathcal{N}$.

Το επόμενο λήμμα συνδέει τις ανοικτές μπάλες του $(\mathcal{N}, d_{\mathcal{N}})$ με τα σύνολα $\mathcal{N}_u$, $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$.

Λήμμα 2.3.3. *Θεωρούμε $r > 0$ και n τον ελάχιστο φυσικό αριθμό με $2^{-n} < r$. Τότε για κάθε $\alpha, \beta \in \mathcal{N}$ ισχύει*

$$d_{\mathcal{N}}(\alpha, \beta) < r \iff \forall i < n \; \alpha(i) = \beta(i).$$

Συνεπώς κάθε ανοικτή μπάλα $B_{d_{\mathcal{N}}}(\alpha, r)$ ισούται με το σύνολο $\mathcal{N}_{\alpha|n}$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, και κάθε σύνολο $\mathcal{N}_u$ όπου $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, ισούται με την ανοικτή μπάλα $B_{d_{\mathcal{N}}}(u * (0, 0, \dots,), 2^{-(|u|-1)})$.

Απόδειξη. Θεωρούμε r και n όπως στην εκφώνηση και $\alpha, \beta \in \mathcal{N}$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\alpha \neq \beta$ αλλιώς η ζητούμενη ισοδυναμία είναι προφανής.

Αν $d_{\mathcal{N}}(\alpha,\beta) < r$ τότε $2^{-n(\alpha,\beta)} < r$. Αν είχαμε $n(\alpha,\beta) < n$ τότε $2^{-n} < 2^{-n(\alpha,\beta)} < r$ και τότε ο n δεν θα ήταν ο ελάχιστος φυσικός με την ιδιότητα $2^{-n} < r$. Άρα $n \leqslant n(\alpha,\beta)$ και για κάθε $i < n$ ισχύει $i < n(\alpha,\beta)$, επομένως $\alpha(i) = \beta(i)$.

Αντίστροφα, αν για κάθε $i < n$ ισχύει $\alpha(i) = \beta(i)$, τότε $n \leqslant n(\alpha,\beta)$ και $d_{\mathcal{N}}(\alpha,\beta) = 2^{-n(\alpha,\beta)} \leqslant 2^{-n} < r$. Αυτό δείχνει τη ζητούμενη ισοδυναμία.

Ο ισχυρισμός για τις ανοικτές μπάλες είναι άμεσος από τα προηγούμενα: Αν $r > 0$ και n είναι ο ελάχιστος φυσικός με $2^{-n} < r$, τότε από πιο πάνω έχουμε

$$\begin{aligned} \beta \in B_{d_{\mathcal{N}}}(\alpha,r) &\iff \beta|n = \alpha|n \\ &\iff \alpha|n \sqsubseteq \beta \\ &\iff \beta \in \mathcal{N}_{\alpha|n} \end{aligned}$$

για κάθε $\beta \in \mathcal{N}$. Άρα $B_{d_{\mathcal{N}}}(\alpha,r) = \mathcal{N}_{\alpha|n}$.

Επιπλέον, για κάθε $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ παίρνουμε $r_u = 2^{-(|u|-1)}$ και άρα ο ελάχιστος φυσικός n με $2^{-n} < r_u$ είναι ο $m = |u|$. Από τα προηγούμενα έχουμε

$$B_{d_{\mathcal{N}}}(u * (0,0,\dots), 2^{-(|u|-1)}) = \mathcal{N}_{u*(0,0,\dots)|m} = \mathcal{N}_u.$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. ▫

Τώρα μπορούμε να χαρακτηρίσουμε τη σύγκλιση ακολουθιών στον χώρο του Baire.

Πρόταση 2.3.4. *Για κάθε ακολουθία $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ στον $\mathcal{N}$ και κάθε $\alpha \in \mathcal{N}$ έχουμε*

$$\begin{aligned} \alpha_i \xrightarrow{d_{\mathcal{N}}} \alpha &\iff \forall n \ \lim_{i\to\infty} \alpha_i(n) = \alpha(n) \\ &\iff \forall n \ \exists i_n \ \forall i \geqslant i_n \ \alpha_i(n) = \alpha(n). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι η τελευταία ισοδυναμία ισχύει γιατί τα $\alpha_i(n), \alpha(n)$ είναι φυσικοί αριθμοί. Δείχνουμε επομένως την πρώτη ισοδυναμία.

Για την ευθεία κατεύθυνση θεωρούμε $\alpha_i \xrightarrow{d_{\mathcal{N}}} \alpha$ και παίρνουμε ένα $n \in \mathbb{N}$. Από το Λήμμα 2.3.3 για $r = 2^{-n}$ η μπάλα $B_{d_{\mathcal{N}}}(\alpha, 2^{-n})$ ισούται με το σύνολο $\mathcal{N}_{\alpha|(n+1)}$. Εφόσον η ακολουθία $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο α, έχουμε $\alpha_i \in B_{d_{\mathcal{N}}}(\alpha, 2^{-n}) = \mathcal{N}_{\alpha|(n+1)}$ για όλα τα μεγάλα i. Ειδικότερα, $\alpha_i(n) = \alpha(n)$ για όλα τα μεγάλα i.

Αντίστροφα υποθέτουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $\lim_{i\to\infty} \alpha_i(n) = \alpha(n)$. Θεωρούμε $r > 0$ και N τον ελάχιστο φυσικό με $2^{-N} < r$. Από το Λήμμα 2.3.3 ισχύει $B_{d_{\mathcal{N}}}(\alpha, r) = \mathcal{N}_{\alpha|N}$. Για κάθε $n \leqslant N$ έχουμε $\lim_{i\to\infty} \alpha_i(n) = \alpha(n)$ και, όπως έχουμε εξηγήσει, υπάρχει $i_n \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για κάθε $i \geqslant i_n$ ισχύει $\alpha_i(n) = \alpha(n)$. Θέτουμε $i_0 = \max\{i_n \mid n \leqslant N\}$, τότε για κάθε $i \geqslant i_0$ και κάθε $n < N$ ισχύει $\alpha_i(n) = \alpha(n)$. Συνεπώς, για κάθε $i \geqslant i_0$ έχουμε $\alpha_i|N = \alpha|N$, δηλαδή $\alpha_i \in \mathcal{N}_{\alpha|N} = B_{d_{\mathcal{N}}}(\alpha, r)$. ▫

Πρόταση 2.3.5. *Η τοπολογία του $(\mathcal{N}, d_{\mathcal{N}})$ είναι η τοπολογία γινόμενο στο $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.*

Απόδειξη. Αφού οι ανοικτές μπάλες σε έναν μετρικό χώρο αποτελούν βάση για την τοπολογία ενός μετρικού χώρου, προκύπτει από το Λήμμα 2.3.3 ότι τα σύνολα $\mathcal{N}_u$, $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, είναι $d_{\mathcal{N}}$-ανοικτά και επιπλέον αποτελούν βάση για την τοπολογία του $(\mathcal{N}, d_{\mathcal{N}})$.

Επιπλέον, αφού τα μονοσύνολα στο $\mathbb{N}$ αποτελούν βάση για την τοπολογία του $\mathbb{N}$, έχουμε από την (1.1) στην Εισαγωγή ότι τα $\mathcal{N}_u$ αποτελούν βάση για την τοπολογία γινόμενο στο $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Συνεπώς, η τοπολογία του $(\mathcal{N}, d_{\mathcal{N}})$ και η τοπολογία γινόμενο του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ έχουν μια κοινή βάση και άρα είναι ίσες.

Ως *δεύτερη απόδειξη* αναφέρουμε ότι από την Πρόταση 2.3.4 η τοπολογία του $(\mathcal{N}, d_{\mathcal{N}})$ είναι αυτή της κατά σημείο σύγκλισης, που όπως είναι γνωστό, αυτή είναι η τοπολογία γινόμενο στον $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. ▫

Πρόταση 2.3.6. *Ο $(\mathcal{N}, d_{\mathcal{N}})$ είναι πλήρης και διαχωρίσιμος μετρικός χώρος. Συνεπώς, ο χώρος του Baire είναι Πολωνικός.*

Απόδειξη. Οι τελικά μηδενικές ακολουθίες

$$\alpha_u = u * (0, 0, \dots) = (u(0), \dots, u(|u| - 1), 0, 0, \dots) \quad (u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}})$$

αποτελούν ένα αριθμήσιμο και πυκνό σύνολο του $(\mathcal{N}, d_{\mathcal{N}})$, καθώς έχουμε $\alpha_u \in \mathcal{N}_u$ για κάθε $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. Επομένως, ο χώρος είναι διαχωρίσιμος.

Για την πληρότητα θεωρούμε μια $d_{\mathcal{N}}$-Cauchy ακολουθία $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Σταθεροποιούμε ένα $n \in \mathbb{N}$. Τότε υπάρχει ένα $i_n \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για κάθε $i, j \geqslant i_n$ έχουμε $d_{\mathcal{N}}(\alpha_i, \alpha_j) < 2^{-n}$. Συνεπάγεται ότι

$$\alpha_i(k) = \alpha_j(k) \text{ για κάθε } k = 0, \dots, n \text{ και κάθε } i, j \geqslant i_n. \tag{2.14}$$

Ειδικότερα η ακολουθία φυσικών αριθμών $(\alpha_i(n))_{i \in \mathbb{N}}$ είναι τελικά σταθερή και ίση με τον αριθμό $\alpha_{i_n}(n)$.

Επομένως, ορίζουμε

$$\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : \alpha(n) = \lim_{i \to \infty} \alpha_i(n) = \alpha_{i_n}(n)$$

όπου i_n είναι όπως πιο πάνω.

Είναι σαφές από την (2.14) ότι $\alpha_i(k) = \alpha_{i_n}(k) = \alpha(k)$ για κάθε $i \geqslant i_n$ και κάθε $k = 0, \dots, n$. Από την (2.13) προκύπτει $\alpha_i \xrightarrow{d_{\mathcal{N}}} \alpha$. ▫

Θα δούμε αργότερα (Θεώρημα 2.7.1) ότι ο χώρος του Baire είναι τοπολογικά ισομορφικός με τον Πολωνικό χώρο των άρρητων αριθμών.

Θεώρημα 2.3.7. *Για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ υπάρχει ένας συνεχής επιμορφισμός $\pi : \mathcal{N} \twoheadrightarrow \mathcal{X}$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε μια κατάλληλη μετρική d στο $\mathcal{X}$ και ένα σύνολο

$$D = \{r_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

που είναι αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του $\mathcal{X}$. Κάθε $x \in \mathcal{X}$ είναι το όριο μιας ακολουθίας $(r_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ της $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Η ιδέα είναι να πάρουμε $\alpha = (k_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ και τότε θα έχουμε $x = \lim_{n \to \infty} r_{\alpha(n)}$. Το τελευταίο όριο θα είναι η τιμή της π στο α.

Ένα πρόβλημα που ανακύπτει είναι πως η ακολουθία $(r_{\alpha(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ μπορεί να μην συγκλίνει για κάθε $\alpha \in \mathcal{N}$. Για να το διορθώσουμε αυτό θα αντικαταστήσουμε την ακολουθία $(r_{\alpha(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ με μια άλλη, ας τη συμβολίσουμε με $(x_n^{\alpha})_{n \in \mathbb{N}}$, η οποία συγκλίνει για κάθε α και η συνάρτηση $\alpha \mapsto \lim_{n \to \infty} x_n^{\alpha}$ είναι συνεχής. Επιπλέον, για μια επαρκώς μεγάλη συλλογή $\alpha \in \mathcal{N}$ η $(x_n^{\alpha})_{n \in \mathbb{N}}$ δεν διαφέρει ουσιαστικά από την $(r_{\alpha(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ και επομένως κάθε $x \in \mathcal{X}$ θα λαμβάνεται ως όριο μιας ακολουθίας της μορφής $(x_n^{\alpha})_{n \in \mathbb{N}}$. Θα έχουμε δηλαδή έναν επιμορφισμό.

Έχοντας αυτά υπόψη προχωράμε στην κατασκευή της π. Αρχικά, ορίζουμε μια οικογένεια $(x_u)_{u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \setminus \{\Lambda\}}$ στοιχείων του $\mathcal{X}$ με επαγωγή στο μήκος $|u|$ του $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \setminus \{\Lambda\}$.

Για $|u| = 1$ με $u = (k_0)$, ορίζουμε $x_u = x_{(k_0)} = r_{k_0}$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n > 1$ έχουν οριστεί x_w για κάθε $w \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με $1 \leqslant |w| < n$.

Θεωρούμε $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με $|u| = n$. Θέτουμε προσωρινά $w = (u(0), \ldots, u(n-2))$ και $k = u(|u|-1)$ έτσι που

$$u = w * (k).$$

Προφανώς $|w| = n-1$ και από την Επαγωγική Υπόθεση έχει οριστεί το x_w. Ορίζουμε

$$x_u = \begin{cases} r_k, & \text{αν } d(x_w, r_k) < 2^{-n}, \\ x_w, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Έτσι έχει οριστεί η οικογένεια $(x_u)_{u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \setminus \{\Lambda\}}$.

Είναι σαφές από τον πιο πάνω ορισμό ότι $d(x_w, x_u) < 2^{-|u|}$ όπου $u = w * u(|u|-1)$. Προκύπτει ότι για κάθε $w \subsetneq u$ με $u = w * (k_0, \ldots, k_m)$,

$$\begin{aligned} d(x_w, x_u) &\leqslant d(x_w, x_{w*(k_0)}) + \cdots + d(x_{w*(k_0,\ldots,k_{m-1})}, x_u) \\ &< 2^{-(|w|+1)} + \cdots + 2^{-|u|} \\ &< \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-(|w|+k)} = 2^{-|w|}. \end{aligned}$$

Επομένως για κάθε $\alpha \in \mathcal{N}$ και κάθε $1 \leqslant n \leqslant m$ ισχύει

$$d(x_{\alpha|n}, x_{\alpha|m}) < 2^{-n}. \tag{2.15}$$

Άρα για κάθε $\alpha \in \mathcal{N}$ η ακολουθία $(x_{\alpha|n})_{n \in \mathbb{N}}$ είναι d-Cauchy. Αφού ο $(\mathcal{X}, d)$ είναι πλήρης, ορίζεται η συνάρτηση

$$\pi : \mathcal{N} \to \mathcal{X} : \pi(\alpha) = \lim_{n\to\infty} x_{\alpha|n}.$$

Παίρνοντας όριο $m \to \infty$ στην (2.15) έχουμε $d(x_{\alpha|n}, \pi(\alpha)) \leqslant 2^{-n}$ για κάθε $\alpha \in \mathcal{N}$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως, αν $\beta \in \mathcal{N}_{\alpha|n}$, δηλαδή αν $\beta|n = \alpha|n$ ισχύει

$$d(\pi(\alpha), \pi(\beta)) \leqslant d(\pi(\alpha), x_{\alpha|n}) + d(x_{\alpha|n}, \pi(\beta)) \leqslant 2^{-n+1}$$

για κάθε $\alpha, \beta \in \mathcal{N}$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$. Είναι τότε άμεσο ότι η π είναι συνεχής (και μάλιστα ομοιόμορφα συνεχής).

Τέλος δείχνουμε ότι η π είναι επιμορφισμός. Αν $x \in \mathcal{X}$, ορίζουμε το $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ως εξής:

$$\alpha(n) = \text{ο ελάχιστος } k \in \mathbb{N} \text{ με } d(r_k, x) < 2^{-(n+3)}. \tag{2.16}$$

(Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει τέτοιος k γιατί το σύνολο $D = \{r_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ είναι πυκνό.)

Τότε $d(r_{\alpha(n)}, x) < 2^{-(n+3)}$ και

$$d(r_{\alpha(n)}, r_{\alpha(n+1)}) \leqslant d(r_{\alpha(n)}, x) + d(x, r_{\alpha(n+1)}) < 2^{-(n+3)} + 2^{-(n+4)} < 2^{-(n+2)}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Προκύπτει με επαγωγή ότι

$$x_{\alpha|(n+1)} = r_{\alpha(n)} \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

(Δηλαδή γι' αυτό το α συμβαίνει πάντα η πρώτη περίπτωση του ορισμού της $x_{\alpha|n}$.)

Συνεπώς

$$\pi(\alpha) = \lim_{n\to\infty} x_{\alpha|n} = \lim_{n\to\infty} x_{\alpha|(n+1)} = \lim_{n\to\infty} r_{\alpha(n)} = x$$

και η π είναι επιμορφισμός. □

Παρατήρηση 2.3.8. Η συνάρτηση $\pi : \mathcal{N} \twoheadrightarrow \mathcal{X}$ της προηγούμενης απόδειξης επιδέχεται αντίστροφη συνάρτηση. Δηλαδή υπάρχει μονομορφισμός $\tau : \mathcal{X} \rightarrowtail \mathcal{N}$ με

$$\pi(\tau(x)) = x \quad \text{για κάθε } x \in \mathcal{X} \quad \text{και} \quad \tau(\pi(\alpha)) = \alpha \quad \text{για κάθε } \alpha \in \tau[\mathcal{X}].$$

Η συνάρτηση τ δίνεται στην προηγούμενη απόδειξη από το (2.16),

$$\tau(x)(n) = \text{ο ελάχιστος } k \in \mathbb{N} \text{ με } d(r_k, x) < 2^{-(n+3)}, \quad x \in \mathcal{X}, n \in \mathbb{N}.$$

Αν θέσουμε $\alpha = \tau(x)$, τότε όπως δείξαμε $\pi(\alpha) = x$, δηλαδή $\pi(\tau(x)) = x$ για κάθε $x \in \mathcal{X}$. Από αυτό προκύπτει ότι η τ είναι μονομορφισμός,

$$\tau(x_1) = \tau(x_2) \implies \pi(\tau(x_1)) = \pi(\tau(x_2)) \implies x_1 = x_2.$$

Επιπλέον, για κάθε $\alpha = \tau(x)$ έχουμε

$$\tau(\pi(\alpha)) = \tau(\pi(\tau(x))) = \tau(x) = \alpha.$$

Πόρισμα 2.3.9. *Κάθε Πολωνικός χώρος έχει πληθάριθμο μικρότερο ή ίσο του συνεχούς.*

Απόδειξη. Από την Παρατήρηση 2.3.8 για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ υπάρχει μονομορφισμός $f : \mathcal{X} \rightarrowtail \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Άρα $\mathcal{X} \leqslant_c \mathbb{N}^{\mathbb{N}} =_c \mathbb{R}$. □

Υπάρχουν φυσικά Πολωνικοί χώροι που δεν είναι ισοπληθικοί με τον $\mathbb{R}$, όπως για παράδειγμα ο $\mathbb{N}$. Θα δούμε ότι τα δύο τελευταία σύνολα αποτελούν τις μοναδικές «πληθικότητες» Πολωνικών χώρων, έτσι που η τελευταία κλάση συνόλων ικανοποιεί την Υπόθεση του Συνεχούς.

Ορισμός 2.3.10. Το σύνολο όλων των **δυαδικών (άπειρων) ακολουθιών** είναι το $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ το οποίο συμβολίζεται και με $2^{\mathbb{N}}$. Προφανώς αυτό είναι υποσύνολο του $\mathcal{N}$ και θεωρούμε σε αυτό τη μετρική

$$d_{2^{\mathbb{N}}} = d_{\mathcal{N}} | (2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}}).$$

Ο **χώρος του Cantor** είναι ο μετρικός χώρος $(2^{\mathbb{N}}, d_{2^{\mathbb{N}}})$. Χρησιμοποιούμε τον ίδιο όρο και για τον τοπολογικό χώρο που προκύπτει.

Μια βάση για την τοπολογία του Cantor αποτελείται από όλα τα σύνολα της μορφής $\mathcal{N}_u \cap 2^{\mathbb{N}}$ όπου $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, ακριβώς επειδή τα $\mathcal{N}_u$, $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ αποτελούν βάση για την τοπολογία του $\mathcal{N}$. Προφανώς, $\mathcal{N}_u \cap 2^{\mathbb{N}} = \varnothing$ όταν υπάρχει $i < |u|$ με $u(i) > 1$, συνεπώς μπορούμε να περιοριστούμε στα $u \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$. Καταλήγουμε λοιπόν ότι μια **βάση** για την τοπολογία του **χώρου του Cantor** αποτελείται από όλα τα σύνολα της μορφής

$$\mathcal{N}_u^{2^{\mathbb{N}}} = \{\alpha \in 2^{\mathbb{N}} \mid u \sqsubseteq \alpha\}, \quad u \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}.$$

Είναι σαφές ότι τα πιο πάνω σύνολα $\mathcal{N}_u^{2^{\mathbb{N}}}$ είναι ανοικτά στον $2^{\mathbb{N}}$ και σύμφωνα με την Άσκηση 2.3.16 είναι και κλειστά σύνολα.

Επίσης, η τοπολογία του χώρου του Cantor είναι η σχετική τοπολογία του χώρου του Baire, η οποία είναι η τοπολογία γινόμενο στο $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Προκύπτει ότι και η τοπολογία του χώρου του Cantor είναι η τοπολογία γινόμενο στο σύνολο $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Τέλος, η **σύγκλιση** ακολουθιών στον $2^{\mathbb{N}}$ χαρακτηρίζεται όπως και στην περίπτωση του $\mathcal{N}$. Δηλαδή για κάθε ακολουθία $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον $2^{\mathbb{N}}$ και κάθε $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \alpha_i \xrightarrow{d_2^{\mathbb{N}}} \alpha &\iff \forall n \ \lim_{i\to\infty} \alpha_i(n) = \alpha(n) \\ &\iff \forall n \ \exists i_n \ \forall i \geqslant i_n \ \alpha_i(n) = \alpha(n). \end{aligned}$$

Πρόταση 2.3.11. *Ο* $(2^{\mathbb{N}}, d_{2^{\mathbb{N}}})$ *είναι συμπαγής μετρικός χώρος και συνεπώς ο αντίστοιχος τοπολογικός χώρος είναι Πολωνικός.*

Απόδειξη. Αν δείξουμε ότι ο $(2^{\mathbb{N}}, d_{2^{\mathbb{N}}})$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος, ισοδύναμα ότι το $2^{\mathbb{N}}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathcal{N}$, θα έχουμε επίσης ότι το $2^{\mathbb{N}}$ είναι κλειστό στον $\mathcal{N}$. Συνεπώς, θα έχουμε ότι ο $2^{\mathbb{N}}$ είναι Πολωνικός χώρος.

Ένας τρόπος για να δείξουμε τη συμπάγεια είναι να παρατηρήσουμε ότι $2^{\mathbb{N}} = \prod_{n\in\mathbb{N}}\{0,1\}$. Γνωρίζουμε ότι το καρτεσιανό γινόμενο συμπαγών συνόλων είναι συμπαγές σύνολο (για τυχαίο γινόμενο τοπολογικών χώρων χρειάζεται το *Θεώρημα Tychonoff*, εδώ έχουμε όμως μόνο αριθμήσιμο γινόμενο). Αφού το $\{0,1\}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{N}$, έχουμε ότι το $\prod_{n\in\mathbb{N}}\{0,1\}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ με την τοπολογία γινόμενο. Αυτή όμως είναι η τοπολογία του χώρου του Baire, άρα το $2^{\mathbb{N}}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathcal{N}$.

Δίνουμε μία ακόμα απόδειξη, η οποία στην ουσία εξηγεί γιατί το αριθμήσιμο γινόμενο συμπαγών μετρικών χώρων είναι συμπαγές σύνολο. Δείχνουμε ότι κάθε ακολουθία $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ στον $2^{\mathbb{N}}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Θεωρούμε αρχικά την ακολουθία $(\alpha_i(0))_{i\in\mathbb{N}}$. Αφού το $\{0,1\}$ είναι πεπερασμένο, υπάρχει υπακολουθία $(\alpha_{k_i^0}(0))_{i\in\mathbb{N}}$ που είναι σταθερή στο $\{0,1\}$.

Έπειτα, θεωρούμε την ακολουθία $(\alpha_{k_i^0}(1))_{i\in\mathbb{N}}$. Τότε υπάρχει μια περαιτέρω υπακολουθία $(\alpha_{k_i^1}(1))_{i\in\mathbb{N}}$, η οποία είναι τελικά σταθερή. Συνεχίζοντας αναδρομικά βρίσκουμε μια φθίνουσα ακολουθία

$$\begin{aligned}&L_0 \supseteq L_1 \supseteq \cdots \supseteq L_n \supseteq \dots\\ &L_n = \{k_i^n \mid i \in \mathbb{N}\} = \{k_0^n < \cdots < k_i^n < \dots\}, \quad n \in \mathbb{N},\end{aligned}$$

από άπειρα υποσύνολα του $\mathbb{N}$, έτσι ώστε για κάθε n η ακολουθία $(\alpha_{k_i^n}(n))_{i\in\mathbb{N}}$ είναι σταθερή.

Για κάθε $n < m$ οι φυσικοί αριθμοί $k_0^m < \cdots < k_m^m$ ανήκουν στο σύνολο $L_n = \{k_0^n < \cdots < k_i^n < \dots\}$. Προκύπτει ότι $k_m^m = k_i^n$ για κάποιο $i \geqslant m$. Επομένως

$$k_m^m = k_i^n \geqslant k_m^n > k_n^n.$$

Άρα η $(s_i)_{i\in\mathbb{N}} = (k_i^i)_{i\in\mathbb{N}}$ είναι γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών Ορίζουμε

$$\alpha(n) = \alpha_{k_n^n}(n)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$.

Δείχνουμε ότι $\alpha_{s_i} \to \alpha$. Έστω $n \in \mathbb{N}$, τότε για κάθε $i \geqslant n$ έχουμε

$$\alpha_{s_i}(n) = \alpha_{k_i^i}(n) = \alpha_{k_j^n}(n) \quad \text{για κάποιο } j,$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι $L_i \subseteq L_n$. Επειδή για κάθε n η ακολουθία $(\alpha_{k_i^n}(n))_{i\in\mathbb{N}}$ είναι σταθερή έχουμε

$$\alpha_{k_j^n}(n) = \alpha_{k_n^n}(n) = \alpha(n).$$

Άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\lim_{i\to\infty} \alpha_{s_i}(n) = \alpha(n)$ και από την (2.13) έχουμε $\alpha_{s_i} \xrightarrow{d_{\mathcal{N}}} \alpha$. Αφού τα α_i, $i \in \mathbb{N}$ και το α είναι στοιχεία του $2^{\mathbb{N}}$ και η μετρική $d_{2^{\mathbb{N}}}$ είναι ο περιορισμός της $d_{\mathcal{N}}$ στο $2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}}$ προκύπτει ότι $\alpha_{s_i} \xrightarrow{d_{2^{\mathbb{N}}}} \alpha$. □

Θεώρημα 2.3.12. *Για κάθε τέλειο Πολωνικό χώρο* $\mathcal{X}$ *υπάρχει ένας συνεχής μονομορφισμός* $\tau : 2^{\mathbb{N}} \rightarrowtail \mathcal{X}$.

Απόδειξη. Θέτουμε $I = \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ και σταθεροποιούμε μια συμβατή μετρική d στον $\mathcal{X}$.

Κατασκευάζουμε αναδρομικά μια οικογένεια $(V_u)_{u\in I}$ από d-ανοικτές μπάλες του $\mathcal{X}$ με τις εξής ιδιότητες:

$$
\begin{aligned}
\text{ακτίνα}(V_u) &\leqslant 2^{-|u|}\\
\overline{V_{u*(i)}} &\subseteq \overline{V_u}, \quad i=0,1\\
\overline{V_{u*(0)}} \cap \overline{V_{u*(1)}} &= \varnothing
\end{aligned}
$$

για κάθε $u \in I$.

Στο αρχικό βήμα επιλέγουμε ένα $x_0 \in \mathcal{X}$ και παίρνουμε $V_\Lambda = B_d(x_0, 1)$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \geqslant 1$ έχουμε ορίσει V_u, όπως πιο πάνω για όλα τα $w \in I$ με $1 \leqslant |w| < n$.

Ορίζουμε τα $V_{w*(i)}$, $i = 0, 1$, για όλα τα $w \in I$ με $|w| = n - 1$. Θεωρούμε ένα τέτοιο w. Η μπάλα V_w δεν μπορεί να περιέχει μόνο το κέντρο της, αλλιώς αυτό θα ήταν μεμονωμένο σημείο του $\mathcal{X}$. Επομένως, υπάρχουν στοιχεία x_0^w, x_1^w της V_w με $x_0^w \neq x_1^w$. Αφού το V_w είναι ανοικτό σύνολο, υπάρχουν ανοικτές μπάλες B_0^w και B_1^w με κέντρα τα x_0^w, x_1^w αντίστοιχα, με ακτίνες μικρότερες ή ίσες του 2^{-n}, που ικανοποιούν επίσης

$$\overline{B_0^w} \cap \overline{B_1^w} = \varnothing \quad \text{και} \quad \overline{B_i^w} \subseteq V_w \subseteq \overline{V_w} \quad i = 0, 1.$$

Οπότε ορίζουμε $V_{w*(i)} = B_i^w$, $i = 0, 1$. Είναι σαφές ότι ικανοποιούνται οι πιο πάνω ιδιότητες. Αυτό ολοκληρώνει την κατασκευή.

Για κάθε $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$ η $(\overline{V_{\alpha|n}})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια φθίνουσα ακολουθία μη κενών κλειστών συνόλων των οποίων η διάμετρος συγκλίνει στο 0. Αφού ο $(\mathcal{X}, d)$ είναι πλήρης, από ένα γνωστό θεώρημα του Cantor (Αρχή Κιβωτισμού), η τομή

$$\bigcap\nolimits_{n\in\mathbb{N}} \overline{V_{\alpha|n}}$$

είναι μονοσύνολο. Ορίζουμε

$$\tau : 2^{\mathbb{N}} \to \mathcal{X} : \{\tau(\alpha)\} = \bigcap\nolimits_{n\in\mathbb{N}} \overline{V_{\alpha|n}}.$$

Αν τα $\alpha \neq \beta$ είναι στοιχεία του $2^{\mathbb{N}}$ και n είναι ο ελάχιστος k με $\alpha(k) \neq \beta(k)$ τότε

$$\alpha|n = \beta|n \quad \text{και} \quad \alpha(n) \neq \beta(n).$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε $\alpha(n) = 0$ και $\beta(n) = 1$. Επίσης, θέτουμε $w = \alpha|n = \beta|n$. Τότε $\tau(\alpha) \in \overline{V_{\alpha|(n+1)}}$, $\tau(\beta) \in \overline{V_{\beta|(n+1)}}$, και

$$\overline{V_{\alpha|(n+1)}} \cap \overline{V_{\beta|(n+1)}} = \overline{V_{w*(0)}} \cap \overline{V_{w*(1)}} = \varnothing.$$

Επομένως $\tau(\alpha) \neq \tau(\beta)$. Τέλος δείχνουμε ότι η τ είναι συνεχής. Θέτουμε

$$x_u = \text{το κέντρο της ανοικτής μπάλας } V_u.$$

Έστω $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$. Τότε για κάθε n έχουμε $\tau(\alpha) \in \overline{V_{\alpha|n}}$ και επομένως

$$d(\tau(\alpha), x_{\alpha|n}) \leqslant \text{ακτίνα}(V_{\alpha|n}) \leqslant 2^{-n}.$$

Συνεπώς, αν $\beta \in \mathcal{N}_{\alpha|n}$, δηλαδή αν $\beta|n = \alpha|n$ τότε

$$d(\tau(\alpha), \tau(\beta)) \leqslant d(\tau(\alpha), x_{\alpha|n}) + d(x_{\alpha|n}, \tau(\beta)) \leqslant 2 \cdot 2^{-n} = 2^{-n+1}.$$

Προκύπτει από το πιο πάνω ότι η τ είναι συνεχής. □

Όπως είναι γνωστό, η προηγούμενη συνάρτηση τ έχει συνεχή αντίστροφη. Αυτό ισχύει λόγω της συμπάγειας του $2^{\mathbb{N}}$. Αναφερόμαστε εκτενέστερα σε αυτό στο Πόρισμα 2.4.4 πιο κάτω.

Όσον αφορά την αντίστοιχη πληθαριθμική συνέπεια έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πόρισμα 2.3.13. *Κάθε μη κενό τέλειο υποσύνολο ενός Πολωνικού χώρου έχει τον πληθάριθμο του συνεχούς.*

Απόδειξη. Αν $\mathcal{X}$ είναι Πολωνικός χώρος και P είναι μη κενό τέλειο υποσύνολό του, τότε ο P με τη σχετική τοπολογία είναι τέλειος Πολωνικός χώρος.

Από το Θεώρημα 2.3.12 υπάρχει συνεχής μονομορφισμός $\tau : 2^{\mathbb{N}} \rightarrowtail P$ και ειδικότερα $2^{\mathbb{N}} \leqslant_c P$. Άρα

$$\mathbb{R} =_c \{0,1\}^{\mathbb{N}} = 2^{\mathbb{N}} \leqslant_c P \leqslant_c \mathbb{R}$$

όπου στην τελευταία σχέση $\leqslant_c$ χρησιμοποιήσαμε το Πόρισμα 2.3.9. Από το Θεώρημα Schröder-Bernstein προκύπτει ότι $P =_c \mathbb{R}$. ▫

Ασκήσεις

Άσκηση 2.3.14. Η συνάρτηση $d_{\mathcal{N}}$ είναι μετρική στο $\mathcal{N} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Μάλιστα, η $d_{\mathcal{N}}$ είναι **υπερμετρική** (**ultrametric**), δηλαδή μετρική που ικανοποιεί

$$d_{\mathcal{N}}(\alpha,\beta) \leqslant \max\{d_{\mathcal{N}}(\alpha,\gamma), d_{\mathcal{N}}(\gamma,\beta)\}, \quad \text{για κάθε } \alpha,\beta,\gamma \in \mathcal{N}.$$

Άσκηση 2.3.15. Εξετάστε τις επόμενες ακολουθίες του χώρου του Baire ως προς τη σύγκλιση,

$$\begin{aligned}
\alpha_i &= (i,0,0,\dots),\\
\beta_i &= (1)^i * (0,0,\dots),\\
\gamma_i &= (0,1,2,\dots,i,0,0,\dots),\\
\delta_i &= (0,2,4,6,\dots,42) * ((-1)^i) * (0,0,\dots)\\
\varepsilon_i &= \ (0,2,4,6,\dots,2i) * ((-1)^i) * (0,0,\dots),
\end{aligned}$$

όπου $i \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 2.3.16. Τα ακόλουθα υποσύνολα του $\mathcal{N}$ είναι κλειστά,

$$\begin{aligned}
A &= \{(n) * (0,0,0,\dots) \mid n \in \mathbb{N}\},\\
B &= \{(0)^n * (n,1,1,1,\dots) \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{(0,0,0,\dots)\}\\
C &= \{(1)^n * (2,3,4,5,\dots) \mid n \in \mathbb{N}\} \ \cup \{(1,1,\dots,1,\dots)\}.
\end{aligned}$$

Δείξτε επίσης ότι η βασική περιοχή $\mathcal{N}_u$, όπου $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ εκτός από ανοικτό είναι και κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{N}$. Συμπεράνετε ότι κάθε βασική περιοχή $\mathcal{N}_u \cap 2^{\mathbb{N}}$, $u \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ είναι επίσης ανοικτό και κλειστό υποσύνολο του $2^{\mathbb{N}}$.

Άσκηση 2.3.17. Κάθε $\mathcal{N}_u$ με τη σχετική τοπολογία είναι τοπολογικά ισομορφικό με τον $\mathcal{N}$. Βρείτε έναν κατάλληλο τοπολογικό ισομορφισμό $f_u : \mathcal{N} \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathcal{N}_u$.

Άσκηση 2.3.18. Οι συναρτήσεις

$$\begin{aligned}
s : \mathcal{N} \to \mathcal{N} &: s(\alpha) = \alpha^*\\
f : \mathcal{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} &: f(\alpha,n) = \alpha|n\\
g : \mathcal{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} &: g(\alpha,n) = \overline{\alpha(n)}\\
h : \mathcal{N} \times \mathbb{N} \to \mathcal{N} &: h(\alpha,n) = (\alpha)_n
\end{aligned}$$

όπως δίνονται στις (2.9) - (2.12) είναι συνεχείς. Υπενθυμίζουμε ότι θεωρούμε το $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με τη διακριτή μετρική.

Άσκηση 2.3.19. Η συνάρτηση

$$f : \mathcal{N} \rightarrowtail 2^{\mathbb{N}} : f(\alpha) = (0)^{\alpha(0)} * (1) * (0)^{\alpha(1)} * (1) * \dots\dots * (0)^{\alpha(n)} * (1) * \dots$$

είναι συνεχής μονομορφισμός και έχει συνεχή αντίστροφη.

Συμπεράνετε ότι ο χώρος του Baire είναι τοπολογικά ισομορφικός με ένα G_δ υποσύνολο του χώρου του Cantor.

Άσκηση 2.3.20. Για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και κάθε $A \subseteq \mathcal{X}$ το A περιέχει ένα μη κενό τέλειο υποσύνολο αν και μόνο αν υπάρχει συνεχής μονομορφισμός $f : 2^{\mathbb{N}} \rightarrowtail \mathcal{X}$ με $f[2^{\mathbb{N}}] \subseteq A$.

2.4. Το Θεώρημα Cantor-Bendixson

Το επόμενο αποτέλεσμα δίνει τη σχέση ανάμεσα στα κλειστά και στα τέλεια υποσύνολα ενός Πολωνικού χώρου.

Θεώρημα 2.4.1 (Cantor-Bendixson). *Για κάθε κλειστό υποσύνολο C ενός Πολωνικού χώρου $\mathcal{X}$ υπάρχουν δύο σύνολα $P, S \subseteq C$, με το P τέλειο (ενδεχομένως κενό), το S αριθμήσιμο, $P \cap S = \varnothing$ και $C = P \cup S$.*

Μάλιστα, η πιο πάνω διάσπαση είναι μοναδική, δηλαδή αν P', S' είναι δύο ξένα υποσύνολα του C με το P' τέλειο, το S' αριθμήσιμο και $P' \cup S' = C$ τότε $P' = P$ και $S' = S$.

Απόδειξη. Θεωρούμε το κλειστό $C \subseteq \mathcal{X}$ και μια αριθμήσιμη βάση $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ για την τοπολογία του $\mathcal{X}$. Ορίζουμε

$$P = \{x \in C \mid \forall n \text{ με } x \in V_n \text{ το σύνολο } V_n \cap C \text{ είναι υπεραριθμήσιμο}\}$$
$$S = C \setminus P.$$

Είναι σαφές ότι $P \cap C = \varnothing$ και ότι $C = P \cup S$. Δείχνουμε ότι το S είναι αριθμήσιμο σύνολο. Για κάθε $x \in S$ έχουμε $x \notin P$ και άρα υπάρχει $n \in \mathbb{N}$, έτσι ώστε $x \in V_n$ και το σύνολο $V_n \cap C$ είναι αριθμήσιμο. Ορίζουμε $n(x)$ να είναι ο ελάχιστος τέτοιος n και $I = \{n(x) \in \mathbb{N} \mid x \in S\}$. Τότε το I είναι αριθμήσιμο ως υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Επίσης

$$S \subseteq \bigcup_{n \in I} (V_n \cap C)$$

ακριβώς γιατί $x \in V_{n(x)}$ για κάθε $x \in S \subseteq C$. Αφού το $V_n \cap C$ είναι αριθμήσιμο για κάθε $n \in I$ έχουμε ότι το σύνολο S περιέχεται σε μια αριθμήσιμη ένωση αριθμησίμων συνόλων. Συνεπώς, το S είναι αριθμήσιμο.

Έπειτα δείχνουμε ότι το P είναι κλειστό σύνολο. Έστω $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία μέσα από το P που συγκλίνει στο $x \in \mathcal{X}$. Επειδή $P \subseteq C$ και το C είναι κλειστό, έχουμε ότι $x \in C$. Επιπλέον, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $x \in V_n$ υπάρχει $i \in \mathbb{N}$ με $x_i \in V_n$. Αφού $x_i \in P$ έχουμε ότι το σύνολο $V_n \cap C$ είναι υπεραριθμήσιμο. Άρα $x \in P$ και το P είναι κλειστό.

Επίσης, το P δεν έχει μεμονωμένα σημεία. Θεωρούμε $x \in P$ και $n \in \mathbb{N}$ με $x \in V_n$. Το σύνολο

$$V_n \cap C = (V_n \cap P) \cup (V_n \cap S)$$

είναι υπεραριθμήσιμο, ενώ το $V_n \cap S$ είναι αριθμήσιμο ως υποσύνολο του S. Συνεπώς, το $V_n \cap P$ είναι υπεραριθμήσιμο και ειδικότερα υπάρχει $y \in V_n \cap P$ που είναι διάφορο του x. Άρα το x δεν είναι μεμονωμένο σημείο του P.

Τέλος δείχνουμε τη μοναδικότητα. Θεωρούμε ένα τέλειο P' και ένα αριθμήσιμο S' με $P' \cap S' = \varnothing$ και

$$P' \cup S' = P \cup S.$$

Θεωρούμε $x \in P'$, αφού $P' \subseteq P \cup S = C$ έχουμε ότι $x \in C$. Αν έχουμε $x \in V_n$, τότε χρησιμοποιώντας μια κατάλληλα μικρή ανοικτή μπάλα του $\mathcal{X}$, μπορούμε να βρούμε m έτσι ώστε $x \in V_m \subseteq \overline{V_m} \subseteq V_n$. Τότε το $\overline{V_m \cap P'}$ είναι μη κενό κλειστό υποσύνολο του $\overline{V_m} \cap P' \subseteq V_n \cap C$. Από την άλλη, το $\overline{V_m \cap P'}$ δεν έχει μεμονωμένα σημεία (Άσκηση 2.4.8), άρα είναι μη κενό τέλειο σύνολο. Ειδικότερα, είναι υπεραριθμήσιμο (Πόρισμα 2.3.13) και συνεπώς το υπερσύνολο $V_n \cap C$ είναι υπεραριθμήσιμο. Επομένως, $x \in P$ και άρα $P' \subseteq P$.

Αν $x \in S'$, τότε $x \notin P'$ και αφού το τελευταίο σύνολο είναι κλειστό υπάρχει n με $x \in V_n$ και $V_n \cap P' = \varnothing$. Άρα $V_n \cap C = V_n \cap S' \subseteq S'$ και το σύνολο $V_n \cap C$ είναι αριθμήσιμο. Προκύπτει ότι $x \in S$ και συνεπώς $S' \subseteq S$. Ισοδύναμα $P \subseteq P'$.

Καταλήγουμε ότι $P = P'$ και $S = S'$. ◻

Ορισμός 2.4.2. Έστω $\mathcal{X}$ Πολωνικός χώρος και $C \subseteq \mathcal{X}$ κλειστό. Θεωρούμε τα σύνολα P, S όπως στο Θεώρημα Cantor-Bendixson. Δηλαδή το P είναι τέλειο, το S είναι αριθμήσιμο, $P \cap S = \varnothing$ και $P \cup S = C$.

Το μοναδικό P, όπως πιο πάνω, είναι ο **τέλειος πυρήνας** (perfect kernel) του C και το μοναδικό S, όπως πιο πάνω, είναι το **διάσπαρτο μέρος** (scattered part) του C.

Μια άμεση εφαρμογή του Θεωρήματος Cantor-Bendixson είναι η επέκταση του Θεωρήματος 2.3.12 στους υπεραριθμήσιμους Πολωνικούς χώρους.

Πόρισμα 2.4.3. *Για κάθε υπεραριθμήσιμο Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ υπάρχει ένας συνεχής μονομορφισμός $\tau : 2^{\mathbb{N}} \rightarrowtail \mathcal{X}$.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα Cantor-Bendixson το κλειστό σύνολο $\mathcal{X}$ διασπάται στον τέλειό του πυρήνα P και στο διάσπαρτό του μέρος S. Αν είχαμε $P = \varnothing$, τότε το $\mathcal{X} = S$ θα ήταν αριθμήσιμο σύνολο, άτοπο.

Άρα $P \neq \varnothing$. Αφού το P είναι κλειστό, προκύπτει ότι είναι Πολωνικός χώρος και μάλιστα τέλειος. Από το Θεώρημα 2.3.12 υπάρχει ένας συνεχής μονομορφισμός

$$\tau : 2^{\mathbb{N}} \rightarrowtail P \subseteq \mathcal{X}.$$

Η τ είναι η ζητούμενη συνάρτηση. ◻

Πόρισμα 2.4.4. Κάθε υπεραριθμήσιμος Πολωνικός χώρος έχει έναν υπόχωρο που είναι τοπολογικά ισομορφικός με τον χώρο του Cantor.

Απόδειξη. Είναι γνωστό ότι αν έχουμε δύο μετρικούς χώρους K, Y με τον K συμπαγή και έναν συνεχή μονομορφισμό $f : K \rightarrowtail Y$, τότε το $f[K]$ είναι συμπαγές (ως συνεχής εικόνα συμπαγούς συνόλου) και η $f^{-1} : f[K] \to K$ είναι συνεχής.

Για να δούμε γιατί το $f[K]$ είναι συμπαγές, θεωρούμε μια ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον $f[K]$ και γράφουμε $y_n = f(x_n)$ όπου $x_n \in K$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από τη συμπάγεια του K υπάρχει $x \in K$ και υπακολουθία $(x_{m_n})_{n\in\mathbb{N}}$ με $x_{m_n} \to x$, οπότε από τη συνέχεια της f έχουμε $y_{m_n} = f(x_{m_n}) \to f(x)$.

Για τη συνέχεια της f^{-1} θεωρούμε $f(x_n) \to f(x)$, όπου $x \in K$ και $x_n \in K$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν είχαμε $x_n \nrightarrow x$, τότε θα υπήρχε μια μπάλα $B(x,r)$ με $x_n \notin B(x,r)$ για άπειρα $n \in \mathbb{N}$, και πάλι από τη συμπάγεια του K (εφαρμοσμένη στην υπακολουθία που προκύπτει από αυτά τα άπειρα n) θα βρίσκαμε μια υπακολουθία $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ και $z \in K$ με $x_{k_n} \to z$ και $x_{k_n} \notin B(x,r)$, ειδικότερα $z \neq x$. Από τη συνέχεια της f θα είχαμε $y_{k_n} = f(x_{k_n}) \to f(z)$. Επομένως, $f(z) = f(x)$ και αφού η f είναι μονομορφισμός θα προέκυπτε ότι $z = x$, άτοπο.

Προκύπτει ότι η τ του Πορίσματος 2.4.3 επιδέχεται συνεχή αντίστροφη συνάρτηση. ◻

Μια άλλη εφαρμογή του Θεωρήματος Cantor-Bendixson είναι η ακόλουθη.

Πόρισμα 2.4.5. *Τα κλειστά υποσύνολα Πολωνικών χώρων ικανοποιούν την Υπόθεση του Συνεχούς.*

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{X}$ Πολωνικός χώρος και $C \subseteq \mathcal{X}$ κλειστό. Θεωρούμε τον τέλειο πυρήνα P και το διάσπαρτο μέρος S του C.

Αν $P = \varnothing$ τότε $C = P \cup S = S$ και άρα το C είναι αριθμήσιμο. Αν $P \neq \varnothing$ από τα Πορίσματα 2.3.13 και 2.3.9 έχουμε

$$\mathbb{R} \leqslant_c P \leqslant_c C \leqslant_c \mathcal{X} \leqslant_c \mathbb{R},$$

όπου στη δεύτερη και τρίτη σχέση $\leqslant_c$ πιο πάνω χρησιμοποιήσαμε την ταυτοτική συνάρτηση. Από το Θεώρημα Schröder-Bernstein προκύπτει ότι $C =_c \mathbb{R}$. ▫

Αξίζει να απομονώσουμε τον εξής χαρακτηρισμό των κλειστών υποσυνόλων Πολωνικών χώρων που είναι αριθμήσιμα, ο οποίος προκύπτει από τα επιχειρήματα της προηγούμενης απόδειξης:

Αν το C είναι κλειστό υποσύνολο ενός Πολωνικού χώρου $\mathcal{X}$, τότε το C είναι αριθμήσιμο αν και μόνο αν ο τέλειος πυρήνας του είναι το κενό σύνολο.

Ασκήσεις

Άσκηση 2.4.6. Βρείτε τον τέλειο πυρήνα και το διάσπαρτο μέρος των κλειστών συνόλων

$$\begin{aligned} A &= [0,1] \cup \{1 + 2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\} \\ B &= A \cup \{1 + 2^{-n} + 3^{-m} \mid n, m \in \mathbb{N}\} \\ C &= \{1\} \cup \{1 + 2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Άσκηση 2.4.7. Τα μεμονωμένα σημεία ενός κλειστού υποσυνόλου ενός Πολωνικού χώρου περιέχονται στο διάσπαρτο μέρος του. Ισχύει το αντίστροφο;

Άσκηση 2.4.8. Αν (X, d) είναι μετρικός χώρος και το $P \subseteq X$ είναι τέλειο, τότε για κάθε ανοικτό V το σύνολο $\overline{V \cap P}$ είναι τέλειο (ενδεχομένως κενό).

Άσκηση 2.4.9. Ο τέλειος πυρήνας ενός κλειστού υποσυνόλου Πολωνικού χώρου είναι το μεγαλύτερο τέλειο υποσύνολό του. Δηλαδή αν ο $\mathcal{X}$ είναι Πολωνικός χώρος, το $C \subseteq \mathcal{X}$ είναι κλειστό και το $P_0 \subseteq C$ είναι τέλειο, τότε το P_0 περιέχεται στον τέλειο πυρήνα του C.

Άσκηση 2.4.10. Τα G_δ υποσύνολα Πολωνικών χώρων ικανοποιούν την Υπόθεση του Συνεχούς.

Άσκηση 2.4.11. Δίνεται μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Τότε είτε η f είναι συνεχής μόνο σε αριθμήσιμο πλήθος σημείων είτε υπάρχει μη κενό τέλειο $P \subseteq \mathbb{R}$, έτσι ώστε η f να είναι συνεχής σε κάθε $x \in P$.

2.5. Δένδρα

Ορισμός 2.5.1. Έστω X μη κενό σύνολο. Ένα $T \subseteq X^{<\mathbb{N}}$ είναι **δένδρο** στο X αν είναι μη κενό και κλειστό προς τα κάτω ως προς τη διάταξη $\sqsubseteq$, δηλαδή αν $w \sqsubseteq u$ και $u \in T$ τότε $w \in T$.

Για παράδειγμα, τα σύνολα $X^{<\mathbb{N}}$ και $\{\Lambda\}$ είναι δένδρα στο X. Άλλα παραδείγματα είναι το

$$T = \{\Lambda, (a), (a,b), (a,c), (d)\} \quad \text{και το} \quad S = \{(a,b)\} \cup \{(a)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

για κάποια $a, b, c, d \in X$.

Παρατηρούμε ότι η κενή ακολουθία Λ ανήκει σε κάθε δένδρο, γιατί $\Lambda \sqsubseteq u$ για κάθε $u \in T \neq \varnothing$.

Στους επόμενους ορισμούς θεωρούμε ότι έχουμε ένα δένδρο T. Η **ρίζα** του T είναι η κενή ακολουθία Λ. Τα στοιχεία του T ονομάζονται **κόμβοι** ή **κλαδιά** του T. Ένας κόμβος u του T ονομάζεται **τερματικός** αν δεν έχει γνήσια επέκταση w μέσα στο T, δηλαδή για κάθε $w \in T$ με $u \sqsubseteq w$ έχουμε $u = w$.

Το T είναι **κλαδεμένο** ή **περικομμένο** (pruned) αν δεν έχει τερματικούς κόμβους.

Με τον όρο **άπειρο κλαδί** του T εννοούμε μια συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to X$ με την ιδιότητα

$$(f(0), \ldots, f(n)) \in T$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Το **σώμα** $[T]$ του T είναι το σύνολο όλων των άπειρων κλαδιών του T. Είναι σαφές ότι το σώμα ενός δένδρου στο X είναι υποσύνολο του $X^{\mathbb{N}}$. Δίνουμε μερικά παραδείγματα: α) το σώμα του δένδρου $X^{<\mathbb{N}}$ είναι όλος ο χώρος $X^{\mathbb{N}}$, ειδικότερα *το σώμα του* $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ *είναι ο χώρος του Baire* $\mathcal{N}$, β) το σώμα ενός πεπερασμένου δένδρου είναι το κενό σύνολο $\varnothing$, γ) το σώμα του προηγούμενου δένδρου $S = \{(a, b)\} \cup \{(a)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ είναι το μονοσύνολο $\{(a, a, \ldots, a, \ldots)\}$ του $X^{\mathbb{N}}$.

Ένα δένδρο T ονομάζεται **θεμελιωμένο** (well-founded) αν $[T] = \varnothing$ και **μη θεμελιωμένο** (ill-founded) αν $[T] \neq \varnothing$. Επειδή υποθέσαμε ότι κάθε δένδρο είναι μη κενό σύνολο, προκύπτει ότι κάθε κλαδεμένο δένδρο είναι μη θεμελιωμένο.

Ένα δένδρο S στο X θα λέγεται **υποδένδρο** του T αν $S \subseteq T$. Για κάθε $u \in X^{<\mathbb{N}}$ ορίζουμε το **υποδένδρο** T_u των **ακολουθιών που είναι συμβατές** με το u,

$$T_u = \{w \in T \mid u||w\}. \tag{2.17}$$

Με άλλα λόγια, $w \in T_u$ αν και μόνο αν $w \in T$ και είτε $w \sqsubseteq u$ είτε $u \sqsubseteq w$. Αυτός ο ορισμός έχει μεγαλύτερο ενδιαφέρον όταν $u \in T$, αλλιώς το T_u αποτελείται μόνο από τα γνήσια αρχικά τμήματα της u που ανήκουν στο T. Μπορεί ακόμα να έχουμε $T_u = \{\Lambda\}$.

Είναι εύκολο να δει κανείς (Άσκηση 2.5.18) ότι το T_u είναι δένδρο και πως για κάθε $u \in T$ που δεν είναι τερματικός κόμβος του T ισχύει

$$T_u = \bigcup \{T_{u*(x)} \mid u * (x) \in T\} \tag{2.18}$$

$$[T_u] = \bigcup \{[T_{u*(x)}] \mid u * (x) \in T\}. \tag{2.19}$$

Δένδρα και τοπολογία.

Είναι σαφές ότι το σώμα ενός δένδρου T στο X είναι υποσύνολο του $X^{\mathbb{N}}$. Αν θεωρήσουμε στο X τη διακριτή τοπολογία, τότε ο $X^{\mathbb{N}}$ είναι μετρικός χώρος. Όπως και με τον χώρο του Baire, μια βάση για την τοπολογία του $X^{\mathbb{N}}$ είναι η οικογένεια όλων των συνόλων της μορφής

$$\{x_0\} \times \cdots \times \{x_{n-1}\} \times X \times X \times \ldots$$

όπου $x_0, \ldots, x_{n-1} \in X$.

Μια ακολουθία $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ στον $X^{\mathbb{N}}$ συγκλίνει στην $f \in X^{\mathbb{N}}$ αν και μόνο αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η ακολουθία $(f_i(n))_{i\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $f(n)$ μέσα στον X. Ισοδύναμα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $f_i(n) = f(n)$ για όλα τα μεγάλα i.

Τα σώματα δένδρων σε ένα σύνολο X χαρακτηρίζουν τα κλειστά σύνολα του $X^{\mathbb{N}}$.

Πρόταση 2.5.2. *Έστω X μη κενό σύνολο με τη διακριτή μετρική και $F \subseteq X^{\mathbb{N}}$. Τότε το F είναι κλειστό ως προς την τοπολογία γινόμενο του $X^{\mathbb{N}}$ αν και μόνο αν υπάρχει δένδρο T στο X με $F = [T]$.*

Απόδειξη. Για την ευθεία κατεύθυνση θεωρούμε ότι το F είναι κλειστό υποσύνολο του $X^{\mathbb{N}}$. Αν το F είναι το κενό σύνολο, τότε επιλέγουμε για T ένα οποιοδήποτε δένδρο πεπερασμένης διακλάδωσης με κενό σώμα, π.χ. το $\{\Lambda\}$.

Επομένως υποθέτουμε ότι $F \neq \varnothing$. Αν $u \in X^{<\mathbb{N}}$ και $f \in X^{\mathbb{N}}$, γράφουμε $u \sqsubseteq f$ όταν $f(k) = u(k)$ για κάθε $k < |u|$. Ορίζουμε $T \subseteq X^{<\mathbb{N}}$ ως εξής:

$$u \in T \iff \exists f \in F \; u \sqsubseteq f.$$

Επειδή $F \neq \varnothing$ έχουμε $\Lambda \in T$ και άρα $T \neq \varnothing$. Είναι άμεσο από τον ορισμό ότι το T είναι δένδρο.

Δείχνουμε ότι $F = [T]$. Έστω $g \in F$ και $n \in \mathbb{N}$. Είναι προφανές ότι υπάρχει $f \in F$ με $(g(0), \ldots, g(n)) \sqsubseteq f$, συγκεκριμένα μπορούμε να πάρουμε $f = g$. Άρα $(g(0), \ldots, g(n)) \in T$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $g \in [T]$. Αντίστροφα, αν $g \in [T]$ τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $(g(0), \ldots, g(n)) \in T$ και άρα υπάρχει $f_n \in F$ με $(g(0), \ldots, g(n)) \sqsubseteq f_n$.

Η ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο στοιχείο g. Πράγματι, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, παίρνουμε $n_0 = k$ και για κάθε $n \geqslant n_0$ έχουμε $f_n(k) = g(k)$ γιατί $(g(0), \ldots, g(n)) \sqsubseteq f_n$. Άρα $f_n(k) \xrightarrow{X} g(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και επομένως $f_n \xrightarrow{X^{\mathbb{N}}} g$. Αφού $f_n \in F$ για κάθε n και το F είναι κλειστό, προκύπτει ότι $g \in F$. Άρα $F = [T]$ και έχουμε αποδείξει την ευθεία κατεύθυνση.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση θεωρούμε μια ακολουθία $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του $[T]$ η οποία συγκλίνει στο $f \in X^{\mathbb{N}}$. Δείχνουμε ότι $f \in T$. Για κάθε n, υπάρχει i_0 έτσι ώστε για κάθε $i \geqslant i_0$ και κάθε $k \leqslant n$ έχουμε $f_i(k) = f(k)$. Ειδικότερα, $(f(0), \ldots, f(n)) \sqsubseteq f_{i_0}$. Εξ ορισμού $(f(0), \ldots, f(n)) \in T$. Προκύπτει ότι $f \in [T]$.

□

Πόρισμα 2.5.3. *Ένα σύνολο $F \subseteq \mathcal{N}$ είναι κλειστό αν και μόνο αν υπάρχει δένδρο T στο $\mathbb{N}$ με $F = [T]$.*

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε την Πρόταση 2.5.2 για $X = \mathbb{N}$ και θυμίζουμε ότι η τοπολογία του χώρου του Baire είναι η τοπολογία γινόμενο στο $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (Πρόταση 2.3.5). □

Τα συμπαγή σύνολα του $X^{\mathbb{N}}$ μπορούν επίσης να χαρακτηριστούν από τα σώματα μιας ειδικής κατηγορίας δένδρων.

Ορισμός 2.5.4. Έστω X μη κενό σύνολο και T ένα δένδρο στο X. Το T είναι **πεπερασμένης διακλάδωσης** αν για κάθε $u \in T$ υπάρχουν το πολύ πεπερασμένα $w \in T$ που είναι άμεσες επεκτάσεις του u, δηλαδή για κάθε $u \in T$ υπάρχουν $x_0, \ldots, x_{n-1} \in X$, έτσι ώστε

$$\forall x \; (u * (x) \in T \iff x \in \{x_0, \ldots, x_{n-1}\}).$$

Το προηγούμενο n μπορεί να παίρνει οσοδήποτε μεγάλες τιμές. Μπορούμε ακόμα να έχουμε $n = 0$, οπότε σε αυτή την περίπτωση η πιο πάνω ισοδυναμία σημαίνει ότι ο κόμβος $u \in T$ είναι τερματικός.

Ένα κλασικό παράδειγμα δένδρου πεπερασμένης διακλάδωσης είναι το σύνολο $\{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ όλων των **πεπερασμένων δυαδικών ακολουθιών**. Προφανώς, *το σώμα το $\{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ είναι ο χώρος του Cantor $2^{\mathbb{N}}$.*

Λήμμα 2.5.5 (Το Λήμμα του König). *Κάθε άπειρο δένδρο πεπερασμένης διακλάδωσης έχει άπειρο κλαδί.*

Απόδειξη. Θεωρούμε $X \neq \varnothing$ και ένα άπειρο δένδρο T στο X που είναι πεπερασμένης διακλάδωσης. Ορίζουμε

$$P = \{u \in T \mid \text{το υποδένδρο } T_u \text{ είναι άπειρο}\}.$$

Αφού $T_\Lambda = T$ έχουμε $\Lambda \in P$. Ισχυριζόμαστε ότι για κάθε $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$,

$$u \in P \implies \exists x \; u * (x) \in P. \tag{2.20}$$

Θεωρούμε $u \in P$. Αφού το δένδρο T είναι πεπερασμένης διακλάδωσης, υπάρχουν $x_0, \dots, x_{n-1} \in T$ έτσι ώστε $u*(x) \in T$, αν και μόνο αν $x \in \{x_0, \dots, x_{n-1}\}$. Επιπλέον, το u δεν είναι τερματικός κόμβος του T γιατί το T_u είναι άπειρο σύνολο. Από την (2.18) έχουμε ότι

$$T_u = \bigcup_{u*(x) \in T} T_{u*(x)} = \bigcup_{k=0}^{n-1} T_{u*(x_k)}.$$

Ένα από τα πιο πάνω σύνολα της πεπερασμένης ένωσης είναι άπειρο, γιατί αλλιώς το T_u θα ήταν πεπερασμένο. Άρα υπάρχει $k < n$ με $u * (x_k) \in P$.

Έχοντας αποδείξει την πιο πάνω συνεπαγωγή μπορούμε να βρούμε μια ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο X με τον ακόλουθο τρόπο. Αρχικά εφαρμόζουμε την (2.20) για $u = \Lambda \in P$ και βρίσκουμε $x_0 \in X$ με $(x_0) \in P$. Έπειτα, πάλι με εφαρμογή της (2.20) βρίσκουμε ένα στοιχείο $x_1 \in X$ με $(x_0, x_1) \in P$. Συνεχίζουμε ομοίως και βρίσκουμε μια ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο X με την ιδιότητα $(x_0, \dots, x_{n-1}) \in P$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Ειδικότερα έχουμε $(x_0, \dots, x_{n-1}) \in T$ για κάθε n και επομένως η $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι άπειρο κλαδί του X.

Σημείωση: Εδώ γίνεται χρήση του *Αξιώματος Εξαρτημένων Επιλογών* (DC), μια ασθενέστερη μορφή του Αξιώματος Επιλογής, η οποία είναι ευρέως αποδεκτή στα κλασικά Μαθηματικά. Παραπέμπουμε στην Άσκηση 2.5.28 για περισσότερες λεπτομέρειες. □

Πρόταση 2.5.6 (Συμπαγή σύνολα και δένδρα πεπερασμένης διακλάδωσης). *Έστω X μη κενό σύνολο με τη διακριτή τοπολογία και $K \subseteq X^{\mathbb{N}}$. Τότε το K είναι συμπαγές ως προς την τοπολογία γινόμενο του $X^{\mathbb{N}}$ αν και μόνο αν υπάρχει δένδρο T στο X πεπερασμένης διακλάδωσης με $K = [T]$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά ότι το K είναι συμπαγές. Ειδικότερα το K είναι κλειστό και από την Πρόταση 2.5.2 υπάρχει ένα δένδρο R στο X με $K = [R]$. Το R μπορεί να είναι άπειρης διακλάδωσης αλλά θα περάσουμε σε ένα υποδένδρο πεπερασμένης διακλάδωσης με το ίδιο σώμα.

Ορίζουμε $S \subseteq X^{<\mathbb{N}}$ ως εξής:

$$u \in S \iff [R_u] \neq \varnothing.$$

Αν $w \sqsubseteq u$, είναι εύκολο να δει κανείς ότι κάθε ακολουθία που είναι συμβατή με το u είναι συμβατή και με το w, επομένως $R_u \subseteq R_w$. Άρα αν $u \in S$ και $w \sqsubseteq u$, τότε $\varnothing \neq [R_u] \subseteq [R_w]$ και επομένως $w \in S$. Προκύπτει ότι αν το S είναι μη κενό τότε είναι και δένδρο.

Η περίπτωση $S = \varnothing$ δεν μπορεί να αποκλειστεί: αν $K = \varnothing$ τότε $[R] = \varnothing$ και $S = \varnothing$. Σε αυτή την περίπτωση επιλέγουμε για T ένα οποιοδήποτε δένδρο πεπερασμένης διακλάδωσης που έχει κενό σώμα, π.χ. $T = \{\Lambda\}$, οπότε $K = [T]$.

Στο εξής θεωρούμε ότι $K \neq \varnothing$ και επειδή $K = [R] = [R_\Lambda]$, έχουμε $\Lambda \in S$ και το S είναι δένδρο. Είναι εύκολο να επαληθεύσει κανείς ότι

$$[S_w] = [R_w] \tag{2.21}$$

για κάθε $w \in S$. (Τι συμπεραίνετε σε σχέση με την Άσκηση 2.5.19;)

Ισχυριζόμαστε ότι το S είναι πεπερασμένης διακλάδωσης και ότι $[S] = [R]$, συνεπώς μπορούμε να πάρουμε $T = S$.

Η ισότητα $[S] = [R]$ είναι άμεση από την (2.21) για $w = \Lambda \in S$. Επομένως δείχνουμε ότι το S είναι πεπερασμένης διακλάδωσης.

Έστω $u \in S$. Για κάθε $x \in X$ με $u * (x) \in S$ ορίζουμε

$$V(x) = \{u(0)\} \times \cdots \times \{u(|u| - 1)\} \times \{x\} \times X \times X \times \dots.$$

Τότε η οικογένεια $\{V(x) \mid u * (x) \in S\}$ είναι εύκολα ανοικτό κάλυμμα του συνόλου $[S_u]$. Από την Πρόταση 2.5.2 το $[S_u]$ είναι κλειστό υποσύνολο του K και συνεπώς είναι συμπαγές. Άρα υπάρχουν $x_0, \dots, x_m \in X$ έτσι ώστε

$$[S_u] \subseteq \bigcup_{i=0}^{m} V(x_i).$$

Δείχνουμε ότι για κάθε $x \in X$ με $u * (x) \in S$ υπάρχει $i \leqslant m$ με $x = x_i$. Έστω $w = u * (x) \in S$, τότε $[T_w] \neq \varnothing$. Από την (2.21) έχουμε $[S_w] = [R_w]$, άρα υπάρχει $f \in [S_w]$. Τότε $f(|w| - 1) = w(|w| - 1) = x$.

Από την άλλη, $f \in [S_w] \subseteq [S_u]$ και άρα υπάρχει $i \leqslant m$ με $f \in V(x_i)$. Εξ ορισμού $f(|w| - 1) = f(|u|) = x_i$. Συνεπώς $x = x_i$.

Επομένως, το S είναι πεπερασμένης διακλάδωσης. Αυτό αποδεικνύει την ευθεία κατεύθυνση.

Αντίστροφα, έστω ότι $K = [T]$, όπου το T είναι δένδρο πεπερασμένης διακλάδωσης. Δείχνουμε ότι το K είναι συμπαγές. Έστω $(V_i)_{i \in I}$ ένα ανοικτό κάλυμμα του K. Αν υπάρχει $i_0 \in I$ με $K \subseteq V_{i_0}$, τότε το $\{V_{i_0}\}$ αποτελεί προφανώς πεπερασμένο υποκάλυμμα. Επομένως θεωρούμε ότι $K \nsubseteq V_i$ για κάθε $i \in I$.

Ορίζουμε $S \subseteq X^{<\mathbb{N}}$ ως εξής:

$$u \in S \iff u \in T \ \& \ \forall i \in I \ [T_u] \nsubseteq V_i.$$

Από την υπόθεσή μας έχουμε $K = [T] = [T_\Lambda] \nsubseteq V_i$ για κάθε i, επομένως $\Lambda \in S$. Επιπλέον, αν $w \sqsubseteq u \in S$ τότε $u, w \in T$ και $[T_u] \subseteq [T_w]$, άρα για κάθε i έχουμε $[T_w] \nsubseteq V_i$, δηλαδή $w \in S$. Επομένως, το S είναι υποδένδρο του T.

Υποθέτουμε προς άτοπο ότι το S είναι άπειρο. Αφού το S (ως υποδένδρο του T) είναι πεπερασμένης διακλάδωσης, από το Λήμμα του König (Λήμμα 2.5.5) υπάρχει ένα άπειρο κλαδί $f \in [S] \subseteq [T] = K$. Αφού το $(V_i)_{i \in I}$ είναι κάλυμμα του K, υπάρχει $i_0 \in I$ με $f \in V_{i_0}$, και αφού το V_{i_0} είναι ανοικτό, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με

$$\{f(0)\} \times \cdots \times \{f(n)\} \times X \times X \cdots \subseteq V_{i_0}.$$

Θέτουμε $u = (f(0), \dots, f(n)) \in S$ και έχουμε

$$[T_u] \subseteq \{f(0)\} \times \cdots \times \{f(n)\} \times X \times X \cdots \subseteq V_{i_0},$$

που είναι άτοπο γιατί $u \in S$.

Άρα το S είναι πεπερασμένο σύνολο. Παίρνουμε $n = \max\{|u| \mid u \in S\}$ και $F = \{u \in T \mid |u| = n + 1\}$. Τότε το F είναι πεπερασμένο σύνολο (Άσκηση 2.5.23). Το μήκος κάθε $u \in F$ είναι μεγαλύτερο από τα μήκη των στοιχείων του S. Άρα για κάθε $u \in F$ έχουμε $u \notin S$, και αφού $u \in T$ ισχύει

$$\exists i \in I \ [T_u] \subseteq V_i. \tag{2.22}$$

Θεωρούμε το σύνολο J όλων των i όπως πιο πάνω, δηλαδή

$$J = \{i \in I \mid \exists u \in F \ [T_u] \subseteq V_i\},$$

και δείχνουμε ότι η πεπερασμένη υποοικογένεια $\{V_i \mid i \in J\}$ αποτελεί κάλυμμα του K. Πράγματι, αν $f \in K = [T]$ τότε $u = (f(0), \dots, f(n)) \in F$ και προφανώς $f \in [T_u]$. Από την (2.22) υπάρχει $i \in I$ με $[T_u] \subseteq V_i$. Άρα $i \in J$ και $f \in V_i$.

Σημείωση. Η απόδειξη της αντίστροφης κατεύθυνσης μπορεί να γίνει και με πιο στοιχειώδη τρόπο χωρίς την επίκληση του Λήμματος του König. Τότε όμως θα πρέπει να επαναλάβουμε στην ουσία την απόδειξη αυτού του λήμματος. Αυτό δεν είναι σύμπτωση. Όπως είναι γνωστό, το Λήμμα του König και η αντίστροφη κατεύθυνση της πρότασης που μόλις αποδείξαμε αποτελούν *ισοδύναμες εκφάνσεις της ίδιας μαθηματικής αρχής* (Άσκηση 2.5.29).

□

Πόρισμα 2.5.7. *Ένα σύνολο $K \subseteq \mathcal{N}$ είναι συμπαγές αν και μόνο αν υπάρχει δένδρο T στο $\mathbb{N}$ πεπερασμένης διακλάδωσης με $K = [T]$.*

Απόδειξη. Το συμπέρασμα είναι άμεσο από την Πρόταση 2.5.6 για $X = \mathbb{N}$ και επειδή η τοπολογία του χώρου του Baire είναι η τοπολογία γινόμενο στο $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (Πρόταση 2.3.5). ▫

Πόρισμα 2.5.8. *Ο χώρος του $\mathcal{N}$ δεν είναι σ-συμπαγής, δηλαδή για κάθε ακολουθία $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από συμπαγή υποσύνολα του $\mathcal{N}$ η ένωση $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ είναι γνήσιο υποσύνολο του $\mathcal{N}$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε μια ακολουθία $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από συμπαγή υποσύνολα του $\mathcal{N}$ και με εφαρμογή του Πορίσματος 2.5.7 μια ακολουθία $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δένδρων πεπερασμένης διακλάδωσης με $K_n = [T_n]$ για κάθε n. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $K_n \neq \emptyset$ για κάθε n.

Αν το T είναι δένδρο πεπερασμένης διακλάδωσης, τότε για κάθε $m \in \mathbb{N}$ υπάρχουν το πολύ πεπερασμένα $u \in T$ με $|u| = m$ (Άσκηση 2.5.23). Συνεπώς, για κάθε n το σύνολο $\{u \in T_n \mid |u| = n + 1\}$ είναι πεπερασμένο υποσύνολο του T_n, και άρα και το υποσύνολο των φυσικών αριθμών $A_n = \{u(n) \in \mathbb{N} \mid u \in T_n \ \& \ |u| = n + 1\}$ είναι πεπερασμένο. Μάλιστα, το A_n είναι μη κενό γιατί $K_n = [T_n] \neq \emptyset$.

Ορίζουμε $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με

$$\alpha(n) = \max A_n + 1$$

και δείχνουμε ότι $\alpha \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$.

Για να το δούμε αυτό θεωρούμε $n \in \mathbb{N}$ και $\beta \in K_n = [T_n]$. Τότε το $u = \beta|(n + 1)$ είναι κόμβος του T_n μήκους $n + 1$ και συνεπώς ο φυσικός αριθμός $u(n) = \beta(n)$ είναι στοιχείο του A_n. Προκύπτει ότι

$$\alpha(n) = \max A_n + 1 > \max A_n \geqslant \beta(n).$$

Ειδικότερα έχουμε $\alpha(n) > \beta(n)$ και άρα $\alpha \neq \beta$ για κάθε $\beta \in K_n$. ▫

Δένδρα και συνεχείς συναρτήσεις. Οι συνεχείς συναρτήσεις μεταξύ σωμάτων δένδρων μπορούν να προσεγγιστούν μέσω συναρτήσεων μεταξύ των αντίστοιχων δένδρων.

Ορισμός 2.5.9. Δίνονται δύο δένδρα S και T πάνω σε ένα μη κενό σύνολο X και μια συνάρτηση $\varphi : S \to T$. Η φ ονομάζεται **μονότονη** αν για κάθε $u, v \in S$ με $u \sqsubseteq v$ έχουμε $\varphi(u) \sqsubseteq \varphi(v)$. Θα λέμε ότι η φ είναι **κατάλληλη** (**proper**) αν για κάθε $f \in [S]$ τα μήκη των $\varphi(f|n)$ αποκτούν οσοδήποτε μεγάλο μήκος, δηλαδή για κάθε $M \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $|\varphi(f|n)| \geqslant M$.

Είναι σαφές ότι αν έχουμε μια κατάλληλη μονότονη συνάρτηση $\varphi : S \to T$ τότε για κάθε $f \in [S]$ ισχύει

$$\varphi((f(0))) \sqsubseteq \varphi((f(0), f(1))) \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq \varphi((f(0), f(1) \ldots, f(n))) \sqsubseteq \ldots$$

και πως η ένωση όλων αυτών των κλαδιών παράγει ένα άπειρο κλαδί του T. Επομένως ορίζεται η συνάρτηση

$$\varphi^* : [S] \to [T] : \varphi^*(f) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \varphi(f|n).$$

Με άλλα λόγια, η φ^* ικανοποιεί

$$\varphi^*(f)(m) = x \iff \exists n \ (\ |\varphi(f|n)| > m \ \& \ \varphi(f|n)(m) = x \ )$$

για κάθε $f \in [T]$, $m \in \mathbb{N}$, και $x \in X$.

Πρόταση 2.5.10. *Θεωρούμε ένα μη κενό σύνολο X με τη διακριτή τοπολογία και δύο δένδρα S και T στο X, με το S κλαδεμένο. Τότε μια συνάρτηση $\Phi : [S] \to [T]$ είναι συνεχής αν και μόνο αν υπάρχει κατάλληλη μονότονη $\varphi : S \to T$ με $\Phi = \varphi^*$.*

Απόδειξη. Στην απόδειξη συμβολίζουμε $V_u = \{g \in X^{\mathbb{N}} \mid u \sqsubseteq g\}$, όπου $u \in X^{<\mathbb{N}}$. Τα V_u, $u \in X^{<\mathbb{N}}$, αποτελούν βάση για τον $X^{\mathbb{N}}$.

Δείχνουμε αρχικά την αντίστροφη κατεύθυνση: θεωρούμε μια κατάλληλη μονότονη $\varphi : S \to T$ και δείχνουμε ότι η $\varphi^* : [S] \to [T]$ είναι συνεχής. Για κάθε $u \in X^{<\mathbb{N}}$ και κάθε $f \in [S]$ έχουμε

$$\begin{aligned}\varphi^*(f) \in V_u &\iff u \sqsubseteq \varphi^*(f)\\ &\iff \exists n \ u \sqsubseteq \varphi(f|n).\end{aligned}$$

Επομένως $(\varphi^*)^{-1}[V_u] = (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \cap [S]$, όπου $A_n = \{f \in X^{\mathbb{N}} \mid u \sqsubseteq \varphi(f|n)\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $f \in A_n$ και $h \in X^{\mathbb{N}}$ με $h|n = f|n$, τότε $h \in A_n$. Συνεπώς το A_n είναι ανοικτό υποσύνολο του $X^{\mathbb{N}}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα το $(\varphi^*)^{-1}[V_u]$ είναι ανοικτό σύνολο στο $[S]$ και η φ^* είναι συνεχής συνάρτηση. (Παρατηρήστε ότι δεν χρησιμοποιήσαμε την υπόθεση ότι το S είναι κλαδεμένο.)

Αντίστροφα θεωρούμε μια συνεχή συνάρτηση $\Phi : [S] \to [T]$. Η ιδέα είναι να ορίσουμε την φ, έτσι ώστε να έχουμε $\varphi[V_u \cap [S]] \subseteq V_{\varphi(u)}$ για κάθε $u \in S$. Αρχικά παρατηρούμε ότι για κάθε $u \in S$ και $w_1, w_2 \in T$ αν $\Phi[V_u \cap [S]] \subseteq V_{w_1} \cap V_{w_2}$ τότε $w_1 || w_2$. Αυτό συμβαίνει γιατί το S είναι κλαδεμένο και συνεπώς για κάθε $u \in S$ έχουμε $V_u \cap [S] \neq \emptyset$, άρα $V_{w_1} \cap V_{w_2} \neq \emptyset$, το οποίο συμβαίνει μόνο όταν $w_1 || w_2$. Επιπλέον, για κάθε $u \in T$ υπάρχει $w \in S$ με $\Phi[V_u \cap [S]] \subseteq V_w$, συγκεκριμένα $w = \Lambda$.

Συνεπώς, για κάθε $u \in S$ και κάθε $N \in \mathbb{N}$ υπάρχει η «μεγαλύτερη» ακολουθία $w \in S$ με μήκος $\leqslant N$ και $\Phi[V_u \cap [S]] \subseteq V_w$, δηλαδή η w ικανοποιεί τις τελευταίες δύο ιδιότητες και για κάθε $w' \in S$ που ικανοποιεί τις τελευταίες δύο ιδιότητες ισχύει $w' \sqsubseteq w$. Ορίζουμε

$$\varphi : S \to T : \varphi(u) = \text{η μεγαλύτερη ακολουθία } w \in S \text{ με } |w| \leqslant |u| \text{ και } \Phi[V_u \cap [S]] \subseteq V_w.$$

Αν $u_1 \sqsubseteq u_2 \in S$ τότε $|w_1| \leqslant |u_1| \leqslant |u_2|$, επιπλέον $\Phi[V_{u_2} \cap [S]] \subseteq \phi[V_{u_1} \cap [S]] \subseteq V_{\varphi(u_1)}$. Επομένως, το $\varphi(u_1) \in T$ είναι ένα w' που ικανοποιεί $|w'| \leqslant |u_2|$ και $\Phi[V_{u_2} \cap [S]] \subseteq V_{w'}$. Από τον ορισμό του $\varphi(u_2)$ έχουμε ότι $\varphi(u_1) \sqsubseteq \varphi(u_2)$.

Για να δείξουμε τις υπόλοιπες ιδιότητες για τη φ θεωρούμε ένα $f \in [S]$ και $m \in \mathbb{N}$. Επειδή η Φ είναι συνεχής στο f υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $\Phi[V_{f|n} \cap [S]] \subseteq V_{\Phi(f)|m}$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $n \geqslant M$ και άρα $|\Phi(f)|m| = m \leqslant n = |f|n|$. Επομένως, από τον ορισμό του $\varphi(f|n)$ ισχύει $\Phi(f)|m \sqsubseteq \varphi(f|n)$. Ειδικότερα η $\varphi(f|n)$ έχει μήκος τουλάχιστον $|\Phi(f)|m| = m$.

Το πιο πάνω δείχνει ότι η φ είναι κατάλληλη και επιπλέον ότι $\varphi^* = \Phi$. Για να δούμε το τελευταίο, παρατηρούμε ότι για κάθε m υπάρχει n όπως πιο πάνω, δηλαδή $n \geqslant m$ και $\Phi(f)|m \sqsubseteq \varphi(f|n)$. Επειδή $\varphi(f|n) \sqsubseteq \varphi^*(f)$, προκύπτει ότι $\Phi(f)|m \sqsubseteq \varphi^*(f)$ για κάθε m και συνεπώς $\Phi(f) = \varphi^*(f)$. □

Δένδρα στο $\mathbb{N}$. Στο εξής, και εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά, θα ασχολούμαστε με δένδρα στους φυσικούς αριθμούς. Πολλά από τα επόμενα αποτελέσματα και έννοιες πάνω σε δένδρα μπορούν να διατυπωθούν σε γενικότερο πλαίσιο. Παρ' όλα αυτά η περίπτωση $X = \mathbb{N}$ είναι επαρκής για τους σκοπούς μας.

Ορισμός 2.5.11 (Ο χώρος των δένδρων Tr). Θεωρούμε το σύνολο Tr όλων των δένδρων στο $\mathbb{N}$,

$$\mathrm{Tr} = \{T \subseteq \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \mid \text{το } T \text{ είναι δένδρο στο } \mathbb{N}\}.$$

Θεωρούμε επίσης μια απαρίθμηση του $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, για παράδειγμα τη φυσική $(\mathrm{u}_s)_{s\in\mathbb{N}}$, που έχουμε σταθεροποιήσει στο 2.2.

Τότε σε κάθε δένδρο T στο $\mathbb{N}$ αντιστοιχεί το $\alpha_T \in 2^{\mathbb{N}}$ με

$$\alpha_T(s) = 1 \iff \mathrm{u}_s \in T.$$

Είναι σαφές ότι η συνάρτηση

$$F : \mathrm{Tr} \to 2^{\mathbb{N}} : F(T) = \alpha_T$$

είναι μονομορφισμός.

Θεωρούμε το Tr με την *τοπολογία που λαμβάνει* από την F, δηλαδή ένα $V \subseteq \mathrm{Tr}$ είναι ανοικτό αν και μόνο αν υπάρχει ανοικτό $W \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ με $V = F^{-1}[W]$. Αυτή είναι η ελάχιστη τοπολογία στο Tr ως προς την οποία η F είναι συνεχής.

Μια συμβατή μετρική στον Tr είναι η

$$d(T, S) = d_{\mathcal{N}}(F(T), F(S)) = d_{\mathcal{N}}(\alpha_T, \alpha_S).$$

Η απόδειξη του τελευταίου γίνεται με τα ίδια τα επιχειρήματα που χρησιμοποιούνται στην απόδειξη της Πρότασης 2.1.2.

Ο χαρακτηρισμός της σύγκλισης στον Tr δίνεται στην Άσκηση 2.5.25.

Το σύνολο Tr με την προηγούμενη τοπολογία είναι ο **χώρος των δένδρων** στο $\mathbb{N}$.

Πρόταση 2.5.12. *Ο χώρος των δένδρων* Tr *είναι συμπαγής Πολωνικός χώρος.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την απεικόνιση $F = (T \in \mathrm{Tr} \mapsto \alpha_T \in 2^{\mathbb{N}})$ και δείχνουμε ότι το σύνολο $F[\mathrm{Tr}]$ είναι κλειστό υποσύνολο του $2^{\mathbb{N}}$. Επειδή ο $2^{\mathbb{N}}$ είναι συμπαγής, προκύπτει ότι το $F[\mathrm{Tr}]$ είναι συμπαγές σύνολο. Ισοδύναμα το $F[\mathrm{Tr}]$ με τη σχετική τοπολογία είναι συμπαγής τοπολογικός χώρος. Ο χώρος Tr είναι τοπολογικά ισομορφικός με τον Tr μέσω της F, επομένως και ο Tr είναι συμπαγής.

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι το συμπλήρωμα του $F[\mathrm{Tr}]$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $2^{\mathbb{N}}$. Έστω $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$ με $\alpha \notin \{\alpha_T \mid T \in \mathrm{Tr}\}$ και $s_0 \in \mathbb{N}$ με $\mathrm{u}_{s_0} = \Lambda$. Αν $\alpha(s_0) = 0$, τότε για κάθε $\beta \in T$ με $\beta(s_0) = \alpha(s_0)$ έχουμε $\beta \notin \{\alpha_T \mid T \in \mathrm{Tr}\}$. (Αλλιώς $\beta = \alpha_T$ και η κενή ακολουθία δεν θα ανήκε στο T.)

Επομένως, θεωρούμε ότι $\alpha(s_0) = 1$. Αν για κάθε s με $\alpha(s) = 1$ και κάθε t με $\mathrm{u}_t \sqsubseteq \mathrm{u}_s$ ισχύει $\alpha(t) = 1$, τότε $\alpha = \alpha_T$ όπου το T είναι το δένδρο που ορίζεται ως εξής:

$$T = \{u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \mid \exists s\ (u = \mathrm{u}_s \ \&\ \alpha(s) = 1)\}.$$

Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί υποθέσαμε πως $\alpha \notin \{\alpha_T \mid T \in \mathrm{Tr}\}$. Επομένως, υπάρχουν s, t με $\alpha(s) = 1$, $\mathrm{u}_t \sqsubseteq \mathrm{u}_s$ και $\alpha(t) = 0$. Τότε για κάθε $\beta \in 2^{\mathbb{N}}$ με $\beta(i) = \alpha(i)$ για κάθε $i \leqslant \max\{t, s\}$ έχουμε $\beta \notin \{\alpha_T \mid T \in \mathrm{Tr}\}$.

Σε κάθε περίπτωση, το συμπλήρωμα $2^{\mathbb{N}} \setminus \{\alpha_T \mid T \in \mathrm{Tr}\}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $2^{\mathbb{N}}$. □

Ορισμός 2.5.13. Ορίζουμε τα σύνολα

$$\mathrm{WF} = \{T \in \mathrm{Tr} \mid [T] = \varnothing\} \tag{2.23}$$

$$\mathrm{IF} = \{T \in \mathrm{Tr} \mid [T] \neq \varnothing\} \tag{2.24}$$

των θεμελιωμένων και μη θεμελιωμένων αντίστοιχα δένδρων στο $\mathbb{N}$.

Το επόμενο αποτέλεσμα μπορεί να θεωρηθεί ως η *παραμετρική εκδοχή* του Πορίσματος 2.5.3 και αποτελεί μία εξαιρετικά χρήσιμη εφαρμογή στη θεωρία των αναλυτικών και συναναλυτικών συνόλων που θα μελετήσουμε στη συνέχεια.

Λήμμα 2.5.14 (Το Βασικό Λήμμα Αναπαράστασης Κλειστών Συνόλων). *Θεωρούμε έναν Πολωνικό χώρο* $\mathcal{X}$*, ένα* $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ *και το σύνολο* $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ *με τη διακριτή μετρική. Τότε το* P *είναι κλειστό ακριβώς όταν υπάρχει ένα κλειστό σύνολο* $T \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ *με τις ιδιότητες το* $T(x) = \{u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \mid (x, u) \in T\}$ *να είναι δένδρο στο* $\mathbb{N}$ *για κάθε* $x \in \mathcal{X}$ *και*

$$P = \{(x, \alpha) \in \mathcal{X} \times \mathcal{N} \mid \alpha \in [T(x)]\}.$$

Απόδειξη. Για τη μία κατεύθυνση υποθέτουμε ότι το P είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathcal{N}$ και θεωρούμε μια αριθμήσιμη βάση $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του $\mathcal{X}$. Συμβολίζουμε με $\mathrm{c}P$ το συμπλήρωμα του P στον $\mathcal{X} \times \mathcal{N}$. Τότε

$$\mathrm{c}P = \bigcup_{n\in I, v\in J} V_n \times \mathcal{N}_v \tag{2.25}$$

όπου $I \subseteq \mathbb{N}$ και $J \subseteq \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$.

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\Lambda \notin J$. Σε αντίθετη περίπτωση αντικαθιστούμε κάθε $V_n \times \mathcal{N}_\Lambda \subseteq \mathrm{c}P$, $n \in I$, με την ένωση $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} V_n \times \mathcal{N}_{(i)}$. Επειδή

$$V_n \times \mathcal{N}_\Lambda = V_n \times \mathcal{N} = V_n \times \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{N}_{(i)} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (V_n \times \mathcal{N}_{(i)}),$$

η (2.25) παραμένει αληθής αν αντικαταστήσουμε το J με το

$$J' = (J \setminus \{\Lambda\}) \cup \{(i) \mid i \in \mathbb{N}\}.$$

Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι $V_0 = \emptyset$. Αλλιώς αντικαθιστούμε την ακολουθία $(V_0, V_1, \ldots, V_n, \ldots)$ με την $(\emptyset, V_0, V_1, \ldots, V_n, \ldots)$. Η (2.25) εξακολουθεί να παραμένει αληθής.

Ορίζουμε

$$(x, u) \in T \iff \forall v \in J \ \forall n \in I \text{ με } n \leqslant |u| \ (x \notin V_n \ \& \ v \not\sqsubseteq u). \tag{2.26}$$

Επειδή κάθε V_n είναι ανοικτό σύνολο και το $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ είναι εφοδιασμένο με τη διακριτή μετρική, είναι εύκολο να δει κανείς ότι το T είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ (βλ. την Άσκηση 2.5.26).

Θεωρούμε $x \in \mathcal{X}$ και δείχνουμε αρχικά ότι το $T(x)$ είναι δένδρο. Παρατηρούμε ότι αν $n \leqslant |\Lambda|$ τότε $n = 0$ και άρα $x \notin V_0 = \emptyset$. Επιπλέον, $v \not\sqsubseteq \Lambda$ για κάθε $v \in J$ επειδή $\Lambda \notin J$. Από την (2.26) έχουμε ότι $\Lambda \in T(x)$ και επομένως $T(x) \neq \emptyset$. Αν $u' \sqsubseteq u$ και $u \in T(x)$, τότε για κάθε $v \in J$ και κάθε $n \in I$ με $n \leqslant |u|$ ισχύει $x \notin V_n$ και $v \not\sqsubseteq u$, απ' όπου προκύπτει ότι για κάθε $v \in J$ και κάθε $n \in I$ με $n \leqslant |u'| \leqslant |u|$ ισχύει $x \notin V_n$ και $v \not\sqsubseteq u'$. Συνεπώς, $u' \in T(x)$ και το $T(x)$ είναι δένδρο.

Τώρα δείχνουμε τη ζητούμενη ισότητα για το P. Αν $(x, \alpha) \notin P$, τότε υπάρχει $n \in I$ με $x \in V_n$. Προκύπτει από την (2.26) ότι κάθε $u \in T(x)$ πρέπει να έχει μήκος μικρότερο του n και συνεπώς $[T(x)] = \emptyset$. Ειδικότερα $\alpha \notin [T(x)]$.

Αν $(x, \alpha) \in P$ τότε για κάθε $n \in I$ και κάθε $v \in J$ έχουμε $x \notin V_n$ και $\alpha \notin \mathcal{N}_v$, δηλαδή $v \not\sqsubseteq \alpha$. Άρα

$$\forall t \in \mathbb{N} \ \forall v \in J \ (v \not\sqsubseteq \alpha|t).$$

Αφού $x \notin \bigcup_{n\in I} V_n$ ισχύει

$$\forall t \ \forall v \in J \ \forall n \in I \ (x \notin V_n \ \& \ v \not\sqsubseteq \alpha|t).$$

Ειδικότερα το ζεύγος $(x, \alpha|t)$ ικανοποιεί το δεξιό σκέλος της (2.26) και άρα $\alpha|t \in T(x)$ για κάθε $t \in \mathbb{N}$, δηλαδή $\alpha \in [T(x)]$.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση θεωρούμε ένα κλειστό σύνολο $T \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με $P = \{(x, \alpha) \in \mathcal{X} \times \mathcal{N} \mid \alpha \in [T(x)]\}$. Τότε

$$\begin{aligned}(x, \alpha) \in P &\iff \forall t \ \alpha|t \in T(x)\\ &\iff \forall t \ (x, \alpha|t) \in T.\end{aligned}$$

Αφού το T είναι κλειστό και η συνάρτηση $f_t = (\alpha \mapsto \alpha|t)$ είναι συνεχής (Άσκηση 2.3.18), το σύνολο P είναι κλειστό. $\square$

Ασκήσεις

Άσκηση 2.5.15. Δώστε τα παραδείγματα δένδρων T^0, T^1, T^2 και T^3 στο $\mathbb{N}$ με τις εξής ιδιότητες.

(i) Το T^0 είναι πεπερασμένο σύνολο και έχει τουλάχιστον μία ακολουθία μήκους 3.

(ii) Το T^1 είναι άπειρο σύνολο και κάθε $u \in T^1$ έχει μήκος το πολύ 1.

(iii) Κάθε $u \in T^2$ έχει ακριβώς τρεις άμεσες προεκτάσεις μέσα στο T^2.

(iv) Το T^3 είναι πεπερασμένης διακλάδωσης και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $u \in T^3$ που έχει ακριβώς n άμεσες προεκτάσεις μέσα στο T^3.

Επίσης, επιλέξτε $u \in T^3$ και $w \notin T^3$ με $|u| = |w| = 4$ και βρείτε τα υποδένδρα T^3_u, T^3_w.

Άσκηση 2.5.16. Για κάθε T που είναι ένα από τα δένδρα T^0, T^1, T^2 και T^3 που δώσατε στην Άσκηση 2.5.15 βρείτε το σώμα $[T]$.

Άσκηση 2.5.17. Για κάθε μη κενά σύνολα X και $J \subseteq X^{<\mathbb{N}}$ το

$$T(J) = \{u \in X^{<\mathbb{N}} \mid \exists w \in J \ u \sqsubseteq w\}$$

είναι το ελάχιστο δένδρο στο X που περιέχει το J. Δηλαδή το $T(J)$ είναι δένδρο στο X, $J \subseteq T(J)$ και για κάθε δένδρο S στο X με $J \subseteq S$ έχουμε $T(J) \subseteq S$.

Το $T(J)$ λέγεται **το δένδρο που παράγεται** από το J.

Άσκηση 2.5.18. Για κάθε δένδρο T σε ένα σύνολο $X \neq \emptyset$ και για κάθε $u \in X^{<\mathbb{N}}$ το σύνολο που ορίστηκε στην (2.17)

$$T_u = \{w \in T \mid u||w\}$$

είναι δένδρο στο X. Επιπλέον ισχύουν οι ισότητες (2.18) και (2.19):

$$T_u = \bigcup_{u*(x)\in T} T_{u*(x)} \quad \text{αν το } u \text{ δεν είναι τερματικός κόμβος του } T,$$
$$[T_u] = \bigcup_{u*(x)\in T} [T_{u*(x)}].$$

Άσκηση 2.5.19. Για κάθε δένδρο T σε ένα μη κενό σύνολο X, το οποίο έχει μη κενό σώμα, υπάρχει ένα κλαδεμένο δένδρο $S \subseteq T$ (δηλαδή το S δεν έχει τερματικούς κόμβους) με $[S_u] = [T_u]$ για κάθε $u \in T$. Ειδικότερα έχουμε $[S] = [T]$.

Άσκηση 2.5.20. Για κάθε ένα από τα ακόλουθα κλειστά σύνολα της Άσκησης 2.3.16 βρείτε δένδρο T στο $\mathbb{N}$ του οποίου το σώμα είναι το αντίστοιχο κλειστό σύνολο,

$$A = \{(n) * (0, 0, 0, \dots) \mid n \in \mathbb{N}\},$$
$$B = \{(0)^n * (n, 1, 1, 1, \dots) \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{(0, 0, 0, \dots)\}$$
$$C = \{(1)^n * (2, 3, 4, 5, \dots) \mid n \in \mathbb{N}\} \ \cup \{(1, 1, \dots, 1, \dots)\}$$
$$\mathcal{N}_u, \ \ u \in \mathbb{N}.$$

Είναι χρήσιμο να εξηγήσουμε γιατί η παραμετρικοποιημένη εκδοχή ενός αποτελέσματος είναι πιο ισχυρή από την απλή εκδοχή. Αυτός είναι ο στόχος της επόμενης άσκησης.

Άσκηση 2.5.21. Συμπεράνετε από το Λήμμα 2.5.14 τον χαρακτηρισμό των κλειστών υποσυνόλων του $\mathcal{N}$ ως τα σύνολα $[T]$, όπου το T είναι δένδρο στο $\mathbb{N}$ (Πόρισμα 2.5.3).

Άσκηση 2.5.22. Συμπεράνετε από το Πόρισμα 2.5.7 ότι το σύνολο $2^{\mathbb{N}}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathcal{N}$ (Πρόταση 2.3.11).

Άσκηση 2.5.23. Για κάθε δένδρο T πεπερασμένης διακλάδωσης και κάθε $n \in \mathbb{N}$ το σύνολο $F_n = \{u \in T \mid |u| = n\}$ είναι πεπερασμένο.

Άσκηση 2.5.24 (Δείτε [**8**] - 2.8)**.** Για κάθε μη κενά κλειστά σύνολα $F \subseteq H \subseteq \mathcal{N}$ υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $\Phi : H \to F$ με $\Phi(\alpha) = \alpha$ για κάθε $\alpha \in F$.

Άσκηση 2.5.25. Για κάθε πεπερασμένα σύνολα $I, J \subseteq \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ ορίζουμε

$$B(I, J) = \{T \in \mathrm{Tr} \mid \forall u \in I \ \forall \ w \in J \ (u \in T \ \& \ w \notin T)\}.$$

Τότε η οικογένεια όλων των συνόλων $B(I, J)$ αποτελεί βάση για την τοπολογία του Tr.

Συμπεράνετε ότι για κάθε ακολουθία δένδρων $(T_l)_{l\in\mathbb{N}}$ στον Tr και κάθε $T \in \mathrm{Tr}$ έχουμε

$$T_l \xrightarrow{l\to\infty} T \iff \forall u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \ \exists l_0 \ \forall l \geqslant l_0 \ [\ u \in T_l \ \longleftrightarrow \ u \in T\ ].$$

Άσκηση 2.5.26. Έστω $\mathcal{X}$ Πολωνικός χώρος, $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία από ανοικτά υποσύνολα του $\mathcal{X}$ και $T \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ που ικανοποιεί την ισοδυναμία (2.26),

$$(x, u) \in T \iff \forall v \in J \ \forall n \in I \text{ με } n \leqslant |u| \ (x \notin V_n \ \& \ v \nsubseteq u).$$

Τότε το T είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ και η συνάρτηση $f : \mathcal{X} \to \mathrm{Tr}$

$$f(x) = T(x) = \{u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \mid (x, u) \in T\}$$

αντιστρέφει ανοικτά σύνολα σε F_σ σύνολα.

Επιπλέον, αν τα V_n είναι κλειστά-ανοικτά υποσύνολα του $\mathcal{X}$ τότε η συνάρτηση f είναι συνεχής.

Άσκηση 2.5.27. Το Βασικό Λήμμα Αναπαράστασης κλειστών συνόλων (Λήμμα 2.5.14) ισχύει και για υποσύνολα του $\mathcal{X} \times Y^{\mathbb{N}}$.

Για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$, κάθε μη κενό σύνολο Y και κάθε $P \subseteq \mathcal{X} \times Y^{\mathbb{N}}$, το P είναι κλειστό ακριβώς όταν υπάρχει ένα κλειστό σύνολο $T \subseteq \mathcal{X} \times Y^{<\mathbb{N}}$ με τις ιδιότητες το σύνολο $T(x) = \{u \in Y^{<\mathbb{N}} \mid (x, u) \in T\}$ να είναι δένδρο στο Y για κάθε $x \in \mathcal{X}$ και

$$P = \{(x, f) \in \mathcal{X} \times Y^{\mathbb{N}} \mid f \in [T(x)]\}.$$

Το Y θεωρείται με τη διακριτή μετρική.

Το **Αξίωμα Εξαρτημένης Επιλογής** (DC) είναι η πρόταση: για κάθε μη κενό σύνολο X και κάθε $Q \subseteq X \times X$ με την ιδιότητα $\forall x \in X \ \exists y \in X \ (x, y) \in Q$ υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to X$ με $(f(n), f(n+1)) \in Q$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Το **Αξίωμα Απαριθμητής Επιλογής** ($\mathrm{AC}_{\mathbb{N}}$) είναι η πρόταση: για κάθε μη κενό σύνολο X και κάθε $P \subseteq \mathbb{N} \times X$ με την ιδιότητα $\forall n \in \mathbb{N} \ \exists x \in X \ (n, x) \in P$ υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to X$ με $(n, f(n)) \in P$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Όπως είναι γνωστό, ισχύει η συνεπαγωγή DC $\Rightarrow \mathrm{AC}_{\mathbb{N}}$. Το $\mathrm{AC}_{\mathbb{N}}$ αποτελεί μια από τις πιο θεμελιώδεις μορφές επιλογής στα κλασικά Μαθηματικά, καθώς μας επιτρέπει να λαμβάνουμε ακολουθίες με συγκεκριμένες ιδιότητες.

Άσκηση 2.5.28. Εξηγήστε λεπτομερώς την εφαρμογή του Αξιώματος Εξαρτημένης Επιλογής DC στην κατασκευή του άπειρου κλαδιού στην απόδειξη του Λήμματος του König (Λήμμα 2.5.5).

Άσκηση 2.5.29. Δεδομένου του Αξιώματος Απαριθμητής Επιλογής $\mathrm{AC}_{\mathbb{N}}$, δείξτε ότι το Λήμμα του König (Λήμμα 2.5.5) είναι ισοδύναμο με την εξής πρόταση: για κάθε δένδρο T σε ένα μη κενό σύνολο X με τη διακριτή μετρική, αν το T είναι πεπερασμένης διακλάδωσης τότε το $[T]$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $X^{\mathbb{N}}$. (Αυτή είναι η μία κατεύθυνση της Πρότασης 2.5.6.)

2.6. Μερικές Καθολικές Ιδιότητες

Είδαμε ότι κάθε Πολωνικός χώρος $\mathcal{X}$ είναι συνεχής εικόνα του $\mathcal{N}$ και κάθε υπεραριθμήσιμος Πολωνικός χώρος $\mathcal{X}$ περιέχει έναν χώρο που είναι τοπολογικά ισομορφικός με το $2^{\mathbb{N}}$. Αναφερόμαστε σε αυτές τις ιδιότητες ως *καθολικές* για τον χώρο $\mathcal{N}$ και $2^{\mathbb{N}}$, αντίστοιχα ακριβώς γιατί αναφέρονται είτε σε όλους τους Πολωνικούς χώρους είτε σε μια μεγάλη υποκλάση αυτών (στην προκειμένη περίπτωση στην κλάση των υπεραριθμήσιμων Πολωνικών χώρων.) Εδώ θα δείξουμε μερικές ακόμα καθολικές ιδιότητες για τους χώρους του Baire, του Cantor και για τους χώρους $[0,1]^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Ορισμός 2.6.1. Συμβολίζουμε το κλειστό διάστημα $[0,1]$ με $\mathbb{I}$. Ο **κύβος του Hilbert** είναι το σύνολο $\mathbb{H} = \mathbb{I}^{\mathbb{N}}$ με την τοπολογία γινόμενο. Σύμφωνα με όσα έχουμε πει, ο $\mathbb{H}$ είναι μετρικοποιήσιμος, διαχωρίσιμος και συμπαγής, επομένως και πλήρης ως προς οποιαδήποτε μετρική που παράγει την τοπολογία του. Προκύπτει ότι ο $\mathbb{H}$ είναι συμπαγής Πολωνικός χώρος.

Μια βάση για την τοπολογία του αποτελείται από όλα τα σύνολα της μορφής

$$((a_0,b_0)\cap\mathbb{I})\times((a_0,b_0)\cap\mathbb{I})\times\cdots\times((a_n,b_n)\cap\mathbb{I})\times\mathbb{I}\times\mathbb{I}\times\dots$$

όπου $a_0,b_0,\dots,a_n,b_n\in\mathbb{R}$.

Η σύγκλιση στον $\mathbb{H}$ είναι η κατά σημείο σύγκλιση: για κάθε ακολουθία $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ στον $\mathbb{H}$ και κάθε $x\in\mathbb{H}$ έχουμε $x_i \xrightarrow{i\to\infty} x$ αν και μόνο αν για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ισχύει $x_i(n)\xrightarrow{i\to\infty} x(n)$ στο $\mathbb{I}=[0,1]$.

Θεώρημα 2.6.2 (Καθολική Ιδιότητα του κύβου του Hilbert). *Κάθε Πολωνικός χώρος είναι τοπολογικά ισομορφικός με ένα G_δ υποσύνολο του κύβου του Hilbert $\mathbb{H}$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και μια κατάλληλη μετρική d στον $\mathcal{X}$. Από την Άσκηση 2.1.10 μπορούμε να υποθέσουμε ότι $d\leqslant 1$. Παίρνουμε επίσης ένα $D=\{x_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ που είναι πυκνό στον $\mathcal{X}$ και ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f:\mathcal{X}\to\mathbb{H}: f(x)=(d(x,x_n))_{n\in\mathbb{N}}.$$

Δείχνουμε ότι η f είναι συνεχής μονορφισμός και πως η αντίστροφη $f^{-1}: f[\mathcal{X}]\to\mathcal{X}$ είναι συνεχής.

Θεωρούμε $x\neq y$ στον $\mathcal{X}$ και θέτουμε $r=2^{-1}\cdot d(x,y)>0$. Από την πυκνότητα του D υπάρχει $n\in\mathbb{N}$ με $d(x,x_n)<r$. Προκύπτει τότε ότι $d(y,x_n)>r$, ειδικότερα $d(x,x_n)\neq d(y,x_n)$ και άρα $f(x)\neq f(y)$. Άρα η f είναι ένα-προς-ένα.

Για τη συνέχεια της f, θεωρούμε μια ακολουθία $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ με $z_i\to z\in\mathcal{X}$ και δείχνουμε ότι $f(z_i)\to f(z)$, ισοδύναμα ότι $d(z_i,x_n)\xrightarrow{i\to\infty} d(z,x_n)$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Παίρνουμε $n\in\mathbb{N}$ και έχουμε

$$|d(z_i,x_n)-d(z,x_n)|\leqslant d(z_i,z)\to 0.$$

Άρα η f είναι συνεχής.

Για την αντίστροφη συνάρτηση θεωρούμε ότι $f(z_i)\to f(z)$ για κάποια $z_i,z\in\mathcal{X}$, $i\in\mathbb{N}$. Πρέπει να δείξουμε ότι $z_i\to z$. Παίρνουμε $r>0$ και από την πυκνότητα του D παίρνουμε ένα n με $x_n\in B(z,r/2)$. Εφόσον $f(z_i)\to f(z)$, έχουμε ειδικότερα ότι $d(z_i, x_n) \xrightarrow{i\to\infty} d(z, x_n)$. Επειδή $d(z, x_n) < r/2$ υπάρχει i_0, έτσι ώστε για κάθε $i \geqslant i_0$ ισχύει $d(z_i, x_n) < r/2$. Έχουμε λοιπόν για κάθε $i \geqslant i_0$ ότι

$$d(z_i, z) \leqslant d(z_i, x_n) + d(x_n, z) < r/2 + r/2 = r$$

Επομένως $z_i \to z$.

Καταλήγουμε ότι η f είναι τοπολογικός ισομορφισμός ανάμεσα στον $\mathcal{X}$ και στον υπόχωρο $f[\mathcal{X}]$ του $\mathbb{H}$. Από την Πρόταση 2.1.2 ο $f[\mathcal{X}]$ είναι Πολωνικός χώρος και άρα από το Θεώρημα 2.1.8 το σύνολο $f[\mathcal{X}]$ είναι G_δ. ▫

Ορισμός 2.6.3. Δίνονται δύο τοπολογικοί χώροι X και Y με τον Y συμπαγή. Ο Y ονομάζεται **συμπαγοποίηση** του X αν υπάρχει συνεχής μονομορφισμός $f : X \rightarrowtail Y$ με $f^{-1} : f[X] \to Y$ επίσης συνεχή και $\overline{f[X]} = Y$. Δηλαδή ο X είναι τοπολογικά ισομορφικός με έναν πυκνό υπόχωρο του Y.

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι για να συμπαγοποιήσει κανείς έναν τοπολογικό χώρο. Μας ενδιαφέρει όμως η συμπαγοποίηση να σέβεται κάποιες καλές δομικές ιδιότητες, όπως για παράδειγμα την ιδιότητα του να είναι ο δοσμένος τοπολογικός χώρος Πολωνικός. Μια τέτοια συμπαγοποίηση δίνεται με τη βοήθεια του Θεωρήματος 2.6.2.

Πόρισμα 2.6.4. *Κάθε Πολωνικός χώρος έχει μια συμπαγοποίηση που είναι επίσης Πολωνικός χώρος.*

Απόδειξη. Θεωρούμε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και έναν τοπολογικό ισομορφισμό $f : \mathcal{X} \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow G$, όπου το G είναι G_δ υποσύνολο του $\mathbb{H}$ (Θεώρημα 2.6.2). Παίρνουμε $\mathcal{Y} = \overline{G}$. Το $\mathcal{Y}$ είναι κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς χώρου $\mathbb{H}$, άρα ο $\mathcal{Y}$ είναι συμπαγής χώρος. Επιπλέον είναι Πολωνικός ως κλειστό υποσύνολο Πολωνικού χώρου. ▫

Ένας Πολωνικός χώρος δεν είναι απαραίτητα τοπολογικά ισομορφικός με ένα κλειστό υποσύνολο του κύβου του Hilbert, γιατί αλλιώς κάθε Πολωνικός χώρος θα ήταν συμπαγής. Θα δούμε όμως ότι αυτό είναι σωστό αν αντικαταστήσουμε τον $\mathbb{H} = \mathbb{I}^{\mathbb{N}}$ με τον $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Ως συνήθως, θεωρούμε το τελευταίο σύνολο με την τοπολογία γινόμενο.

Θεώρημα 2.6.5 (Καθολική Ιδιότητα του $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$). *Κάθε Πολωνικός χώρος είναι τοπολογικά ισομορφικός με ένα κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 2.6.2 αρκεί να αποδείξουμε τον ισχυρισμό για τα G_δ υποσύνολα του $\mathbb{H}$.

Θεωρούμε λοιπόν $G \subseteq \mathbb{H}$ που είναι G_δ και γράφουμε $G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$, όπου κάθε $U_n \subseteq \mathbb{H}$ είναι ανοικτό. Μπορούμε να υποθέσουμε πως $U_n \neq \mathbb{H}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. [Για να το δούμε αυτό παίρνουμε αρχικά την περίπτωση όπου $U_n = \mathbb{H}$ για κάθε n. Τότε $G = \mathbb{H}$ και το συμπέρασμα είναι προφανές. Στην περίπτωση όπου υπάρχει ένα $n \in \mathbb{N}$ με $U_n \neq \mathbb{H}$ γράφουμε $\{U_n \mid U_n \neq \mathbb{H}\} = \{U'_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (ενδεχομένως $U'_n = U'_m$ για $n \neq m$). Τότε $G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U'_n$ και $U'_n \neq \mathbb{H}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και έπειτα παίρνουμε τα U'_n στη θέση των U_n.]

Παίρνουμε μια κατάλληλη μετρική d στον $\mathbb{H}$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$f_{2n} : G \to \mathbb{R} : f_{2n}(\overline{x}) = x_n, \quad \text{όπου } \overline{x} = (x_k)_{k\in\mathbb{N}},$$

$$f_{2n+1} : G \to \mathbb{R} : f_{2n+1}(\overline{x}) = (d(\overline{x}, F_n))^{-1} \quad \text{όπου } F_n = \mathbb{H} \setminus U_n \neq \varnothing.$$

(Παρατηρούμε ότι για κάθε $\overline{x} \in G$ και κάθε n έχουμε $\overline{x} \in U_n$, επομένως $d(\overline{x}, F_n) > 0$.)

Έπειτα ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f : G \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \overline{x} \mapsto (f_m(\overline{x}))_{m\in\mathbb{N}}.$$

Δείχνουμε αρχικά ότι η f είναι μονορφισμός. Πράγματι, αν έχουμε $\overline{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \overline{y} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{H}$ και $x_n \neq y_n$ για κάποιο n, τότε $f_{2n}(\overline{x}) = x_n \neq y_n = f_{2n}(\overline{y})$. Επομένως $f(\overline{x}) \neq f(\overline{y})$.

Για τη συνέχεια της f θεωρούμε $\overline{x}^{\,i} \to \overline{x}$, όπου $\overline{x}^{\,i} = (x^i_n)_{n\in\mathbb{N}}, \overline{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{H}$, $i \in \mathbb{N}$. Δείχνουμε ότι $f(\overline{x}^{\,i}) \to f(\overline{x})$, ισοδύναμα ότι για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει $f_m(\overline{x}^{\,i}) \xrightarrow{i\to\infty} f_m(\overline{x})$.

Παίρνουμε $m = 2n$, τότε

$$f_m(\overline{x}^{\,i}) = x^i_n \xrightarrow{i\to\infty} x_n \quad \text{επειδή } \overline{x}^{\,i} \to \overline{x}.$$

Για $m = 2n+1$, χρησιμοποιούμε ότι η συνάρτηση της απόστασης από ένα (μη κενό) σύνολο είναι συνεχής. Επομένως $d(\overline{x}^{\,i}, F_n) \to d(\overline{x}, F_n)$, και εφόσον $\overline{x}^{\,i}, \overline{x} \in G \subseteq U_n = \mathbb{H} \setminus F_n$ έχουμε ότι οι προηγούμενοι αριθμοί είναι μη μηδενικοί. Άρα $d(\overline{x}^{\,i}, F_n)^{-1} \xrightarrow{i\to\infty} d(\overline{x}, F_n)^{-1}$, δηλαδή $f_{2n+1}(\overline{x}^{\,i}) \xrightarrow{i\to\infty} f_{2n+1}(\overline{x})$.

Στη συνέχεια, δείχνουμε ότι το $f[G]$ είναι κλειστό στον $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Θεωρούμε λοιπόν $f(\overline{x}^{\,i}) \xrightarrow{i\to\infty} \overline{y} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, όπου $\overline{x}^{\,i} \in G$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Ειδικότερα, η ακολουθία $(f_{2n}(\overline{x}^{\,i}))_{i\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στην $2n$-συντεταγμένη του $\overline{y}$ για κάθε n. Γράφουμε $\overline{x}^{\,i} = (x^i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ για κάθε i και $\overline{y} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και έχουμε από το προηγούμενο ότι $x^i_n \xrightarrow{i\to\infty} y_{2n}$ για κάθε n.

Οπότε ορίζουμε $\overline{x} = (y_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{H}$, έτσι που $\overline{x}^{\,i} \to \overline{x}$. Δείχνουμε ότι $\overline{x} \in G$ καθώς και ότι $y = f(\overline{x})$. Αν είχαμε $\overline{x} \notin G$, τότε για κάποιο n θα ίσχυε $x \notin U_n$. Οπότε $d(\overline{x}, F_n) = 0$ και αφού $d(\overline{x}^{\,i}, F_n) \xrightarrow{i\to\infty} d(\overline{x}, F_n)$, θα είχαμε $d(\overline{x}^{\,i}, F_n)^{-1} \to \infty$, το οποίο είναι άτοπο γιατί $d(\overline{x}^{\,i}, F_n)^{-1} = f_{2n+1}(\overline{x}^{\,i}) \to y_{2n+1} \in \mathbb{R}$. Άρα $\overline{x} \in G$.

Επιπλέον ισχύει $d(\overline{x}^{\,i}, F_n)^{-1} \xrightarrow{i\to\infty} d(\overline{x}, F_n)^{-1}$ και άρα $y_{2n+1} = d(\overline{x}, F_n)^{-1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έχουμε λοιπόν ότι

$$f_{2n}(\overline{x}) = x_n = y_{2n} \quad \text{και} \quad f_{2n+1}(\overline{x}) = d(\overline{x}, F_n)^{-1} = y_{2n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Δηλαδή ισχύει $\overline{y} = f(\overline{x})$. Αυτό δείχνει ότι το $f[G]$ είναι κλειστό σύνολο.

Τέλος, για τη συνέχεια της αντίστροφης συνάρτησης υποθέτουμε ότι $f(\overline{x}^{\,i}) \to f(\overline{x})$, όπου $\overline{x}^{\,i}, \overline{x} \in G$, $i \in \mathbb{N}$. Πρέπει να δείξουμε ότι $\overline{x}^{\,i} \to x$. Αυτό όμως είναι σαφές γιατί $\overline{x}^{\,i} = (f_{2n}(\overline{x}^{\,i}))_{n\in\mathbb{N}}$ για κάθε i, $\overline{x} = (f_{2n}(\overline{x}))_{n\in\mathbb{N}}$, και $f_{2n}(\overline{x}^{\,i}) \xrightarrow{i\to\infty} f_{2n}(\overline{x})$ για κάθε n. □

Στη συνέχεια δίνουμε μια ακόμα καθολική ιδιότητα για τον χώρο του Cantor.

Θεώρημα 2.6.6 (Καθολική Ιδιότητα του $2^{\mathbb{N}}$ για τους συμπαγείς Πολωνικούς χώρους). *Κάθε συμπαγής Πολωνικός χώρος είναι συνεχής εικόνα του χώρου του Cantor* $2^{\mathbb{N}}$.

Απόδειξη. Θεωρούμε έναν συμπαγή Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$. Από την Άσκηση 2.6.12 μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο $\mathcal{X}$ είναι κλειστό υποσύνολο του κύβου του Hilbert. Θα δείξουμε τα εξής:

α) Το κλειστό διάστημα $[0, 1] = \mathbb{I}$ είναι συνεχής εικόνα του $2^{\mathbb{N}}$.

β) Ο κύβος του Hilbert $\mathbb{H} = \mathbb{I}^{\mathbb{N}}$ είναι συνεχής εικόνα του $2^{\mathbb{N}}$.

Υποθέτουμε προς στιγμή ότι έχουμε δείξει τα α) και β) και θεωρούμε έναν συνεχή επιμορφισμό $\pi : 2^{\mathbb{N}} \twoheadrightarrow \mathbb{H}$. Η αντίστροφη εικόνα $F = \pi^{-1}[\mathcal{X}]$ είναι κλειστό υποσύνολο του $2^{\mathbb{N}}$. Εφαρμόζουμε την Άσκηση 2.5.24 στα κλειστά υποσύνολα F και $2^{\mathbb{N}}$ του $\mathcal{N}$ και βρίσκουμε συνεχή συνάρτηση $f : 2^{\mathbb{N}} \to F$ με $f(\alpha) = \alpha$ για κάθε $\alpha \in F$. Τότε η σύνθεση

$$h : 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{H} : h(\alpha) = (\pi \circ f)(\alpha)$$

είναι συνεχής συνάρτηση και παίρνει τιμές στον $\mathcal{X}$. Πράγματι, αν $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$, τότε $f(\alpha) \in f[2^{\mathbb{N}}] \subseteq F = \pi^{-1}[\mathcal{X}]$ και $h(\alpha) = \pi(f(\alpha)) \in \mathcal{X}$. Έχουμε δηλαδή $h[2^{\mathbb{N}}] \subseteq \mathcal{X}$.

Μάλιστα ισχύει $h[2^{\mathbb{N}}] = \mathcal{X}$. Για να το δούμε αυτό θεωρούμε $x \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{H}$. Επειδή η π είναι επιμορφισμός, υπάρχει $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$ με $\pi(\alpha) = x$, άρα $\alpha \in \pi^{-1}[\mathcal{X}] = F$ και $h(\alpha) = \pi(f(\alpha)) = \pi(\alpha) = x$. Επομένως, η h είναι συνεχής επιμορφισμός από τον $2^{\mathbb{N}}$ στον $\mathcal{X}$. Οπότε μένει να δείξουμε τα α) και β) πιο πάνω.

Η ιδέα για το α) είναι να πάρουμε τα κλειστά διαστήματα $I_\Lambda = [0,1]$, $I_{(0)} = [0,1/2]$, $I_{(1)} = [1/2,1]$, $I_{(0,0)} = [0,1/4]$, $I_{(0,1)} = [1/4,2/4]$,.... Με τη βοήθεια αυτών να ορίσουμε έναν συνεχή επιμορφισμό από τον $2^{\mathbb{N}}$ στο $[0,1]$ όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.12.

Συγκεκριμένα ορίζουμε κλειστά υποδιαστήματα I_u, $u \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ του $[0,1]$ με αναδρομή στο μήκος $|u|$ του u ως εξής: $I_\Lambda = [0,1]$ και υποθέτοντας ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ορίσει ένα κλειστό διάστημα $I_u = [l(u), r(u)]$ για κάθε u με $|u| = n$ ορίζουμε

$$I_{u*(0)} = [l(u), 2^{-1} \cdot (l(u) + r(u))], \qquad I_{u*(1)} = [2^{-1} \cdot (l(u) + r(u)), r(u)].$$

Τότε είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι κάθε I_u είναι ένα κλειστό διάστημα μήκους $2^{-|u|}$, $I_u = I_{u*(0)} \cup I_{u*(1)}$ και $I_w \subseteq I_u$ όταν $u \sqsubseteq w$. Επομένως, για κάθε $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$ η τομή $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_{\alpha|n}$ είναι μονοσύνολο. Ορίζουμε

$$\tau : 2^{\mathbb{N}} \to [0,1] : \{\tau(\alpha)\} = \textstyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_{\alpha|n}.$$

Η τ είναι συνεχής, όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.12. (Σε αντίθεση με την τελευταία απόδειξη, τα $I_{u*(0)}$, $I_{u*(1)}$ δεν είναι ξένα, και επομένως δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η τ είναι μονομορφισμός. Για την ακρίβεια, *δεν είναι* μονομορφισμός, για παράδειγμα $\tau(0,1,1,\dots,1,\dots) = \tau(1,0,0,\dots,0,\dots) = 1/2$.)

Θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα $I_u = I_{u*(0)} \cup I_{u*(1)}$ για να δείξουμε ότι η τ είναι επιμορφισμός. Παίρνουμε $x \in [0,1]$, εφόσον $[0,1] = I_\Lambda = I_{(0)} \cup I_{(1)}$ υπάρχει $i_0 \in \{0,1\}$ με $x \in I_{(i_0)}$. Επιλέγουμε το ελάχιστο τέτοιο i_0. Έπειτα, $x \in I_{(i_0)} = I_{(i_0,0)} \cup I_{(i_0,1)}$ άρα υπάρχει $i_1 \in \{0,1\}$ με $x \in I_{(i_0,i_1)}$, επιλέγουμε το ελάχιστο τέτοιο i_1. Συνεχίζουμε επαγωγικά και βρίσκουμε $\alpha = (i_0, i_1, \dots, i_n, \dots)$ με $x \in I_{\alpha|n}$ για κάθε n. Προκύπτει ότι $\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_{\alpha|n} = \{\tau(\alpha)\}$, δηλαδή $\tau(\alpha) = x$. Άρα η τ είναι επιμορφισμός.

Για να δείξουμε το β) θεωρούμε την προηγούμενη $\tau : 2^{\mathbb{N}} \twoheadrightarrow [0,1]$ και ορίζουμε

$$\tilde{\tau} : (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \to [0,1]^{\mathbb{N}} : \tilde{\tau}((\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (\tau(\alpha_n))_{n\in\mathbb{N}}.$$

Τότε η $\tilde{\tau}$ είναι συνεχής επιμομορφισμός από τον $(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ στον $[0,1]^{\mathbb{N}} = \mathbb{H}$. Το συμπέρασμα του β) προκύπτει από το ότι ο $(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ είναι τοπολογικά ισομορφικός με τον $2^{\mathbb{N}}$ (Άσκηση 2.6.13). □

Στη συνέχεια περνάμε σε μια ειδική κατηγορία Πολωνικών χώρων.

Ορισμός 2.6.7. Ένα υποσύνολο V ενός τοπολογικού χώρου X λέγεται **κλειστό-ανοικτό** (clopen) αν είναι κλειστό και ανοικτό στον X. Ένας τοπολογικός χώρος X είναι **μηδενοδιάστατος** αν έχει μια βάση για την τοπολογία του που αποτελείται από κλειστά-ανοικτά σύνολα.

Οι μηδενοδιάστατοι Πολωνικοί χώροι έχουν μια *αριθμήσιμη* βάση από κλειστά-ανοικτά σύνολα (Πρόταση 2.6.9).

Οι $\mathcal{N}$ και $2^{\mathbb{N}}$ είναι μηδενοδιάστατοι Πολωνικοί χώροι γιατί οι γνωστές τους βάσεις $\{\mathcal{N}_u \mid u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\}$ και $\{\mathcal{N}_u \cap 2^{\mathbb{N}} \mid u \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}\}$ αποτελούνται από κλειστά-ανοικτά σύνολα. Μάλιστα, κάθε κλειστό υποσύνολο F του $\mathcal{N}$ είναι μηδενοδιάστατος Πολωνικός χώρος. Για να το δούμε αυτό, θεωρούμε τα σύνολα $\mathcal{N}_u \cap F$, $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ (ενδεχομένως κάποια να είναι κενά). Η οικογένεια όλων των τελευταίων συνόλων είναι βάση για το F με τη σχετική τοπολογία. Από την άλλη, το σύνολο $\mathcal{N}_u \cap F$ είναι κλειστό στον $\mathcal{N}$ ως τομή δύο κλειστών συνόλων. Είναι τότε άμεσο ότι το $\mathcal{N}_u \cap F$ είναι κλειστό στον F. Καταλήγουμε λοιπόν ότι ο F έχει μια βάση που αποτελείται από κλειστά-ανοικτά σύνολα.

Παρατήρηση 2.6.8.

(i) Οι μηδενοδιάστατοι Πολωνικοί χώροι μας επιτρέπουν να *ορίσουμε σχετικά εύκολα συνεχείς συναρτήσεις* πάνω σε αυτούς. Δίνουμε δύο χαρακτηριστικά παραδείγματα.

α) Ας θεωρήσουμε ένα κλειστό-ανοικτό σύνολο $A \subseteq \mathcal{X}$ και συνεχείς συναρτήσεις $f_1, f_2 : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$. Τότε η συνάρτηση $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ που ορίζεται με διακλάδωση

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in A \\ f_2(x), & x \notin A \end{cases}$$

είναι επίσης συνεχής, κάτι που κατά κανόνα δεν συμβαίνει με συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής. Η f είναι συνεχής γιατί $f^{-1}[U] = (f_1^{-1}[U] \cap A) \cup (f_2^{-1}[U] \cap (\mathcal{X} \setminus A))$ για κάθε $U \subseteq \mathcal{Y}$. Αφού τα σύνολα A και $\mathcal{X} \setminus A$ είναι ανοικτά και οι συναρτήσεις f_1 και f_2 είναι συνεχείς το $f^{-1}[U]$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathcal{X}$.

β) Στην περίπτωση ενός μηδενοδιάστατου Πολωνικού χώρου $\mathcal{X}$ μπορούμε εύκολα να βρούμε μια ακολουθία $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από κλειστά-ανοικτά σύνολα με $\mathcal{X} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$. Θεωρούμε τις διαφορές

$$W_0 = V_0, \quad W_{n+1} = V_{n+1} \setminus \bigcup_{i \leqslant n} V_i,$$

έτσι που η $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία από κλειστά-ανοικτά ξένα ανά δύο σύνολα, και $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n = \mathcal{X}$. Με τη χρήση της $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μπορούμε να ορίσουμε για παράδειγμα τη συνάρτηση $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \sin(n \cdot \pi \cdot x), \quad \text{όπου } n \text{ είναι ο μοναδικός φυσικός με } x \in W_n.$$

Η f είναι συνεχής συνάρτηση γιατί για κάθε $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ έχουμε

$$x \in f^{-1}[(a,b)] \iff \exists n \ \left(x \in W_n \ \& \ \sin(n \cdot \pi \cdot x) \in (a,b)\right),$$

δηλαδή $f^{-1}[(a,b)] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (W_n \cap f_n^{-1}[(a,b)])$ όπου $f_n(x) = \sin(n \cdot \pi \cdot x)$.

Σε αυτό το παράδειγμα χρησιμοποιούμε με ουσιαστικό τρόπο ότι τα W_n είναι ξένα ανά δύο γιατί θέλουμε το n στον ορισμό του $f(x)$ να είναι μοναδικό. Για να μπορεί γίνει αυτό και να είναι τα W_n και ανοικτά χρειάζεται να ξεκινήσουμε από κλειστά-ανοικτά σύνολα.

(ii) Πολλές κατασκευές στην περιγραφική θεωρία συνόλων στηρίζονται σε μια σύνθετη επεξεργασία των προηγούμενων ιδεών. Για παράδειγμα, αναφέρουμε την κατασκευή του συνεχούς μονομορφισμού $\tau : 2^{\mathbb{N}} \rightarrowtail \mathcal{X}$ στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.12. Εκεί χρησιμοποιούμε έμμεσα ότι για κάθε n μπορούμε να βρούμε σύνολα $W_1, \dots, W_{2^n}$, (συγκεκριμένα τα $\mathcal{N}_u \cap 2^{\mathbb{N}}$ για $u \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ με $|u| = n$) τα οποία έχουν μικρή διάμετρο, είναι ανοικτά και ξένα ανά δύο και ειδικότερα είναι κλειστά-ανοικτά σύνολα. Κάθε $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$ ανήκει σε ακριβώς ένα από τα W_i, συγκεκριμένα στο $\mathcal{N}_{u_n} \cap 2^{\mathbb{N}}$, όπου $u_n = \alpha | n$. Δηλαδή σε κάθε βήμα $n \in \mathbb{N}$ διαμερίζουμε τον $2^{\mathbb{N}}$ χρησιμοποιώντας κλειστά-ανοικτά σύνολα. Η τιμή $\tau(\alpha)$ καθορίζεται από το σύνολο όλων των προηγούμενων u_n, $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Στον αντίποδα οι μηδενοδιάστατοι Πολωνικοί χώροι περιορίζουν σημαντικά τις συνεχείς συναρτήσεις που λαμβάνουν τιμές σε αυτούς. Από αυτό προκύπτει ότι οι κατασκευές της $\tau : 2^{\mathbb{N}} \rightarrowtail \mathcal{X}$ του Θεωρήματος 2.3.12 και της $\pi : \mathcal{N} \twoheadrightarrow \mathcal{X}$ του Θεωρήματος 2.3.7 δεν θα ήταν εφικτές αν στη θέση των $2^{\mathbb{N}}$ και $\mathcal{N}$ είχαμε έναν μη μηδενοδιάστατο Πολωνικό χώρο. Δείτε την Άσκηση 2.6.16.

Πρόταση 2.6.9. *Κάθε μηδενοδιάστατος Πολωνικός χώρος έχει μια αριθμήσιμη βάση που αποτελείται από κλειστά-ανοικτά σύνολα.*

Απόδειξη. Θεωρούμε έναν μηδενοδιάστατο Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και μια κατάλληλη μετρική d στον $\mathcal{X}$. Παίρνουμε ένα αριθμήσιμο σύνολο $D = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ που είναι πυκνό στον $\mathcal{X}$. Όπως είναι γνωστό,ß η οικογένεια όλων των d-ανοικτών μπαλών της μορφής $B(x_n, q)$, όπου $n \in \mathbb{N}$ και $q \in \mathbb{Q}^+$, αποτελεί βάση για την τοπολογία του $\mathcal{X}$, δεν σημαίνει όμως ότι αποτελείται από κλειστά-ανοικτά σύνολα.

Θεωρούμε και μια οικογένεια $\mathcal{V}$ από κλειστά-ανοικτά υποσύνολα του $\mathcal{X}$, η οποία είναι βάση για τον $\mathcal{X}$. Ορίζουμε

$$I = \{(m, n, p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+ \mid \exists V \in \mathcal{V} \ (\ B(x_m, p) \subseteq V \subseteq B(x_n, q) \ )\}.$$

Το I είναι προφανώς αριθμήσιμο σύνολο. (Προκύπτει από τα πιο κάτω επιχειρήματα ότι το I είναι μη κενό.) Για κάθε $(m, n, p, q) \in I$ επιλέγουμε ένα $V(m, n, p, q) \in \mathcal{V}$ με

$$B(x_m, p) \subseteq V(n, m, p, q) \subseteq B(x_n, q).$$

Ισχυριζόμαστε ότι η οικογένεια $\mathcal{V}' = \{V(m, n, p, q) \mid (m, n, p, q) \in I\}$ είναι βάση για την τοπολογία του $\mathcal{X}$. Εφόσον η $\mathcal{V}'$ είναι αριθμήσιμη και $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}$, αν το δείξουμε αυτό θα έχουμε το ζητούμενο.

Για να δείξουμε ότι η $\mathcal{V}'$ είναι βάση αρκεί να δείξουμε ότι κάθε $B(x_n, q)$, με $n \in \mathbb{N}$ και $q \in \mathbb{Q}^+$ γράφεται ως ένωση στοιχείων της $\mathcal{V}'$. Θεωρούμε $n \in \mathbb{N}$ και $q \in \mathbb{Q}^+$, και δείχνουμε ότι για κάθε $x \in B(x_n, q)$ υπάρχει $(m, n', p, q') \in I$ με $x \in V(m, n', p, q') \subseteq B(x_n, q)$, για την ακρίβεια θα έχουμε $n' = n$ και $q' = q$.

Έστω $x \in B(x_n, q)$, αφού το τελευταίο είναι ανοικτό σύνολο και η $\mathcal{V}$ είναι βάση για την τοπολογία του $\mathcal{X}$, υπάρχει $U \in \mathcal{V}$ με $x \in U \subseteq B(x_n, q)$. Επιπλέον, αφού το U είναι ανοικτό σύνολο, υπάρχει $r > 0$ με $B(x, r) \subseteq U \subseteq B(x_n, q)$. Από την πυκνότητα του D και του $\mathbb{Q}$ υπάρχουν $m \in \mathbb{N}$ και $p \in \mathbb{Q}^+$ με $d(x, x_m) < p < r/2$.

Τότε $x \in B(x_m, p)$ και για κάθε $y \in B(x_m, p)$ ισχύει

$$d(y, x) \leqslant d(y, x_m) + d(x_m, x) < p + p = 2q = r.$$

Άρα $x \in B(x_m, p) \subseteq B(x, r) \subseteq U \subseteq B(x_n, q)$. Επομένως, $(m, n, p, q) \in I$ και από την επιλογή του $V(n, m, p, q)$ ισχύει

$$x \in B(x_m, p) \subseteq V(n, m, p, q) \subseteq B(x_n, q).$$

Ειδικότερα, $x \in V(n, m, p, q) \subseteq B(x_n, q)$ και έχουμε το ζητούμενο. □

Προηγουμένως είδαμε ότι τα κλειστά υποσύνολα του $\mathcal{N}$ είναι μηδενοδιάστατοι Πολωνικοί χώροι. Το επόμενο αποτέλεσμα μας λέει ότι στην ουσία δεν υπάρχουν άλλα παραδείγματα μηδενοδιάστατων Πολωνικών χώρων.

Θεώρημα 2.6.10 (Καθολική Ιδιότητα του $\mathcal{N}$ για τους μηδενοδιάστατους Πολωνικούς χώρους). *Κάθε μηδενοδιάστατος Πολωνικός χώρος είναι τοπολογικά ισομορφικός με ένα κλειστό υποσύνολο του χώρου του Baire $\mathcal{N}$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε μια συμβατή μετρική $d \leqslant 1$ στον $\mathcal{X}$ και μια αριθμήσιμη οικογένεια $\mathcal{V}$ από κλειστά-ανοικτά υποσύνολα του $\mathcal{X}$, η οποία είναι βάση για την τοπολογία του $\mathcal{X}$ (Πρόταση 2.6.9).

Ισχυρισμός. Για κάθε ανοικτό σύνολο $W \subseteq \mathcal{X}$ και κάθε $r > 0$ υπάρχει ακολουθία $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ από στοιχεία της $\mathcal{V}$ με $W = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ και d-διάμετρος$(A_i) \leqslant r$ για κάθε i. (Επιτρέπουμε το U να είναι το κενό σύνολο. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε $A_i = \varnothing$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$ –ηd-διάμετρος του κενού συνόλου είναι το 0.)

Απόδειξη ισχυρισμού. Απαριθμούμε $\mathcal{V} = \{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ και θεωρούμε ένα ανοικτό $W \subseteq \mathcal{X}$ και $r > 0$. Τότε κάθε $x \in W$ υπάρχει $r' > 0$ με $B(x, r') \subseteq U$ και $r' \leqslant r/2$. Αφού η $\mathcal{V}$ είναι βάση υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $x \in V_n \subseteq B(x, r') \subseteq W$. Επιλέγουμε τον ελάχιστο τέτοιο φυσικό αριθμό n και τον συμβολίζουμε με $n(x)$. Είναι τότε σαφές ότι $W = \bigcup_{x \in U} V_{n(x)} = \bigcup_{i \in I} V_i$, όπου $I = \{n(x) \mid x \in U\}$. Επιπλέον, η d-διάμετρος κάθε $V_{n(x)}$ είναι $\leqslant 2r' \leqslant r$. Η $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ προκύπτει από την $(V_i)_{i \in I}$ με καινούργια απαρίθμηση των όρων της τελευταίας επιτρέποντας επαναλήψεις. Αυτό αποδεικνύει τον ισχυρισμό.

Στη συνέχεια ορίζουμε μια οικογένεια $(C_u)_{u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ από υποσύνολα του $\mathcal{X}$ με τις εξής ιδιότητες:

(i) $\mathcal{X} = C_\Lambda$

(ii) το C_u είναι κλειστό-ανοικτό (ενδεχομένως κενό)

(iii) $C_u = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_{u*(i)}$

(iv) $C_{u*(i)} \cap C_{u*(j)} = \varnothing$

(v) d-διάμετρος$(C_u) \leqslant 2^{-|u|}$

για κάθε $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ και κάθε $i, j \in \mathbb{N}$. Ο ορισμός γίνεται με αναδρομή στο μήκος $|u|$ του $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$.

Για $|u| = 0$ έχουμε μόνο την περίπτωση $u = \Lambda$, ορίζουμε $C_\Lambda = \mathcal{X}$. Προφανώς, το C_Λ είναι κλειστό-ανοικτό και η διάμετρός του είναι $\leqslant 1 = 2^{-|\Lambda|}$ από την επιλογή της d.

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ορίσει τα C_u για κάθε $|u| \leqslant n$, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι ιδιότητες (ii)-(v) πιο πάνω. Για τις (iii) και (iv) αυτό σημαίνει ότι ισχύουν για κάθε $|u| < n$, έτσι που $|u * (i)| = n$ για κάθε i. Πρέπει να ορίσουμε τα C_w για κάθε $|w| = n + 1$.

Για κάθε $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με $|u| = n$ εφαρμόζουμε τον ισχυρισμό για $W = C_u$ και $r = 2^{-(n+1)}$. Υπάρχει τότε ακολουθία $(A_i^u)_{i \in \mathbb{N}}$ στοιχείων της $\mathcal{V}$ με $C_u = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i^u$ και d-διάμετρος$(A_i^u) \leqslant 2^{-(n+1)}$. Στη συνέχεια παίρνουμε τις διαφορές

$$B_0^u = A_0^u, \quad B_{i+1}^u = A_{i+1}^u \setminus \bigcup_{j \leqslant i} A_j^u.$$

Τα B_i^u, $i \in \mathbb{N}$, είναι ξένα ανά δύο και $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i^u = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i^u = C_u$. Εφόσον τα A_i^u είναι κλειστά-ανοικτά, τα σύνολα B_i^u είναι επίσης κλειστά-ανοικτά. Επιπλέον, η d-διάμετρος κάθε B_i^u είναι μικρότερη ή ίση της d-διαμέτρου του A_i^u που είναι μικρότερη ή ίση του $2^{-(n+1)}$. Οπότε ορίζουμε

$$C_{u*(i)} = B_i^u.$$

Έτσι έχουμε ορίσει τα C_w για κάθε $|w| = n+1$ και είναι σαφές ότι ισχύουν οι (ii)-(v) για το $n + 1$. Με αυτό ολοκληρώνεται το επαγωγικό βήμα.

Οι ιδιότητες (i)-(v) είναι σαφείς από τον ορισμό.

Στη συνέχεια ορίζουμε τη ζητούμενη συνάρτηση $f : \mathcal{X} \to \mathcal{N}$. Για κάθε $x \in \mathcal{X}$ έχουμε $x \in C_\Lambda = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_{(i)}$. Επομένως, υπάρχει $i_0 \in \mathbb{N}$ με $x \in C_{(i_0)}$. Αυτό το i_0 είναι μοναδικό γιατί τα $C_{(i)}$, $i \in \mathbb{N}$, είναι ξένα ανά δύο. Εφόσον $C_{(i_0)} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_{(i_0, i)}$, υπάρχει i_1 με $C_{(i_0, i_1)}$ και όπως με πριν αυτό το i_1 είναι μοναδικό. Συνεχίζοντας επαγωγικά βρίσκουμε $(i_0, i_1, \ldots, i_n, \ldots)$ με $x \in C_{(i_0, i_1, \ldots, i_n, \ldots)}$. Η τιμής της f στο x είναι ακριβώς το $(i_0, i_1, \ldots, i_n, \ldots) \in \mathcal{N}$.

Δηλαδή έχουμε την $f : \mathcal{X} \to \mathcal{N}$:

$$f(x)(n) = \text{ο μοναδικός } i \in \mathbb{N} \text{ για τον οποίο υπάρχει } u = (i_0, \ldots, i_{n-1}) \text{ με } x \in C_{u*(i)}.$$

Αποδεικνύουμε ότι το $f[\mathcal{X}]$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{N}$ και πως η f είναι τοπολογικός ισομορφισμός μεταξύ του $\mathcal{X}$ και του $f[\mathcal{X}]$. Για να δούμε ότι το $f[\mathcal{X}]$ είναι κλειστό ισχυριζόμαστε αρχικά ότι

$$\alpha \in f[\mathcal{X}] \iff \forall n\ C_{\alpha|n} \neq \varnothing \tag{2.27}$$

για κάθε $\alpha \in \mathcal{N}$.

Για την ευθεία κατεύθυνση αν έχουμε $\alpha = f(x)$, τότε από τον ορισμό της f έχουμε για κάθε n ότι $x \in C_{(f(x)(0),\ldots,f(x)(n-1))} = C_{\alpha|n}$. Για την αντίστροφη κατεύθυνση υποθέτουμε ότι για κάθε n ισχύει $C_{\alpha|n} \neq \varnothing$. Οπότε η $(C_{\alpha|n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια φθίνουσα ακολουθία μη κενών κλειστών υποσυνόλων του $\mathcal{X}$, των οποίων η d-διάμετρος συγκλίνει στο 0. Συνεπώς, η τομή όλων αυτών των συνόλων είναι μονοσύνολο. Θεωρούμε το μοναδικό x με $x \in C_{\alpha|n}$ για κάθε n. Τότε μπορούμε να δούμε εύκολα με επαγωγή ότι $\alpha(n) = f(x)(n)$ για κάθε n. Άρα $x = f(\alpha)$.

Από την (2.27) έχουμε ότι

$$f[\mathcal{X}] = \bigcap\nolimits_{n\in\mathbb{N}} F_n, \qquad F_n = \{\alpha \in \mathcal{N} \mid C_{\alpha|n} \neq \varnothing\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Κάθε F_n είναι κλειστό υποσύνολο του F_n, γιατί αν έχουμε $\alpha_i \in F_n$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$ και $\alpha_i \to \alpha$ τότε για όλα τα μεγάλα i ισχύει $\alpha_i|n = \alpha|n$ και άρα $C_{\alpha|n} = C_{\alpha_i|n} \neq \varnothing$. (Μάλιστα, το F_n είναι κλειστό-ανοικτό.) Επομένως, το $f[\mathcal{X}]$ είναι κλειστό ως τομή κλειστών συνόλων.

Για να δούμε ότι η f είναι μονομορφισμός παρατηρούμε ότι αν έχουμε $x, y \in \mathcal{X}$ με $x \neq y$, τότε υπάρχει n αρκετά μεγάλο ώστε $2^{-n} < d(x,y)$. Συνεπώς, για κάθε u με $|u| \geqslant n$ τα x, y δεν μπορούν να ανήκουν και τα δύο στο C_u. Αφού $x \in C_{(f(x)(0),\ldots,f(x)(n-1))}$ και $y \in C_{(f(y)(0),\ldots,f(y)(n-1))}$, συνεπάγεται ότι $f(x) \neq f(y)$.

Για τη συνέχεια της f θεωρούμε $x \in \mathcal{X}$ και $n \in \mathbb{N}$. Εφόσον $x \in C_{(f(x)(0),\ldots,f(x)(n-1))}$ και το τελευταίο σύνολο είναι ανοικτό, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ με $B(x, 2^{-k}) \subseteq C_{(f(x)(0),\ldots,f(x)(n-1))}$. Προκύπτει τότε ότι για κάθε $y \in B(x, 2^{-k})$ ισχύει $y \in C_{(f(x)(0),\ldots,f(x)(n-1))}$ και άρα $(f(x)(0), \ldots, f(x)(n-1)) \sqsubseteq f(y)$, οπότε

$$d_{\mathcal{N}}(f(x), f(y)) \leqslant 2^{-n}.$$

Αυτό δείχνει τη συνέχεια της f.

Τέλος, για τη συνέχεια της $f^{-1}[\mathcal{X}] \to \mathcal{X}$ παρατηρούμε ότι για κάθε n και κάθε $\alpha = f(x)$ και $\beta = f(y) \in \mathcal{N}$ με $\alpha|n = \beta|n$ έχουμε $x, y \in C_{\alpha|n}$, και άρα

$$d(f^{-1}(\alpha), f^{-1}(\beta)) = d(x,y) \leqslant 2 \cdot d\text{-διάμετρος}(C_{\alpha|n}) \leqslant 2^{-n+1}.$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Μια τυχαία συμβατή μετρική σε έναν μηδενοδιάστατο Πολωνικό χώρο δεν δίνει απαραίτητα ανοικτές μπάλες που είναι κλειστά-ανοικτά σύνολα (βλ. την Άσκηση 2.6.17). Από την άλλη, προκύπτει από το επόμενο πόρισμα ότι *υπάρχει* μια συμβατή μετρική με αυτή την ιδιότητα. Για την ακρίβεια αυτή είναι μια **υπερμετρική**, δηλαδή μια μετρική d που ικανοποιεί

$$d(x,y) \leqslant \max\{d(x,z), d(z,y)\}$$

για κάθε x, y, z που ανήκουν στον δοσμένο Πολωνικό χώρο. Αποδεικνύεται ότι οι μπάλες κάθε υπερμετρικής σε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ είναι κλειστά-ανοικτά σύνολα. (Βλ. την Άσκηση 2.6.19 καθώς και την Άσκηση 2.3.14 στην οποία δείχνουμε ότι η $d_{\mathcal{N}}$ είναι υπερμετρική στον $\mathcal{N}$. Θυμίζουμε ότι οι $d_{\mathcal{N}}$-ανοικτές μπάλες είναι της μορφής $\mathcal{N}_u$ όπου $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, τα οποία είναι κλειστά-ανοικτά σύνολα.)

Πόρισμα 2.6.11. *Ένας Πολωνικός χώρος είναι μηδενοδιάστατος αν και μόνο αν έχει μια συμβατή υπερμετρική.*

Ειδικότερα κάθε Πολωνικός χώρος έχει μια συμβατή μετρική όπου οι ανοικτές μπάλες είναι κλειστά-ανοικτά σύνολα.

Απόδειξη. Θεωρούμε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$. Αν ο $\mathcal{X}$ έχει μια συμβατή υπερμετρική, τότε από την Άσκηση 2.6.19 οι ανοικτές μπάλες είναι κλειστά-ανοικτά σύνολα και άρα ο $\mathcal{X}$ είναι μηδενοδιάστατος. Αντίστροφα, αν ο $\mathcal{X}$ είναι μηδενοδιάστατος τότε από το Θεώρημα 2.6.10 υπάρχει κλειστό σύνολο $C \subseteq \mathcal{N}$ και τοπολογικός ισομορφισμός $f : \mathcal{X} \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow C$. Ορίζουμε $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ με

$$d(x, y) = d_{\mathcal{N}}(f(x), f(y)).$$

Με άλλα λόγια, ορίζουμε την d στον $\mathcal{X}$ ώστε η f να γίνεται ισομετρία. Επειδή το C είναι κλειστό και ο $(\mathcal{N}, d_{\mathcal{N}})$ είναι πλήρης, έχουμε ότι και το C με τον περιορισμό της $d_{\mathcal{N}}$ είναι επίσης πλήρης μετρικός χώρος. Προκύπτει ότι ο $(\mathcal{X}, d)$ είναι πλήρης. Η απόδειξη ότι η τοπολογία της d είναι η ίδια με την τοπολογία του $\mathcal{X}$ είναι όπως στην απόδειξη της Πρότασης 2.1.2. ▫

Ασκήσεις

Άσκηση 2.6.12. Κάθε συμπαγής Πολωνικός χώρος είναι τοπολογικά ισομορφικός με ένα κλειστό υποσύνολο του κύβου του Hilbert.

Άσκηση 2.6.13. Ο χώρος $(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ είναι τοπολογικά ισομορφικός με τον $2^{\mathbb{N}}$ και ο $\mathcal{N}^{\mathbb{N}}$ με τον $\mathcal{N}$.

Άσκηση 2.6.14. Ο χώρος $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ των άρρητων αριθμών με τη σχετική τοπολογία του $\mathbb{R}$ είναι μηδενοδιάστατος Πολωνικός χώρος.

Άσκηση 2.6.15. Τα μόνα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ που είναι κλειστά-ανοικτά στη συνήθη τοπολογία είναι το $\emptyset$ και ο $\mathbb{R}$. Συνεπώς, ο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη τοπολογία του δεν είναι μηδενοδιάστατος Πολωνικός χώρος.

Άσκηση 2.6.16. Αν ο $\mathcal{X}$ είναι μηδενοδιάστατος Πολωνικός χώρος, τότε κάθε συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathcal{X}$ είναι σταθερή.

Συμπεράνετε ότι στα Θεωρήματα 2.3.7 και 2.3.12 δεν μπορούμε να αντικαταστήσουμε τους χώρους $\mathcal{N}$ και $2^{\mathbb{N}}$ με τον $\mathbb{R}$.

Άσκηση 2.6.17. Θεωρούμε τον μετρικό χώρο $(\mathbb{N}, |\cdot|)$ και τη μετρική d στον $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \mathcal{N}$ που προκύπτει από την τοπολογία γινόμενο σύμφωνα με την Εισαγωγή:

$$d(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cdot \min\{|\alpha(n) - \beta(n)|, 1\}\ , \quad \alpha, \beta \in \mathcal{N}.$$

Εφόσον η τοπολογία του $\mathcal{N}$ είναι η τοπολογία γινόμενο, οι μετρικές d και $d_{\mathcal{N}}$ είναι ισοδύναμες. Δείξτε ότι η d-ανοικτή μπάλα κέντρου $(0, 0, \dots, 0, \dots)$ και ακτίνας 2 δεν είναι κλειστό σύνολο.

Συμπεράνετε ότι μια τυχαία συμβατή μετρική σε έναν μηδενοδιάστατο Πολωνικό χώρο δεν δίνει απαραίτητα ανοικτές μπάλες που είναι κλειστά-ανοικτά σύνολα.

Άσκηση 2.6.18. Το ευθύ άθροισμα δύο μηδενοδιάστατων Πολωνικών χώρων και το (πεπερασμένο ή άπειρο αριθμήσιμο) γινόμενο μηδενοδιάστατων Πολωνικών χώρων είναι μηδενοδιάστατος Πολωνικός χώρος.

Άσκηση 2.6.19 (Bourbaki). Για κάθε υπερμετρική d σε ένα μη κενό σύνολο X και κάθε $x, y, z \in X$, $r, r' > 0$ ισχύουν τα εξής.

(α΄) Το $B_d(x, r)$ είναι κλειστό-ανοικτό σύνολο.

(β΄) Αν $d(x,z) \neq d(y,z)$ τότε $d(x,y) = \max\{d(x,z), d(y,z)\}$. Ειδικότερα, δύο από τους αριθμούς $d(x,y)$, $d(x,z)$, $d(y,z)$ είναι ίσοι.

(γ΄) Αν $y \in B_d(x,r)$ τότε $B_d(y,r) = B_d(x,r)$.

(δ΄) Αν $B_d(x,r) \cap B_d(y,r') \neq \varnothing$ τότε είτε $B_d(x,r) \subseteq B_d(y,r')$ είτε $B_d(y,r') \subseteq B_d(x,r)$.

Συμπεράνετε ότι ο τοπολογικός χώρος που προκύπτει από τον (X,d) είναι μηδενοδιάστατος.

2.7. Τοπολογικοί Χαρακτηρισμοί των χώρων του Baire και του Cantor

Σκοπός μας εδώ είναι να χαρακτηρίσουμε τους χώρους του Baire και Cantor από τοπολογικής άποψης. Δηλαδή να βρούμε τοπολογικές ιδιότητες $P_{\mathcal{N}}$ και $P_{2^{\mathbb{N}}}$ που να τις ικανοποιούν οι $\mathcal{N}$ και $2^{\mathbb{N}}$ αντίστοιχα και «στην ουσία» να είναι οι μοναδικοί χώροι που τις ικανοποιούν.

Ορολογία. Όταν λέμε ότι ο $\mathcal{X}$ είναι *μέχρι τοπολογικού ισομορφισμού ο μοναδικός Πολωνικός χώρος που ικανοποιεί την ιδιότητα* P, εννοούμε ότι ο $\mathcal{X}$ ικανοποιεί την P και για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{Y}$ που ικανοποιεί την P, ο $\mathcal{Y}$ είναι τοπολογικά ισομορφικός με τον $\mathcal{X}$.

Θεώρημα 2.7.1 (Alexandrov - Uryshon, δείτε [**8**]-7.7). *Ο χώρος του Baire $\mathcal{N}$ είναι μέχρι τοπολογικού ισομορφισμού ο μοναδικός Πολωνικός χώρος που είναι μηδενοδιάστατος και κάθε συμπαγές υποσύνολό του έχει κενό εσωτερικό.*

Απόδειξη. Αρχικά δείχνουμε ότι ο $\mathcal{N}$ έχει τις ζητούμενες ιδιότητες. Όπως έχουμε δει, ο $\mathcal{N}$ είναι μηδενοδιάστατος Πολωνικός χώρος. Επίσης, για κάθε $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ το σύνολο $\mathcal{N}_u$ δεν είναι συμπαγές: η ακολουθία $\alpha_i = u * (i, 0, 0, \dots)$, $i \in \mathbb{N}$ αποτελείται από στοιχεία του $\mathcal{N}_u$ και δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Επομένως, για κάθε συμπαγές $K \subseteq \mathcal{N}$ ισχύει $\mathcal{N}_u \nsubseteq K$ για κάθε $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, δηλαδή $K^\circ = \varnothing$. [Μπορούμε επίσης να το δείξουμε αυτό με τη βοήθεια του Πορίσματος 2.5.7: το K ως συμπαγές είναι το σώμα $[T]$ ενός δένδρου πεπερασμένης διακλάδωσης. Τότε όμως είναι σαφές ότι $\mathcal{N}_u \nsubseteq [T]$ για κάθε $u \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$.]

Στη συνέχεια θεωρούμε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ που είναι μηδενοδιάστατος και κάθε συμπαγές υποσύνολό του έχει κενό εσωτερικό. Θεωρούμε μια συμβατή μετρική $d \leqslant 1$ και μια αριθμήσιμη βάση $\mathcal{V}$ από κλειστά-ανοικτά υποσύνολα του $\mathcal{X}$ (Πρόταση 2.6.9).

Κατασκευάζουμε με αναδρομή στο μήκος $|u|$ του $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ μια οικογένεια $(C_u)_{u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ υποσυνόλων του $\mathcal{X}$ με τις εξής ιδιότητες:

(i) $C_\Lambda = \mathcal{X}$

(ii) το C_u είναι μη κενό κλειστό-ανοικτό υποσύνολο του $\mathcal{X}$

(iii) $C_u = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_{u*(i)}$

(iv) $C_{u*(i)} \cap C_{u*(j)} = \varnothing$

(v) d-διάμετρος$(C_u) \leqslant 2^{-|u|}$

για κάθε $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ και $i, j \in \mathbb{N}$.

Αν κάνουμε την πιο πάνω κατασκευή έχουμε στην ουσία τελειώσει. Ο ζητούμενος τοπολογικός ισομορφισμός $f : \mathcal{X} \to \mathcal{N}$ ορίζεται όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.6.10: οι ιδιότητες (i)-(v) που έχουμε εδώ συνεπάγονται και τις ιδιότητες (i)-(v) στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.6.10 (η μόνη διαφορά είναι ότι εδώ θέλουμε επιπλέον $C_u \neq \varnothing$). Επομένως, μπορούμε να πάρουμε πάλι την $f : \mathcal{X} \to \mathcal{N}$ με

$$f(x)(n) = \text{ο μοναδικός } i \in \mathbb{N} \text{ για τον οποίο υπάρχει } u = (i_0, \dots, i_{n-1}) \text{ με } x \in C_{u*(i)}.$$

Όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.6.10, η f είναι συνεχής μονομορφισμός με συνεχή αντίστροφη $f^{-1} : f[\mathcal{X}] \to \mathcal{X}$. Επιπλέον, η f είναι επιμορφισμός: σύμφωνα με την (2.27) ισχύει για κάθε $\alpha \in \mathcal{N}$,

$$\alpha \in f[\mathcal{X}] \iff \forall n \; C_{\alpha|n} \neq \emptyset.$$

Αφού όμως $C_u \neq \emptyset$ για κάθε $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, το δεξιό σκέλος της τελευταίας ισοδυναμίας ισχύει για κάθε $\alpha \in \mathcal{N}$. Επομένως $f[\mathcal{X}] = \mathcal{N}$.

Απομένει λοιπόν να κατασκευάσουμε τα C_u, $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, που να ικανοποιούν τις πιο πάνω ιδιότητες. Για $|u| = 0$ έχουμε $u = \Lambda$, οπότε ορίζουμε $C_\Lambda = \mathcal{X}$. Προφανώς, το C_Λ είναι μη κενό κλειστό-ανοικτό και d-διάμετρος$(C_\Lambda) \leqslant 1 = 2^{-0}$.

Υποθέτουμε ότι για κάποιο n έχουμε ορίσει τα C_u για κάθε u με $|u| \leqslant n$, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι ιδιότητες (ii)-(v). Για τις (iii) και (iv) αυτό σημαίνει ότι ισχύουν για κάθε $|u| < n$ ώστε $|u * (i)| = n$ για κάθε i.

Θεωρούμε ένα $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με $|u| = n$, θα ορίσουμε τα $C_{u*(i)}$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$.

Όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.6.10 γράφουμε το C_u ως ένωση της μορφής $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} V_i$ όπου τα V_i είναι στοιχεία της $\mathcal{V}$ κατάλληλα μικρής διαμέτρου, και έπειτα παίρνουμε για $C_{u*(i)}$ τις διαφορές $V_i \setminus \bigcup_{k<i} V_k$. Αυτά τα σύνολα θα έχουν όλες τις ιδιότητες με μοναδική εξαίρεση ότι κάποιο $C_{u*(i)}$ μπορεί να είναι κενό. Για να εξασφαλίσουμε ότι $C_{u*(i)} \neq \emptyset$ θα χρησιμοποιήσουμε την υπόθεσή μας ότι κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\mathcal{X}$ έχει κενό εσωτερικό.

Αφού το C_u είναι ανοικτό και μη κενό, έχουμε ειδικότερα ότι $C_u^\circ \neq \emptyset$ και άρα το C_u δεν είναι συμπαγές.

Υπενθυμίζουμε ότι ένα υποσύνολο C ενός μετρικού χώρου (Y, ρ) είναι **ολικά φραγμένο** αν για κάθε $r > 0$ υπάρχουν ανοικτά σύνολα $U_1, \ldots, U_m$ με ρ-διάμετρο $\leqslant r$ και $C \subseteq \bigcup_{k=1}^m U_k$. Όπως είναι γνωστό, το C είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι κλειστό και ολικά φραγμένο.

Επιστρέφοντας πίσω στο C_u αφού το τελευταίο σύνολο είναι κλειστό και όχι συμπαγές, έχουμε από πιο πάνω ότι το C_u δεν είναι ολικά φραγμένο στον $(\mathcal{X}, d)$. Επομένως, υπάρχει $r_u > 0$ ώστε το C_u δεν καλύπτεται από οποιαδήποτε πεπερασμένη ακολουθία από ανοικτά σύνολα d-διαμέτρου μικρότερης ή ίσης του r_u.

Όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.6.10, υπάρχει ακολουθία $(V_i)_{i\in\mathbb{N}}$ στοιχείων της $\mathcal{V}$ με $C_u = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} V_i$ και d-διάμετρος$(V_i) \leqslant \min\{2^{-(n+1)}, r_u\}$. Έπειτα παίρνουμε τις διαφορές

$$U_0 = V_0, \quad U_{i+1} = V_{i+1} \setminus \bigcup_{k\leqslant i} V_k, \quad i \geqslant 1,$$

έτσι που κάθε U_i είναι κλειστό-ανοικτό με d-διάμετρο$\leqslant 2^{-(n+1)}$, τα U_i είναι ξένα ανά δύο, και $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} V_i = C_u$.

Ισχυριζόμαστε ότι για άπειρα το πλήθος $i \in \mathbb{N}$ έχουμε $U_i \neq \emptyset$. Αλλιώς θα υπήρχε i_0 έτσι ώστε για κάθε $i \geqslant i_0$ θα ίσχυε $V_{i+1} \subseteq \bigcup_{k\leqslant i} V_k$. Προκύπτει εύκολα με επαγωγή στο $i \geqslant i_0$ ότι θα είχαμε $V_{i+1} \subseteq \bigcup_{k\leqslant i_0} V_k$ και επομένως θα ίσχυε

$$C_u = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} V_i = \bigcup_{k\leqslant i_0} V_k.$$

Άρα θα υπήρχε μια πεπερασμένη ακολουθία ανοικτών συνόλων d-διαμέτρου μικρότερης ή ίσης του r_u, η οποία θα κάλυπτε το C_u που είναι άτοπο.

Αφού έχουμε $U_i \neq \emptyset$ για άπειρα στο πλήθος $i \in \mathbb{N}$, μπορούμε να απαλείψουμε τα $i \in \mathbb{N}$ για τα οποία $U_i = \emptyset$, και να έχουμε πάλι άπειρους όρους U_i. Επομένως, χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $U_i \neq \emptyset$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Τότε τα U_i είναι μη κενά κλειστά-ανοικτά σύνολα, με d-διάμετρο$\leqslant 2^{-(n+1)}$, είναι ξένα ανά δύο, και η ένωσή τους είναι το C_u.

Ορίζουμε λοιπόν

$$C_{u*(i)} = U_i, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Αυτό ολοκληρώνει την κατασκευή. □

Όπως αναφέραμε στην Άσκηση 2.6.14, οι άρρητοι αριθμοί $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ με τη σχετική τοπολογία αποτελούν μηδενοδιάστατο Πολωνικό χώρο. Με βάση το Θεώρημα 2.6.10 προκύπτει φυσιολογικά το ερώτημα με ποιο κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{N}$ είναι τοπολογικά ισομορφικό το σύνολο $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Η απάντηση είναι ο ίδιος ο χώρος του Baire.

Πόρισμα 2.7.2. *Ο Πολωνικός χώρος των άρρητων αριθμών $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι τοπολογικά ισομορφικός με τον χώρο του Baire $\mathcal{N}$.*

Απόδειξη. Από την Άσκηση 2.6.14 το $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι μηδενοδιάστατος Πολωνικός χώρος. Δείχνουμε ότι κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ έχει κενό εσωτερικό. Θεωρούμε ένα σύνολο $K \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ με $K^\circ \neq \emptyset$. Τότε υπάρχει ένα ανοικτό διάστημα (a, b) του $\mathbb{R}$ με $(a, b) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subseteq K$. Από την πυκνότητα των ρητών υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ με $a < q < b$ και από την πυκνότητα των αρρήτων υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ από άρρητους αριθμούς στο (a, b) με $x_n \to q$. Τότε η $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία του K χωρίς συγκλίνουσα υπακολουθία, άρα το K δεν είναι συμπαγές. Επομένως, έχουμε $K^\circ \neq \emptyset$ για κάθε συμπαγές $K \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Από το Θεώρημα 2.7.1 ο $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι τοπολογικά ισομορφικός με τον $\mathcal{N}$. □

Στη συνέχεια ασχολούμαστε με τον χώρο του Cantor.

Θεώρημα 2.7.3 (Brouwer, βλ. [**8**]-7.4). *Ο χώρος του Cantor είναι ο μοναδικός μέχρι τοπολογικού ισομορφισμού συμπαγής τέλειος μηδενοδιάστατος Πολωνικός χώρος.*

Απόδειξη. Θεωρούμε έναν συμπαγή, τέλειο και μηδενοδιάστατο Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και μια συμβατή μετρική $d \leqslant 1$. Για ευκολία συμβολίζουμε με $\delta(C)$ την d-διάμετρο του C, όπου $\emptyset \neq C \subseteq \mathcal{X}$.

Θα κατασκευάσουμε μια οικογένεια $(C_u)_{u\in\{0,1\}^{<\mathbb{N}}}$ υποσυνόλων του $\mathcal{X}$ με τις εξής ιδιότητες:

(i) $C_\Lambda = \mathcal{X}$

(ii) το C_u είναι μη κενό κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{X}$

(iii) $C_u = C_{u*(0)} \cup C_{u*(1)}$

(iv) $C_{u*(0)} \cap C_{u*(1)} = \emptyset$

(v) $\lim\limits_{m\to\infty} \delta(C_{\alpha|m}) = 0$

για κάθε $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$ και κάθε $u \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$.

Τότε μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση

$$f : 2^{\mathbb{N}} \to \mathcal{X} : \{f(\alpha)\} = \textstyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_{\alpha|n}.$$

Η f είναι ένα-προς-ένα και συνεχής. Αυτό μπορούμε να το δούμε όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.12. Για να δούμε γιατί η f είναι επιμορφισμός, θεωρούμε ένα $x \in \mathcal{X}$. Τότε $x \in C_\Lambda = C_{(0)} \cup C_{(1)}$ άρα υπάρχει μοναδικό $i_0 \in \{0,1\}$ με $x \in C_{(i_0)} = C_{(i_0,0)} \cup C_{(i_0,1)}$. Συνεχίζουμε αναδρομικά και βρίσκουμε $\alpha = (i_0, i_1, \dots, i_n, \dots)$ με $\in C_{\alpha|n}$ για κάθε n. Επομένως, $f(\alpha) = x$ και η f είναι επιμορφισμός. Εφόσον ο $2^{\mathbb{N}}$ είναι συμπαγής και η f είναι συνεχής, έχουμε ότι και η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : \mathcal{X} \to 2^{\mathbb{N}}$ είναι συνεχής (δείτε την απόδειξη του Πορίσματος 2.4.4 για περισσότερες λεπτομέρειες).

Οπότε αρκεί να κατασκευάσουμε την $(C_u)_{u\in\{0,1\}^{<\mathbb{N}}}$, όπως πιο πάνω. Οι ιδιότητες (i)-(iv) είναι σχετικά εύκολες να επιτευχθούν: ουσιαστικά διαμερίζουμε το $\mathcal{X}$ σε δύο μη κενά κλειστά-ανοικτά υποσύνολα και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για το κάθε ένα από αυτά. Η δυσκολία είναι να δειχθεί η ιδιότητα (v). Για να ξεπεράσουμε αυτό το εμπόδιο θα συνεχίσουμε τη διαμέριση σε δύο υποσύνολα μέχρις ότου η διάμετρος να γίνει αρκετά μικρή. Παρακάτω δίνουμε την κατασκευή με λεπτομέρεια.

Όπως στον ισχυρισμό της απόδειξης του Θεωρήματος 2.6.10 για κάθε μη κενό κλειστό-ανοικτό υποσύνολο C του $\mathcal{X}$ και κάθε $r > 0$, μπορούμε να βρούμε μια ακολουθία $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από κλειστά-ανοικτά υποσύνολα $\mathcal{X}$ με d-διάμετρο $\leqslant r$ έτσι ώστε $C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$. Αφού όμως το C είναι κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς χώρου $\mathcal{X}$, είναι και το ίδιο συμπαγές. Άρα υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα $V_0, \dots, V_n$. Έπειτα, παίρνοντας τις διαφορές $V_i \setminus \bigcup_{k<i} V_k$ μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι τα $V_0, \dots, V_n$ είναι ξένα ανά δύο. Επειδή $\emptyset \neq C = \bigcup_{i\leqslant n} V_i$, υπάρχει τουλάχιστον ένα $i_0 \leqslant n$ για το οποίο $V_{i_0} \neq \emptyset$. Μάλιστα μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχουν τουλάχιστον δύο μη κενά V_i για $i \leqslant n$. (Για να το δούμε αυτό χρησιμοποιούμε ότι ο $\mathcal{X}$ είναι τέλειος: αφού το C είναι ανοικτό, μπορούμε να βρούμε $x, y \in C$ με $x \neq y$. Επαναλαμβάνουμε τα προηγούμενα επιχειρήματα με τον θετικό αριθμό $\min\{r, 2^{-1} \cdot d(x,y)\}$ στη θέση του r. Αν $V'_0, \dots, V'_{n'}$ είναι τα σύνολα που προκύπτουν όπως πιο πάνω τότε η διάμετρος κάθε V'_i είναι $\leqslant d(x,y)$. Επομένως κανένα V'_i δεν μπορεί να καλύψει όλο το C και άρα τουλάχιστον δύο από αυτά είναι μη κενά.) Έχουμε λοιπόν $V_0, \dots, V_n$ όπως πιο πάνω εκ των οποίων τουλάχιστον δύο είναι μη κενά. Απαλείφοντας τα V_i για τα οποία $V_i = \emptyset$ και

απαριθμώντας ξανά, μπορούμε να υποθέσουμε ότι όλα τα V_i είναι μη κενά για $i = 0, \ldots, n$, και ότι $n \geqslant 1$. Καταλήγουμε λοιπόν στο εξής.

Παρατήρηση. Για κάθε μη κενό κλειστό-ανοικτό υποσύνολο C του $\mathcal{X}$ και κάθε $r > 0$ υπάρχουν μη κενά, ξένα ανά δύο, κλειστά-ανοικτά σύνολα $V_0, \ldots, V_n$ με $n \geqslant 1$ έτσι ώστε $C = V_0 \cup \cdots \cup V_n$ και $\delta(V_i) \leqslant r$ για κάθε $i \leqslant n$.

Στη συνέχεια ορίζουμε την οικογένεια $(\mathcal{F}_u)_{u \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}}$ με τις εξής ιδιότητες:

(α) $\mathcal{F}_\Lambda = \{\mathcal{X}\}$

(β) $\mathcal{F}_u = \{V_0, \ldots, V_n\}$, όπου τα $V_0, \ldots V_n$ είναι μη κενά, ξένα ανά δύο, κλειστά-ανοικτά $\subseteq \mathcal{X}$

(γ) $\bigcup \mathcal{F}_u = \bigcup \big(\mathcal{F}_{u*(0)} \cup \mathcal{F}_{u*(1)}\big)$

(δ) $\big(\bigcup \mathcal{F}_{u*(0)}\big) \cap \big(\bigcup \mathcal{F}_{u*(1)}\big) = \varnothing$

(ε) αν $\mathcal{F}_u = \{C\}$ τότε $\mathcal{F}_{u*(0)} = \{V_0\}$ και $\delta(V) \leqslant 2^{-1} \cdot \delta(C)$ για κάθε $V \in \mathcal{F}_{u*(0)} \cup \mathcal{F}_{u*(1)}$

(στ) αν $\mathcal{F}_u = \{V_0, \ldots, V_n\}$, $n \geqslant 1$, τότε $\mathcal{F}_{u*(0)} = \{V_0\}$ και $\mathcal{F}_{u*(1)} = \{V_1, \ldots, V_n\}$

για κάθε $u \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$.

Η κατασκευή γίνεται με αναδρομή στο μήκος $|u|$ του u. Αν $|u| = 0$, τότε $u = \Lambda$, θέτουμε $\mathcal{F}_\Lambda = \{\mathcal{X}\}$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $m \in \mathbb{N}$ έχουμε ορίσει τα $\mathcal{F}_u$ για κάθε $u \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ με $|u| \leqslant m$ και ότι ικανοποιούνται οι ιδιότητες (α)-(στ) πιο πάνω. Ως συνήθως, όπου έχουμε $u * (0)$, $u * (1)$ σε μια ιδιότητα εννοούμε ότι αυτή ισχύει για $|u| < m$.

Παίρνουμε $u \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ με $|u| = m$ και ορίζουμε τα $\mathcal{F}_{u*(0)}$, $\mathcal{F}_{u*(1)}$. Αν το $\mathcal{F}_u$ είναι το μονοσύνολο $\{C\}$, τότε εφαρμόζουμε την παρατήρηση από πιο πάνω για $r = 2^{-1} \cdot \delta(C)$ και παίρνουμε μη κενά, ξένα ανά δύο, κλειστά-ανοικτά σύνολα $V_0, \ldots, V_n$ με $n \geqslant 1$, ώστε $C = V_0 \cup \cdots \cup V_n$ και $\delta(V_i) \leqslant r$ για κάθε $i \leqslant n$. Θέτουμε τότε $\mathcal{F}_{u*(0)} = \{V_0\}$ και $\mathcal{F}_{u*(1)} = \{V_1, \ldots, V_n\}$. Αν το $\mathcal{F}_u$ έχει τουλάχιστον δύο στοιχεία, $\mathcal{F}_u = \{V_0, \ldots, V_n\}$, $n \geqslant 1$, ορίζουμε $\mathcal{F}_{u*(0)} = \{V_0\}$ και $\mathcal{F}_{u*(1)} = \{V_1, \ldots, V_n\}$. Αυτό ολοκληρώνει την κατασκευή.

Τέλος ορίζουμε

$$C_u = \bigcup \mathcal{F}_u \quad \text{για κάθε } u \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}.$$

Οι ιδιότητες (i)-(iv) είναι σαφείς από τις (α)-(δ). Για την (v) θεωρούμε $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$. Είναι σαφές από την ιδιότητα (γ) ότι $C_{\alpha|(m+1)} \subseteq C_{\alpha|m}$ για κάθε m, επομένως η ακολουθία των d-διαμέτρων $(\delta(C_{\alpha|m}))_{m \in \mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα.

Ισχυρισμός. Για κάθε m υπάρχει $m' > m$ με $\delta(C_{\alpha|m'}) \leqslant 2^{-1} \cdot \delta(C_{\alpha|m})$.

Απόδειξη ισχυρισμού. Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή στο πλήθος των στοιχείων του $\mathcal{F}_{\alpha|m}$. Για τη βάση της επαγωγής (που είναι και το μεγαλύτερο μέρος της απόδειξης) θεωρούμε $m \in \mathbb{N}$ και υποθέτουμε ότι $\mathcal{F}_{\alpha|m} = \{C\}$. Θέτουμε $u = \alpha|m$. Από τις ιδιότητες (β) και (ε) έχουμε $\mathcal{F}_{u*(0)} = \{V_0\}$, $\mathcal{F}_{u*(1)} = \{V_1, \ldots, V_n\}$ όπου $n \geqslant 1$ και για κάθε $i \leqslant n$ έχουμε $\delta(V_i) \leqslant 2^{-1} \cdot \delta(C)$. Προφανώς, $C = \bigcup \mathcal{F}_u = C_u = C_{\alpha|m}$, άρα για κάθε $i \leqslant n$ έχουμε

$$\delta(V_i) \leqslant 2^{-1} \cdot \delta(C_{\alpha|m}).$$

Επομένως, αρκεί να βρούμε $m' > m$ με $\mathcal{F}_{\alpha|m'} = \{V_i\}$ γιατί τότε θα έχουμε $C_{\alpha|m'} = \bigcup \mathcal{F}_{\alpha|m'} = V_i$ και άρα $\delta(C_{\alpha|m'}) = \delta(V_i) \leqslant 2^{-1} \cdot \delta(C_{\alpha|m})$.

Αφού $\mathcal{F}_{u*(1)} = \{V_1, \ldots, V_n\}$ έχουμε εύκολα από την (στ) ότι

$$\mathcal{F}_{u*(1,1)} = \{V_2, \ldots, V_n\}, \quad \ldots \quad \mathcal{F}_{u*(1)^n} = \{V_n\}. \tag{2.28}$$

(Προφανώς για $n = 1$ η προηγούμενη γραμμή είναι περιττή.)

Επομένως, αν έχουμε $\alpha(m+k) = 1$ για κάθε $k < n$, τότε

$$u*(1)^n = (\alpha(0), \ldots, \alpha(m-1)*(1)^n = (\alpha(0), \ldots, \alpha(m-1), \alpha(m), \ldots, \alpha(m+n-1)) = \alpha|(m+n),$$

οπότε παίρνουμε $m' = m + n > m$ και έχουμε $\mathcal{F}_{\alpha|m'} = \mathcal{F}_{u*(1)^n} = \{V_n\}$.

Από την άλλη, αν υπάρχει $k < n$ με $\alpha(m+k) = 0$ παίρνουμε τον ελάχιστο τέτοιο k, έτσι που

$$(\alpha(0), \ldots, \alpha(m+k)) = (\alpha|m) * (1)^k * (0).$$

Παίρνουμε λοιπόν $m' = m + k + 1$ και έχουμε

$$\mathcal{F}_{\alpha|m'} = \mathcal{F}_{(\alpha(0),\ldots,\alpha(m+k))} = \mathcal{F}_{(\alpha|m)*(1)^k*(0)}.$$

Αν $k = 0$, η $(1)^k$ είναι η κενή ακολουθία, οπότε

$$\mathcal{F}_{(\alpha|m)*(1)^k*(0)} = \mathcal{F}_{(\alpha|m)*(0)} = \mathcal{F}_{u*(0)} = \{V_0\}.$$

Αν $k > 0$ με χρήση της ισότητας $\mathcal{F}_{u*(1)} = \{V_1, \ldots, V_n\}$ και της (2.28), παίρνουμε $\mathcal{F}_{(\alpha|m)*(1)^k} = \{V_k, \ldots, V_n\}$. Επομένως, από την ιδιότητα (στ) ισχύει $\mathcal{F}_{(\alpha|m)*(1)^k*(0)} = \{V_k\}$.

Σε κάθε περίπτωση έχουμε $\mathcal{F}_{\alpha|m'} = \{V_k\}$. Αυτό ολοκληρώνει τη βάση της επαγωγής. Το επαγωγικό βήμα είναι άμεσο. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \geqslant 1$ ισχύει το εξής: για κάθε $m \in \mathbb{N}$ αν το $\mathcal{F}_{\alpha|m}$ έχει το πολύ n στο πλήθος στοιχεία, τότε υπάρχει $m' > m$ με $\delta(C_{\alpha|m'}) \leqslant 2^{-1} \cdot \delta(C_{\alpha|m})$. Δείχνουμε το ίδιο για το $n+1$.

Θεωρούμε λοιπόν ότι έχουμε $m \in \mathbb{N}$ και πως το $\mathcal{F}_{\alpha|m}$ έχει το πολύ $n+1$ στο πλήθος στοιχεία. Προφανώς, αν έχει λιγότερα από $n+1$ στοιχεία, καλυπτόμαστε από την Επαγωγική Υπόθεση, οπότε υποθέτουμε ότι έχει ακριβώς $n+1$ στο πλήθος στοιχεία. Γράφουμε $\mathcal{F}_{\alpha|m} = \{V_0, \ldots, V_n\}$. Όπως πριν, θέτουμε $u = \alpha|m$. Από την ιδιότητα (στ) έχουμε $\mathcal{F}_{u*(0)} = \{V_0\}$ και $\mathcal{F}_{u*(1)} = \{V_1, \ldots, V_n\}$. Σε κάθε περίπτωση, το $\mathcal{F}_{\alpha|(m+1)}$ έχει το πολύ n στο πλήθος στοιχεία. Άρα από την Επαγωγική Υπόθεση με το $m+1$ στη θέση του m υπάρχει $m' > m+1$ με $\delta(C_{\alpha|m'}) \leqslant 2^{-1} \cdot \delta(C_{\alpha|(m+1)}) \leqslant 2^{-1} \cdot \delta(C_{\alpha|m})$. Αυτό αποδεικνύει τον ισχυρισμό.

Με τη βοήθεια του πιο πάνω ισχυρισμού βρίσκουμε μια γνησίως αύξουσα ακολουθία $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φυσικών αριθμών με $\delta(C_{\alpha|m_{n+1}}) \leqslant 2^{-1} \cdot \delta(C_{\alpha|m_n})$, απ' όπου προκύπτει εύκολα ότι $\delta(C_{\alpha|m_{n+1}}) \leqslant 2^{-(n+1)} \cdot \delta(C_{\alpha|m_0})$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έχουμε επομένως ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(C_{\alpha|m_n}) = 0$ και αφού η ακολουθία $(\delta(C_{\alpha|m}))_{m\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα έχουμε το ζητούμενο $\lim\limits_{m\to\infty} \delta(C_{\alpha|m}) = 0$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Ασκήσεις

Άσκηση 2.7.4. Βρείτε έναν τέλειο μηδενοδιάστατο Πολωνικό χώρο που δεν είναι τοπολογικά ισομορφικός ούτε με τον $\mathcal{N}$ ούτε με τον $2^{\mathbb{N}}$.

Βρείτε επίσης έναν συμπαγή μηδενοδιάστατο Πολωνικό χώρο που δεν είναι τοπολογικά ισομορφικός με τον $2^{\mathbb{N}}$.

Άσκηση 2.7.5. Ορίστε έναν τοπολογικό ισομορφισμό μεταξύ του $2^{\mathbb{N}} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ και του $\{0,1,2\}^{\mathbb{N}}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Βασικές κλάσεις συνόλων και ιεράρχηση

Σύνοψη:

- Τελεστές και κλάσεις - εκτιμήσεις με βάση τους τελεστές.
- Οι κλάσεις Borel συνόλων πεπερασμένης τάξης.
- Οι προβολικές κλάσεις συνόλων.
- Μετρησιμότητα και πληρότητα συνόλου ως προς κλάση.
- Παραμετρικοποίηση και καθολικά σύνολα.
- Ενοποίηση, Αναγωγή και Διαχωρισμός.

Προαπαιτούμενη γνώση:

- Πολωνικοί χώροι και συνεχείς συναρτήσεις.
- Επιθυμητή η εξοικείωση με τους λογικούς τελεστές.

3.1. Θεμελιώδεις τελεστές και η έννοια της κλάσης

Ορισμός 3.1.1. Με τον όρο **τελεστής συνόλων** εννοούμε οποιαδήποτε πράξη ανάμεσα σε σύνολα. Για παράδειγμα έχουμε τον τελεστή της ένωσης όπου παίρνει δύο σύνολα A, B και δίνει την ένωση $A \cup B$. Περιορίζουμε το πεδίο εφαρμογής των τελεστών μας στα υποσύνολα Πολωνικών χώρων. Έχουμε τους εξής τελεστές:

(I) Ο τελεστής της **διάζευξης** $\vee$. Αν έχουμε $P, Q \subseteq \mathcal{X}$, ορίζουμε το σύνολο της διάζευξης $P \vee Q \subseteq \mathcal{X}$ με

$$x \in P \vee Q \iff x \in P \text{ ή } x \in Q.$$

Παρατηρούμε ότι το $P \vee Q$ είναι η συνολοθεωρητική ένωση $P \cup Q$, γι' αυτό θα αποκαλούμε τη διάζευξη $P \vee Q$ και ως ένωση των P, Q. Η διαφορά ανάμεσα σε αυτούς τους δύο τελεστές είναι ότι η ένωση μπορεί να εφαρμοστεί σε σύνολα που δεν είναι απαραίτητα υποσύνολα του ίδιου χώρου. Για παράδειγμα, μπορούμε να πάρουμε την ένωση ενός συνόλου πραγματικών αριθμών με ένα σύνολο συναρτήσεων. Από την άλλη, ο τελεστής της διάζευξης ορίζεται σε υποσύνολα *του ίδιου χώρου*.

Εδώ κάνουμε μια μικρή κατάχρηση του συμβολισμού. Όπως έχουμε αναφέρει στην εισαγωγή θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\vee$ για να δηλώσουμε τον τελεστή της διάζευξης μέσα σε λογικές προτάσεις. Σε αυτό το σημείο χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο για να ορίσουμε μια πράξη ανάμεσα σε σύνολα. Ισχύει η προφανής σχέση

$$x \in P \vee Q \iff x \in P \ \vee \ x \in Q.$$

Θα είναι σαφές από το κείμενο σε ποια χρήση του συμβόλου $\vee$ αναφερόμαστε κάθε φορά και δεν θα δίνουμε περαιτέρω εξηγήσεις.

(II) Ο τελεστής της **σύζευξης** &. Αν έχουμε $P, Q \subseteq \mathcal{X}$, ορίζουμε το σύνολο της σύζευξης $P \ \& \ Q \subseteq \mathcal{X}$ με

$$x \in P \ \& \ Q \iff x \in P \text{ και } x \in Q.$$

Παρατηρούμε ότι το $P \mathbin{\&} Q$ είναι η συνολοθεωρητική τομή $P \cap Q$ υποσυνόλων του *ίδιου* χώρου, γι' αυτό θα αποκαλούμε τη σύζευξη $P \mathbin{\&} Q$ και ως τομή των P, Q. Ισχύουν οι ανάλογες παρατηρήσεις σχετικά με τον συμβολισμό.

(III) Ο τελεστής του **συμπληρώματος** c. Αν $P \subseteq \mathcal{X}$ ορίζουμε το συμπλήρωμα $c_{\mathcal{X}} P$ του P ως προς $\mathcal{X}$ ως το σύνολο $\mathcal{X} \setminus P$. Προφανώς

$$x \in c_{\mathcal{X}} P \iff \neg(x \in P).$$

Όταν ο $\mathcal{X}$ είναι σαφής από το κείμενο γράφουμε απλά c αντί του $c_{\mathcal{X}}$.

(IV) Ο τελεστής της **άπειρης αριθμήσιμης διάζευξης ή ένωσης** $\bigvee_{\mathbb{N}}$. Αν έχουμε μια ακολουθία συνόλων $P_n \subseteq \mathcal{X}$, $n \in \mathbb{N}$, ορίζουμε την **άπειρη διάζευξη** $\bigvee_{\mathbb{N}} (P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ως εξής,

$$x \in \bigvee\nolimits_{\mathbb{N}} (P_n)_{n \in \mathbb{N}} \iff \exists n \in \mathbb{N}\ x \in P_n.$$

Με άλλα λόγια, η άπειρη διάζευξη $\bigvee_{\mathbb{N}} (P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι η ένωση $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n$ υποσυνόλων του *ίδιου* Πολωνικού χώρου. Όπως και προηγουμένως, θα αποκαλούμε την άπειρη διάζευξη και ως ένωση.

(V) Ο τελεστής της **άπειρης αριθμήσιμης σύζευξης ή τομής** $\bigwedge_{\mathbb{N}}$. Αν έχουμε μια ακολουθία συνόλων $P_n \subseteq \mathcal{X}$, $n \in \mathbb{N}$, ορίζουμε την **άπειρη σύζευξη** $\bigwedge_{\mathbb{N}} (P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ως εξής,

$$x \in \bigwedge\nolimits_{\mathbb{N}} (P_n)_{n \in \mathbb{N}} \iff \forall n \in \mathbb{N}\ x \in P_n.$$

Η άπειρη σύζευξη $\bigwedge_{\mathbb{N}} (P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι η τομή $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} P_n$ υποσυνόλων του *ίδιου* Πολωνικού χώρου, και θα την αποκαλούμε και ως τομή.

(VI) Ο τελεστής του **υπαρξιακού ποσοδείκτη** $\exists^{\mathcal{Y}}$ υπεράνω του $\mathcal{Y}$. Αν έχουμε ένα $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, ορίζουμε το σύνολο

$$\exists^{\mathcal{Y}} P = \{x \in \mathcal{X} \mid \exists y\ (x, y) \in P\}.$$

Το $\exists^{\mathcal{Y}} P$ είναι ακριβώς η *προβολή του* P *υπεράνω του* $\mathcal{Y}$, με άλλα λόγια

$$\exists^{\mathcal{Y}} P = \mathsf{pr}[P] \text{ όπου } \mathsf{pr} : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{X} : \mathsf{pr}(x, y) = x.$$

Ιδιαίτερη σημασία έχουν οι περιπτώσεις όπου $\mathcal{Y} = \mathbb{N}$ και $\mathcal{Y} = \mathcal{N}$. Σε αυτές τις περιπτώσεις έχουμε

$$x \in \exists^{\mathbb{N}} P \iff \exists n\ (x, n) \in P \quad \text{όπου } P \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N},$$
$$x \in \exists^{\mathcal{N}} P \iff \exists \alpha (x, \alpha) \in P \quad \text{όπου } P \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}.$$

Ο τελεστής $\exists^{\mathbb{N}}$ «προσομοιάζει» την αριθμήσιμη ένωση με μια ουσιαστική διαφορά όμως που θα εξηγήσουμε παρακάτω.

(VII) Ο τελεστής του **καθολικού ποσοδείκτη** $\forall^{\mathcal{Y}}$ υπεράνω του $\mathcal{Y}$. Αν έχουμε ένα $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, ορίζουμε το σύνολο

$$\forall^{\mathcal{Y}} P = \{x \in \mathcal{X} \mid \forall y\ (x, y) \in P\}.$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι $\forall^{\mathcal{Y}} P = c_{\mathcal{X}}(\exists^{\mathcal{Y}}(c_{(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})} P))$. Όπως με πριν, ιδιαίτερη σημασία έχουν οι περιπτώσεις όπου $\mathcal{Y} = \mathbb{N}$ και $\mathcal{Y} = \mathcal{N}$.

(VIII) Ο τελεστής του **φραγμένου υπαρξιακού ποσοδείκτη** $\exists^{\leqslant}$. Αν έχουμε ένα σύνολο $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$, ορίζουμε το σύνολο $\exists^{\leqslant} P \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ με

$$(x, n) \in \exists^{\leqslant} P \iff \exists m \leqslant n\ (x, m) \in P.$$

Παρατηρούμε ότι το σύνολο $\exists^{\leqslant} P$ παραμένει υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathbb{N}$. Επίσης, βλέπουμε ότι το $\exists^{\leqslant} P$ «προσομοιάζει» την πεπερασμένη ένωση συνόλων. Το καινούργιο στοιχείο είναι ότι το «μήκος» της ένωσης (ο φυσικός αριθμός $n + 1$) αποτελεί μεταβλητή.

(IX) Ο τελεστής του **φραγμένου καθολικού ποσοδείκτη** $\forall^{\leqslant}$. Αν έχουμε $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$, ορίζουμε το σύνολο $\forall^{\leqslant} P \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ με

$$(x,n) \in \forall^{\leqslant} P \iff \forall m \leqslant n\ (x,m) \in P.$$

Όπως πιο πάνω, το σύνολο $\forall^{\leqslant} P$ παραμένει υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathbb{N}$. Επίσης το $\forall^{\leqslant} P$ «προσομοιάζει» την πεπερασμένη τομή συνόλων όπου το «μήκος» της τομής αποτελεί μεταβλητή.

(X) Ο τελεστής της **πεπερασμένης ένωσης** $\bigvee_{\leqslant}$. Αν έχουμε πεπερασμένα το πλήθος $P_0, \dots, P_n \subseteq \mathcal{X}$, τότε ορίζουμε το σύνολο

$$\bigvee_{\leqslant} (P_0, \dots, P_n) = P_0 \cup \cdots \cup P_n.$$

Με άλλα λόγια, το $\bigvee_{\leqslant} (P_0, \dots, P_n)$ είναι η πεπερασμένη ένωση των συνόλων $P_0, \dots, P_n$. Διευκρινίζουμε ότι το n είναι τυχαίος φυσικός αριθμός. Δηλαδή το πεδίο εφαρμογής του τελεστή $\bigvee_{\leqslant}$ είναι *όλες* οι μη κενές πεπερασμένες ακολουθίες υποσυνόλων του *ίδιου* χώρου.

(XI) Ο τελεστής της **πεπερασμένης τομής** $\bigwedge_{\leqslant}$. Αν έχουμε πεπερασμένα το πλήθος $P_0, \dots, P_n \subseteq \mathcal{X}$, τότε ορίζουμε το σύνολο

$$\bigwedge_{\leqslant} (P_0, \dots, P_n) = P_0 \cap \cdots \cap P_n.$$

Με άλλα λόγια, το $\bigwedge_{\leqslant} (P_0, \dots, P_n)$ είναι η πεπερασμένη ένωση των συνόλων $P_0, \dots, P_n$ και το πεδίο εφαρμογής του τελεστή $\bigwedge_{\leqslant}$ είναι *όλες* οι μη κενές πεπερασμένες ακολουθίες υποσυνόλων του *ίδιου* χώρου.

Σημείωση: Κάποιες φορές θα αναφερόμαστε στους πιο πάνω τελεστές για υποσύνολα μετρικών χώρων X, που δεν προκύπτουν απαραίτητα από Πολωνικούς. Ο ορισμός δίνεται με τον προφανή τρόπο.

Στον ακόλουθο πίνακα παραθέτουμε συνοπτικά όλους του προηγούμενους τελεστές μαζί με το πεδίο εφαρμογής τους και το είδος του συνόλου που παράγουν.

Τελεστής	Εφαρμόζεται σε	Παράγει
$\vee, \&$	$P, Q \subseteq \mathcal{X}$	υποσύνολο του $\mathcal{X}$
c	$P \subseteq \mathcal{X}$	υποσύνολο του $\mathcal{X}$
$\exists^{\mathcal{Y}}, \forall^{\mathcal{Y}}$	$P \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$	υποσύνολο του $\mathcal{X}$
$\exists^{\mathbb{N}}, \forall^{\mathbb{N}}$	$P \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$	υποσύνολο του $\mathcal{X}$
$\bigvee_{\mathbb{N}}, \bigwedge_{\mathbb{N}}$	$(P_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{P}(\mathcal{X})^{\mathbb{N}}$	υποσύνολο του $\mathcal{X}$
$\exists^{\leqslant}, \forall^{\leqslant}$	$P \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$	υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathbb{N}$
$\bigvee_{\leqslant}, \bigwedge_{\leqslant}$	$(P_0, \dots, P_n) \in \mathcal{P}(\mathcal{X})^{<\mathbb{N}}$	υποσύνολο του $\mathcal{X}$

Επίσης συνοψίζουμε στον ακόλουθο πίνακα την αναλογία που σχολιάσαμε προηγουμένως μεταξύ των τελεστών που περιέχουν τον όρο $(x,n) \in P$ και αυτών που περιέχουν τον όρο $x \in P_n$.

Όρος $(x,n) \in P$	Όρος $x \in P_n$
$\exists^{\mathbb{N}}$	$\bigvee_{\mathbb{N}}$
$\forall^{\mathbb{N}}$	$\bigwedge_{\mathbb{N}}$
$\exists^{\leqslant}$	$\bigvee_{\leqslant}$
$\forall^{\leqslant}$	$\bigwedge_{\leqslant}$

Αργότερα εξηγούμε εκτενέστερα τη σχέση μεταξύ των τελεστών της αριστερής στήλης και αυτών της δεξιάς. (Βλ. τα 3.2.6 - 3.2.10 καθώς και τη συζήτηση που προηγείται.)

Ορισμός 3.1.2. Για κάθε $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ και κάθε $y \in \mathcal{Y}$ ορίζουμε το σύνολο

$$P_y = \{x \in \mathcal{X} \mid (x,y)\}.$$

Το P_y είναι η y-**τομή (section)** του συνόλου P.

Μπορεί κανείς να θεωρήσει την y-τομή ως τελεστή σε σύνολα, αλλά δεν μας είναι ιδιαίτερα χρήσιμη αυτή η θεώρηση.

Ειδική περίπτωση αυτού του ορισμού είναι όταν $\mathcal{Y} = \mathbb{N}$, οπότε για κάθε $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ λαμβάνουμε την ακολουθία $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ των **τομών** του P. Στην περίπτωση $\mathcal{Y} = \mathbb{N}$, το n στον δείκτη μπορεί να έχει δύο έννοιες: α) την n-τομή, και β) το n-στο σύνολο μιας δοσμένης ακολουθίας. Θα είναι σαφές από το κείμενο σε ποια από τις δύο έννοιες αναφερόμαστε. Γενικότερα, *εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά*, θα φροντίζουμε όταν έχουμε ένα $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ και μια ακολουθία $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ να είναι το P_n η n-τομή του συνόλου P, έτσι που οι δύο έννοιες να συμβαδίζουν.

Ορισμός 3.1.3. Με τον όρο **κλάση συνόλων** εννοούμε τη συλλογή όλων των συνόλων σε μετρικούς χώρους που χαρακτηρίζονται από μια συγκεκριμένη ιδιότητα. Για παράδειγμα, θα αναφερόμαστε στην κλάση των *ανοικτών* συνόλων. Οι κλάσεις θα συμβολίζονται συνήθως με Γ. Εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά, οι κλάσεις συνόλων θα αναφέρονται σε υποσύνολα *Πολωνικών* χώρων.

Για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και κάθε κλάση συνόλων Γ θέτουμε

$$\Gamma(\mathcal{X}) = \{A \subseteq \mathcal{X} \mid \text{το } A \text{ ανήκει στην κλάση } \Gamma\}.$$

Θα λέμε ότι ένα $A \subseteq \mathcal{X}$ είναι Γ **υποσύνολο** του $\mathcal{X}$ αν $A \in \Gamma(\mathcal{X})$.

Θα αναφερόμαστε επίσης σε **κλάση συναρτήσεων**. Με αυτό τον όρο θα εννοούμε μια συλλογή συναρτήσεων ανάμεσα σε μετρικούς χώρους (συνήθως Πολωνικούς) που χαρακτηρίζονται από μια συγκεκριμένη ιδιότητα. Για παράδειγμα, έχουμε την κλάση των συνεχών συναρτήσεων. Όταν θα λέμε *κλάση* χωρίς να διευκρινίζουμε αν πρόκειται για σύνολα ή συναρτήσεις, *θα εννοούμε πάντα κλάση συνόλων*.

Επεκτείνουμε τη σχέση του εγκλεισμού και τις στοιχειώδεις συνολοθεωρητικές πράξεις στις κλάσεις *για υποσύνολα του ίδιου χώρου*: αν έχουμε κλάσεις Γ_0 και Γ_1, ορίζουμε

$$\begin{aligned}
\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 &\iff \text{κάθε στοιχείο της } \Gamma_0 \text{ είναι στοιχείο της } \Gamma \\
\Gamma_0 \cup \Gamma_1 &= \text{η κλάση όλων των } A \text{ που ανήκουν στην } \Gamma_0 \textit{ ή } \text{στην } \Gamma_1 \\
\Gamma_0 \cap \Gamma_1 &= \text{η κλάση όλων των } A \text{ που ανήκουν στην } \Gamma_0 \textit{ και } \text{στην } \Gamma_1 \\
\Gamma_0 \setminus \Gamma_1 &= \text{η κλάση όλων των } A \text{ που ανήκουν στη } \Gamma_0 \textit{ και δεν } \text{ανήκουν στη } \Gamma_1.
\end{aligned}$$

Επίσης ορίζουμε την ένωση $\bigcup_{k\leqslant n}\Gamma_k$ και τομή $\bigcap_{k\leqslant n}\Gamma_k$ των κλάσεων $\Gamma_0,\ldots,\Gamma_n$ με τον προφανή τρόπο. Όμοια ορίζουμε την άπειρη ένωση και άπειρη τομή κλάσεων.

Αν Φ είναι ένας από τους προηγούμενους τελεστές, π.χ. $\Phi = \exists^{\mathcal{N}}$, συμβολίζουμε με $\Phi\Gamma$ την **κλάση που προκύπτει από όλα τα σύνολα της μορφής** ΦP όπου το P ανήκει στη Γ και εμπίπτει στο πεδίο εφαρμογής του Φ. Ο ανάλογος συμβολισμός δίνεται για τους τελεστές που αναφέρονται σε δύο σύνολα ή σε μια ακολουθία συνόλων. Για παράδειγμα, έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathrm{c}\Gamma &= \text{η συλλογή όλων των } \mathrm{c}_{\mathcal{X}}P = \mathcal{X}\setminus P \text{ όπου } P\in\Gamma(\mathcal{X}),\\
&\quad\ \text{για κάποιον Πολωνικό χώρο } \mathcal{X}\\
\vee\Gamma &= \text{η συλλογή όλων των } A\vee B = A\cup B \text{ όπου } A,B\in\Gamma(\mathcal{X}),\\
&\quad\ \text{για κάποιον Πολωνικό χώρο } \mathcal{X}\\
\exists^{\mathcal{Y}}\Gamma &= \text{η συλλογή όλων των } \exists^{\mathbb{N}}P \text{ όπου } P\in\Gamma(\mathcal{X}\times\mathcal{Y}),\\
&\quad\ \text{για κάποιον Πολωνικό χώρο } \mathcal{X}\\
\bigvee\nolimits_{\mathbb{N}}\ \Gamma &= \text{η συλλογή όλων των } \bigvee\nolimits_{\mathbb{N}}\ (P_i)_{i\in\mathbb{N}} = \bigcup\nolimits_{i\in\mathbb{N}}P_i\\
&\quad\ \text{όπου } P_i\in\Gamma(\mathcal{X}),\ i\in\mathbb{N}, \text{ για κάποιον Πολωνικό χώρο } \mathcal{X}.
\end{aligned}$$

Ορισμός 3.1.4. Θα λέμε ότι η κλάση Γ είναι **κλειστή ως προς τον τελεστή** Φ αν το αποτέλεσμα της εφαρμογής του Φ στα σύνολα της Γ που εμπίπτουν στο πεδίο εφαρμογής του είναι σύνολο που ανήκει στη Γ, ισοδύναμα $\Phi\Gamma\subseteq\Gamma$.

Για παράδειγμα, η Γ είναι κλειστή ως προς τον τελεστή $\vee$ αν για κάθε $P,Q\in\Gamma(\mathcal{X})$ η ένωση $P\vee Q$ ανήκει στη $\Gamma(\mathcal{X})$, ενώ είναι κλειστή ως προς τον τελεστή $\exists^{\mathcal{N}}$ αν για κάθε $P\in\Gamma(\mathcal{X}\times\mathcal{N})$ το σύνολο $\exists^{\mathcal{N}}P$ ανήκει στην $\Gamma(\mathcal{X})$.

Μια κλάση Γ είναι **κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση** αν για κάθε συνεχή συνάρτηση

$$f:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$$

και κάθε $Q\in\Gamma(\mathcal{Y})$, έχουμε $f^{-1}[Q]\in\mathcal{X}(\Gamma)$. Ισοδύναμα το σύνολο $P\subseteq\mathcal{X}$ που ορίζεται ως εξής

$$x\in P \iff f(x)\in Q$$

ανήκει στη Γ.

Για παράδειγμα, η κλάση των ανοικτών συνόλων είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση γιατί η αντίστροφη εικόνα ενός ανοικτού συνόλου μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης είναι ανοικτό σύνολο.

Στις εφαρμογές οι χώροι $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ είναι συνήθως πεπερασμένα γινόμενα $\mathcal{X}_1\times\cdots\times\mathcal{X}_n$ και $\mathcal{Y}_1\times\cdots\times\mathcal{Y}_m$ αντίστοιχα.

Γενικότερα, αν έχουμε μια κλάση από συναρτήσεις Γ', θα λέμε ότι η Γ είναι **κλειστή ως προς** Γ'**-αντικατάσταση** αν για κάθε $f:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ που ανήκει στην Γ' και για κάθε $Q\in\Gamma(\mathcal{Y})$ έχουμε $f^{-1}[Q]\in\mathcal{X}(\Gamma)$. Επομένως, η κλειστότητα ως προς συνεχή αντικατάσταση είναι κλειστότητα ως προς Γ'-αντικατάσταση, όπου Γ' = κλάση όλων των συνεχών συναρτήσεων.

Παρατήρηση 3.1.5. Η κλειστότητα μια κλάσης Γ ως προς συνεχή αντικατάσταση μας επιτρέπει (i) να αναδιατάξουμε n-αδες μεταβλητών καθώς και (ii) να παραλείψουμε μερικές μεταβλητές χωρίς να εξέλθουμε της κλάσης.

Συγκεκριμένα για (i) πιο πάνω: αν έχουμε μια κλάση Γ που είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση και Πολωνικούς χώρους $\mathcal{X}_1,\ldots,\mathcal{X}_n$, τότε για κάθε συνάρτηση

$$\tau:\{1,\ldots,n\}\to\{1,\ldots,n\}$$

και κάθε σύνολο $Q \subseteq \mathcal{X}_{\tau(1)} \times \cdots \times \mathcal{X}_{\tau(n)}$ που ανήκει στη Γ, το σύνολο $P \subseteq \mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_n$ που ορίζεται ως εξής

$$(x_1, \ldots, x_n) \in P \iff (x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(n)}) \in Q$$

ανήκει επίσης στη Γ.

Ο ισχυρισμός είναι άμεσος από το ότι η συνάρτηση

$$\begin{aligned} &f : \mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_n \to \mathcal{X}_{\tau(1)} \times \cdots \times \mathcal{X}_{\tau(n)} \\ &f(x_1, \ldots, x_n) = (x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(n)}). \end{aligned}$$

είναι συνεχής.

Για το (ii) πιο πάνω: αν έχουμε μια κλάση Γ που είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση και Πολωνικούς χώρους $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n$, τότε για κάθε συνάρτηση προβολής

$$\begin{aligned} &\mathsf{pr} : \mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_n \to \mathcal{X}_{k_1} \times \cdots \times \mathcal{X}_{k_m} \\ &\mathsf{pr}(x_1, \ldots, x_n) = (x_{k_1}, \ldots, x_{k_m}) \end{aligned}$$

και κάθε $Q \subseteq \mathcal{X}_{k_1} \times \cdots \times \mathcal{X}_{k_m}$ που ανήκει στη Γ το σύνολο $P \subseteq \mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_n$ με

$$(x_1, \ldots, x_n) \in P \iff (x_{k_1}, \ldots, x_{k_m}) \in Q$$

ανήκει επίσης στη Γ. Αυτό συμβαίνει γιατί η συνάρτηση της προβολής pr είναι συνεχής και προφανώς $P = \mathsf{pr}^{-1}[Q]$.

Ως *παράδειγμα εφαρμογής* των προηγουμένων ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια κλάση Γ, τρεις Πολωνικούς χώρους $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$, και δύο σύνολα $Q_0 \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, $Q_1 \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Z} \times \mathcal{Y}$, που ανήκουν στη Γ. Τότε τα σύνολα $P_0 \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ και $P_1 \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$ που ορίζονται ως εξής,

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in P_0 &\iff (x, y) \in Q_0 \\ (x, y, z) \in P_1 &\iff (x, z, y) \in Q_1 \end{aligned}$$

ανήκουν επίσης στη Γ. Για να το δούμε αυτό, παίρνουμε $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}$, $\mathcal{X}_2 = \mathcal{Z}$ και $\mathcal{X}_3 = \mathcal{Y}$ και εφαρμόζουμε την παρατήρηση παίρνοντας

$$\begin{aligned} &\mathsf{pr} : \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \mathcal{X}_3 \to \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 : \mathsf{pr}(x, y, z) = (x, y) \\ &\tau : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\} : \tau_1(1) = 1, \tau_1(2) = 3, \tau_1(3) = 2. \end{aligned}$$

Στη συνέχεια θα εφαρμόζουμε την παρατήρηση χωρίς αναφορά στις λεπτομέρειες. Ως κανόνα έχουμε ότι μπορούμε να *αναδιατάξουμε και να παραλείψουμε μεταβλητές παραμένοντας στην κλάση.*

Παρατήρηση 3.1.6. Υπό κάποιες προϋποθέσεις για την κλάση Γ μπορούμε να παραμείνουμε σε αυτήν αν αντικαταστήσουμε τον όρο $n \leqslant m$ με τον πιο γενικό $n \leqslant f(x, y)$, όπου η $f : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{N}$ είναι συνεχής συνάρτηση.

Συγκεκριμένα θεωρούμε μια κλάση Γ που είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση και τον τελεστή $\exists^{\leqslant}$, έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και ένα σύνολο $P \in \Gamma(\mathcal{X} \times \mathbb{N})$.

Τότε για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{Y}$ και κάθε συνεχή συνάρτηση $f : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{N}$ το σύνολο $Q \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ με

$$(x, y) \in Q \iff \exists n \leqslant f(x, y)\ (x, n) \in P$$

ανήκει στη Γ.

Για να το δούμε αυτό θεωρούμε το σύνολο S με

$$(x, m) \in S \iff \exists n \leqslant m\ (x, n) \in P$$

και παρατηρούμε ότι

$$(x, y) \in Q \iff \exists n \leqslant f(x, y)\ (x, n) \in P \iff (x, f(x, y)) \in S.$$

Το σύνολο S ανήκει στην κλάση $\exists^{\leqslant}\Gamma \subseteq \Gamma$. Η συνάρτηση $h(x,y) = (x, f(x,y))$ είναι συνεχής και από το πιο πάνω ισχύει $Q = h^{-1}[S]$. Λόγω της κλειστότητας της Γ ως προς συνεχή αντικατάσταση έχουμε ότι το Q ανήκει επίσης στην Γ.

3.2. Εκτιμήσεις με βάση τους τελεστές

Όταν θέλουμε να περιγράψουμε ένα σύνολο, δίνουμε συνήθως έναν προτασιακό τύπο με βάση τους γνωστούς λογικούς ποσοδείκτες (καθολικό και υπαρξιακό) και τους λογικούς τελεστές (σύζευξη, διάζευξη, άρνηση, συνεπαγωγή). Ο τύπος καταλήγει σε μια πιο απλή έκφραση.

Για παράδειγμα, το σύνολο Bd_A *όλων των φραγμένων ακολουθιών μέσα από ένα δοσμένο σύνολο* $A \subseteq \mathbb{R}$ περιγράφεται ως εξής:

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Bd_A \iff \exists k \; \forall n \; (x_n \in A \; \& \; |x_n| \leqslant k).$$

Αυτή η πιο «απλή έκφραση» που αναφέρουμε πιο πάνω ορίζει στην ουσία ένα σύνολο, του οποίου οι μεταβλητές είναι κάποιες (ίσως όλες) από τις αρχικές μεταβλητές μαζί με όσες μεταβλητές εμφανίστηκαν μπροστά από τους λογικούς ποσοδείκτες. Στο προηγούμενο παράδειγμα αυτό το σύνολο είναι το

$$C_A = \{((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, n, k) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x_n \in A \; \& \; |x_n| \leqslant k\}$$

έτσι που $Bd_A = \exists^{\mathbb{N}}\forall^{\mathbb{N}} C_A$.

Αν το σύνολο A ανήκει σε μια κλάση Γ, είναι φυσικό να αναρωτηθούμε σε ποια κλάση ανήκει το Bd_A. Ας υποθέσουμε προς στιγμή ότι το προηγούμενο C_A ανήκει επίσης στη Γ και ότι η Γ είναι κλειστή ως προς $\forall^{\mathbb{N}}$. Τότε είναι σαφές ότι το $Bd_A = \exists^{\mathbb{N}}\forall^{\mathbb{N}} C_A$ ανήκει στην $\exists^{\mathbb{N}}\forall^{\mathbb{N}}\Gamma \subseteq \exists^{\mathbb{N}}\Gamma$.

Στη συνέχεια δίνουμε μια μέθοδο εκτίμησης της κλάσης στην οποία ανήκει το σύνολο με το οποίο ασχολούμαστε με βάση την περιγραφή του και τις ιδιότητες κλειστότητας της Γ, (βλ. [**34**, 1C]).

Παράδειγμα 3.2.1. Παίρνουμε μια κλάση Γ που είναι συνεχής ως προς συνεχή αντικατάσταση και τον τελεστή της διάζευξης. Όπως είδαμε πιο πάνω, μπορούμε να αναδιατάξουμε ή να παραλείψουμε μεταβλητές χωρίς να εξέλθουμε της Γ. Συνδυάζοντας αυτό με την κλειστότητα ως προς $\vee$, μπορούμε να κάνουμε πιο σύνθετους υπολογισμούς.

Παίρνουμε δύο σύνολα $Q \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Z} \times \mathcal{Y}$, $R \subseteq \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$ που ανήκουν στη Γ και ορίζουμε $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$ με

$$(x,y,z) \in P \iff (x,z,y) \in Q \quad \text{ή} \quad (y,z) \in R.$$

Δείχνουμε ότι το P ανήκει στη Γ. Για να το δούμε αυτό παίρνουμε τα σύνολα Q^*, R^* με

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in Q^* &\iff (x,z,y) \in Q \\ (x,y,z) \in R^* &\iff (y,z) \in R \end{aligned}$$

έτσι που

$$(x,y,z) \in P \iff (x,y,z) \in Q^* \;\vee\; (x,y,z) \in R^*.$$

Από την κλειστότητα της Γ ως προς συνεχή αντικατάσταση και τον τελεστή $\vee$ έχουμε ότι τα σύνολα Q^*, R^* και $P = Q^* \vee R^*$ ανήκουν στη Γ.

Παράδειγμα 3.2.2. Η κλειστότητα ως προς συνεχή αντικατάσταση εφαρμόζεται χωρίς πολλές λεπτομέρειες και σε συναρτήσεις που είναι πιο σύνθετες από αυτές της Παρατήρησης 3.1.5 (αναδιάταξη και παράλειψη μεταβλητών). Για παράδειγμα, θυμίζουμε την $(\alpha)_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : t \mapsto \alpha(\langle 0, t\rangle)$, (βλ. τη (2.12)).

Από την Άσκηση 2.3.18 η συνάρτηση $h : \mathcal{N} \to \mathcal{N} : h(\alpha, n) = (\alpha)_n$ είναι συνεχής και συνεπώς η $f : \mathcal{N} \to \mathcal{N} : f(\alpha) = (\alpha)_0 = h(\alpha, 0)$ είναι επίσης συνεχής.

Θεωρούμε μια κλάση Γ που είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση και παίρνουμε ένα $Q \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ που ανήκει στη Γ. Ορίζουμε το σύνολο $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ με

$$(x, \alpha) \in P \iff (x, (\alpha)_0) \in Q.$$

Τότε το P ανήκει επίσης στη Γ. (Με λεπτομέρεια αυτό συμβαίνει γιατί $P = g^{-1}[Q]$, όπου $g : \mathcal{X} \times \mathcal{N} \to \mathcal{X} \times \mathcal{N} : g(x, \alpha) = (x, (\alpha)_0)$. Προφανώς η g είναι συνεχής.)

Φυσικά μπορούμε να συνδυάσουμε το προηγούμενο με αναδιάταξη και παράλειψη μεταβλητών. Για παράδειγμα, αν πάρουμε το Q από πιο πάνω, τότε το σύνολο $P' \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N} \times \mathcal{X}$ με

$$(\alpha, \beta, x) \in P' \iff (x, (\alpha)_0) \in Q$$

ανήκει επίσης στη Γ. (Με λεπτομέρεια αυτό συμβαίνει γιατί $P' = r^{-1}[Q]$, όπου $r : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X} \times \mathcal{N} : r(\alpha, \beta, x) = (x, (\alpha)_0)$. Προφανώς η r είναι συνεχής.)

Παράδειγμα 3.2.3. Θεωρούμε όπως πριν μια κλάση Γ που είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση, όπως επίσης τη συνεχή συνάρτηση $h : \mathcal{N} \to \mathcal{N} : h(\alpha, n) = (\alpha)_n$. Τότε για κάθε σύνολο $Q \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ που ανήκει στη Γ το σύνολο $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N} \times \mathbb{N}$ με

$$(x, \alpha, n) \in P \iff (x, (\alpha)_n) \in Q$$

ανήκει επίσης στη Γ. Όπως πιο πάνω, αυτό είναι σαφές από την κλειστότητα ως προς συνεχή αντικατάσταση. Στη συνέχεια, μπορούμε να πάρουμε το σύνολο $R \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ με

$$(x, \alpha) \in R \iff \forall n \ (x, \alpha, n) \in P \iff \forall n \ (x, (\alpha)_n) \in Q.$$

Είναι τότε σαφές ότι το R ανήκει στην κλάση $\forall^{\mathbb{N}}\Gamma$.

Παράδειγμα 3.2.4. Επανερχόμαστε στο αρχικό παράδειγμα του συνόλου $Bd_A \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *όλων των φραγμένων ακολουθιών μέσα από ένα δοσμένο σύνολο* $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in Bd_A \iff \exists k \ \forall n \ (x_n \in A \ \& \ |x_n| \leqslant k).$$

Παίρνουμε για Γ την κλάση όλων των κλειστών συνόλων. Αυτή είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση, γιατί η αντίστροφη εικόνα ενός κλειστού συνόλου μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης είναι κλειστό σύνολο. Επίσης, είναι κλειστή ως προς τον τελεστή & (τομή δύο κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο), και όπως θα δούμε αργότερα είναι επίσης κλειστή ως προς $\forall^{\mathbb{N}}$. Για τους σκοπούς του παραδείγματος θεωρούμε δεδομένο ότι η κλάση η $\exists^{\mathbb{N}}\Gamma$ είναι ακριβώς η κλάση των F_σ συνόλων.

Δείχνουμε ότι αν το A είναι κλειστό σύνολο, τότε το Bd_A είναι F_σ σύνολο, δηλαδή ότι ανήκει στην $\exists^{\mathbb{N}}\Gamma$. Αυτό είναι σαφές σε σχέση με τα προηγούμενα. Τα πιο κάτω σύνολα ανήκουν στη Γ λόγω της κλειστότητας ως προς συνεχή αντικατάσταση και $\forall^{\mathbb{N}}$:

$$((x_i)_{i \in \mathbb{N}}, k, n) \in F_1 \iff x_n \in A$$

(παίρνουμε τη συνεχή συνάρτηση $g((x_i)_{i \in \mathbb{N}}, k, n) = x_n$ έτσι που $F_1 = g^{-1}[A]$)

$$((x_i)_{i \in \mathbb{N}}, k, n) \in F_2 \iff |x_n| \leqslant k$$

(παίρνουμε τη συνεχή συνάρτηση $h((x_i)_{i \in \mathbb{N}}, k, n) = k - |x_n|$ έτσι που $F_2 = h^{-1}[[0, \infty)]$)

$$((x_i)_{i \in \mathbb{N}}, k, n) \in F_3 \iff ((x_i)_{i \in \mathbb{N}}, n, k) \in F_1 \ \& \ ((x_i)_{i \in \mathbb{N}}, k, n) \in F_2$$
$$((x_i)_{i \in \mathbb{N}}, k, n) \in F_4 \iff \forall n \ ((x_i)_{i \in \mathbb{N}}, n, k) \in F_3.$$

Είναι σαφές ότι $Bd_A = \exists^{\mathbb{N}} F_4$ και επομένως το Bd_A ανήκει στην κλάση $\exists^{\mathbb{N}}\Gamma$.

Διαγραμματικός Συλλογισμός. Αντί να γράφουμε κάθε φορά ένα ξεχωριστό σύνολο, μπορούμε να συνοψίσουμε την προηγούμενη ανάλυση χρησιμοποιώντας διαγράμματα ως εξής:

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Bd_A \iff \underbrace{\exists k \ \underbrace{\forall n \ \underbrace{(\underbrace{x_n \in A}_{\Gamma} \ \& \ \underbrace{|x_n| \leqslant k}_{\Gamma})}_{\&\Gamma\subseteq\Gamma}}_{\forall^{\mathbb{N}}\Gamma\subseteq\Gamma}}_{\exists^{\mathbb{N}}\Gamma}.$$

[Πιο αναλυτικά στον προτασιακό τύπο της παρένθεσης «$x_n \in A \ \& \ |x_n| \leqslant k$» θεωρούμε για μεταβλητές τα $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, k και n. Όταν γράφουμε για παράδειγμα $\underbrace{x_n \in A}_{\Gamma}$, εννοούμε ότι το σύνολο όλων των τριάδων $((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, k, n)$ για τις οποίες ισχύει $x_n \in A$ ανήκει στη Γ. Στον προτασιακό τύπο «$\forall n \ (x_n \in A \ \& \ |x_n| \leqslant k)$» θεωρούμε για μεταβλητές τα $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ και k. Όταν γράφουμε $\underbrace{\forall n \ (x_n \in A \ \& \ |x_n| \leqslant k)}_{\forall^{\mathbb{N}}\Gamma \subseteq \Gamma}$, εννοούμε ότι το σύνολο όλων των ζευγών $((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, k)$ για τα οποία ισχύει $\forall n \ (x_n \in A \ \& \ |x_n| \leqslant k)$ ανήκει στην $\forall^{\mathbb{N}}\Gamma$ η οποία περιέχεται στη Γ λόγω της κλειστότητας της τελευταίας ως προς συνεχή αντικατάσταση. Όμως θα αποφεύγουμε την αναφορά σε τόσες λεπτομέρειες.]

Αυτή είναι μια αρκετά ισχυρή και κομψή μέθοδος καθώς μας επιτρέπει να εκτιμήσουμε την κλάση στην οποία ανήκει το δοσμένο σύνολο **κατευθείαν από την περιγραφή του** και με σχετικά **άμεσο τρόπο**.

Για να αναδείξουμε το τελευταίο θα επιχειρήσουμε να δείξουμε ότι το σύνολο Bd_A του Παραδείγματος 3.2.4 είναι F_σ σύνολο με κλασικές μεθόδους παίρνοντας δεδομένο ότι το A είναι κλειστό. Αρχικά ορίζουμε τα σύνολα $F_{n,k}$, $M_{n,k}$, $M_{n,k}$, όπου $k, n \in \mathbb{N}$ ως εξής:

$$\begin{aligned}(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in F_{n,k} &\iff x_n \in A\\ (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in M_{n,k} &\iff |x_n| \leqslant k\\ L_{n,k} = F_{n,k} \cap M_{n,k}.\end{aligned}$$

Αυτά είναι εύκολα κλειστά σύνολα. Επιπλέον

$$Bd_A = \textstyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} L_{n,k}.$$

Το σύνολο $N_k = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} L_{n,k}$ είναι κλειστό ως τομή κλειστών, συνεπώς το $Bd_A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} N_k$ είναι αριθμήσιμη ένωση κλειστών, δηλαδή F_σ.

Η κομψότητα του διαγραμματικού συλλογισμού γίνεται πιο εμφανής σε πιο σύνθετα παραδείγματα.

Παράδειγμα 3.2.5. Θεωρούμε μια κλάση Γ που περιέχει τα κλειστά σύνολα και που είναι κλειστή ως προς τους τελεστές $\vee$, $\forall^{\mathbb{N}}$, $\exists^{\mathcal{N}}$ και συνεχή αντικατάσταση. Ορίζουμε το σύνολο $P \subseteq \mathcal{X}$ με

$$x \in P \iff \forall n \ \exists \alpha \ \forall m \ (x = f_n(\alpha) \ \vee \ g_m(x, \alpha) = 0)$$

όπου οι f_n, g_m, $m, n \in \mathbb{N}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις. Δείχνουμε ότι το P ανήκει στη Γ. Αυτό είναι άμεσο με χρήση του διαγραμματικού συλλογισμού που περιγράψαμε προηγουμένως και των ιδιοτήτων κλειστότητας της Γ:

$$x \in P \iff \underbrace{\forall n \ \underbrace{\exists \alpha \ \underbrace{\forall m \ \underbrace{(\underbrace{x = f_n(\alpha)}_{\Gamma} \ \vee \ \underbrace{g_m(x,\alpha) = 0}_{\Gamma})}_{\vee \Gamma \subseteq \Gamma}}_{\forall^{\mathbb{N}} \Gamma \subseteq \Gamma}}_{\exists^{\mathcal{N}} \Gamma \subseteq \Gamma}}_{\forall^{\mathbb{N}} \Gamma \subseteq \Gamma}.$$

Αφήνουμε για άσκηση την αντίστοιχη κλασική απόδειξη με βάση τις συνολοθεωρητικές ισότητες ότι το προηγούμενο P ανήκει στη Γ (Άσκηση 3.2.13. Για να γίνουν πιο εμφανείς οι διαφορές κάνουμε μια μικρή αναδιατύπωση του προβλήματος.)

Ο υπαρξιακός ποσοδείκτης υπεράνω του $\mathbb{N}$ και η αριθμήσιμη ένωση. Όπως γίνεται σαφές από τα προηγούμενα, υπάρχει μια αλληλεπίδραση ανάμεσα στους τελεστές $\exists^{\mathbb{N}}$ και $\bigvee_{\mathbb{N}}$. Για παράδειγμα, αναφέραμε ότι αν Γ είναι η κλάση όλων των κλειστών συνόλων τότε η $\exists^{\mathbb{N}}\Gamma$ συμπίπτει με την κλάση όλων των F_σ συνόλων, δηλαδή με την $\bigvee_{\mathbb{N}} \Gamma$.

Φαίνεται ότι οι τελεστές $\exists^{\mathbb{N}}$ και $\bigvee_{\mathbb{N}}$ περιγράφουν την ίδια μαθηματική έννοια, καθώς και οι δύο αναφέρονται στην ύπαρξη κάποιου φυσικού αριθμού n ώστε το δοσμένο x να ανήκει σε ένα σύνολο P_n. Συγκεκριμένα:

Αν έχουμε μια ακολουθία $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ υποσυνόλων κάποιου Πολωνικού χώρου και ορίσουμε

$$P = \{(x,n) \in \mathcal{X} \times \mathbb{N} \mid x \in P_n\} \tag{3.1}$$

τότε είναι άμεσο πως $\exists^{\mathbb{N}} P = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n$. Αντίστροφα, αν έχουμε $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ και ορίσουμε

$$P_n = \{x \in \mathcal{X} \mid (x,n) \in P\}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.2}$$

τότε πάλι έχουμε $\exists^{\mathbb{N}} P = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n$.

Με άλλα λόγια, βλέπουμε ότι ο ένας τελεστής *ανάγεται* στον άλλο. *Δεν σημαίνει όμως* ότι η *κλειστότητα* μιας κλάσης Γ ως προς τον έναν τελεστή *είναι το ίδιο με την κλειστότητα* της Γ ως προς τον άλλον.

Για να εξηγήσουμε το τελευταίο καλύτερα, υποθέτουμε ότι έχουμε μια κλάση Γ που είναι κλειστή ως προς τον τελεστή $\exists^{\mathbb{N}}$ και εξετάζουμε αν η Γ είναι κλειστή ως προς τον τελεστή $\bigvee_{\mathbb{N}}$. Θεωρούμε μια ακολουθία $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ υποσυνόλων κάποιου Πολωνικού χώρου $\mathcal{X}$ που ανήκουν στην Γ. Σύμφωνα με όσα περιγράψαμε πιο πάνω, υπάρχει ένας «φυσιολογικός» τρόπος να προχωρήσουμε.

Θεωρούμε το σύνολο P όπως ορίζεται στην (3.1), έτσι που $\exists^{\mathbb{N}} P = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n$. Αν γνωρίζαμε ότι το P ανήκει στη Γ τότε λόγω της κλειστότητας της Γ ως προς τις αριθμήσιμες ενώσεις υποσυνόλων του $\mathcal{X}$ θα είχαμε

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n = \exists^{\mathbb{N}} P \in \Gamma(\mathcal{X}).$$

Εδώ ακριβώς εντοπίζεται η διαφορά ανάμεσα στους δύο τελεστές. *Δεν είμαστε σε θέση να συμπεράνουμε ότι το προηγούμενο σύνολο P ανήκει στη* Γ χωρίς να γνωρίζουμε κάτι περισσότερο για τη δομή της Γ. Συνεπώς, ο «φυσιολογικός» τρόπος για να δείξουμε ότι η κλειστότητα ως προς $\exists^{\mathbb{N}}$ συνεπάγεται και την κλειστότητα ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$ αποτυγχάνει.

Μάλιστα, υπάρχουν παραδείγματα κλάσεων Γ που είναι κλειστές ως προς $\exists^{\mathbb{N}}$, αλλά όχι ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$. Ένα τέτοιο παράδειγμα κλάσης Γ μπορεί να κατασκευαστεί εύκολα (Άσκηση 3.2.11). Το παράδειγμα είναι κάπως τεχνητό αλλά υπάρχουν και άλλα παραδείγματα τέτοιων κλάσεων Γ που προκύπτουν με πιο φυσιολογικό τρόπο. Αυτές οι κλάσεις είναι αντικείμενο μελέτης της *κατασκευαστικής* περιγραφικής θεωρίας συνόλων (effective descriptive set theory) που δεν μας απασχολεί στο παρόν σύγγραμμα.

Ο αντίστοιχος συλλογισμός μπορεί να γίνει αν αλλάξουν θέσεις οι δύο τελεστές. Υποθέτουμε ότι έχουμε μια κλάση Γ που είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες ενώσεις και θα επιχειρήσουμε να δείξουμε ότι η Γ είναι κλειστή ως προς τον τελεστή $\exists^{\mathbb{N}}$. Θεωρούμε $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ που ανήκει στη Γ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε P_n όπως στην (3.2) ώστε να έχουμε $\exists^{\mathbb{N}} P = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n$.

Αν γνωρίζαμε ότι κάθε P_n ανήκει στη Γ, λόγω της κλειστότητας της τελευταίας ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$, θα είχαμε ότι $\exists^{\mathbb{N}} P = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n$ που είναι στη Γ. Όμως, όμοια με πριν, δεν είμαστε σε θέση να συμπεράνουμε ότι τα σύνολα P_n, $n \in \mathbb{N}$, ανήκουν στη Γ. Για την ακρίβεια μπορεί κανείς να δώσει παραδείγματα κλάσεων Γ που είναι είναι κλειστές ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$ αλλά όχι ως προς $\exists^{\mathbb{N}}$ (Άσκηση 3.2.12). Σε αυτή την περίπτωση όμως, τα παραδείγματα που γνωρίζουμε είναι τεχνητά. Στις κλάσεις Γ που προκύπτουν με φυσιολογικό τρόπο, η κλειστότητα ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$ συνεπάγεται και κλειστότητα ως προς $\exists^{\mathbb{N}}$. Αυτό γίνεται εμφανές από το επόμενο αποτέλεσμα και την παρατήρηση που το ακολουθεί.

Πρόταση 3.2.6. Για κάθε κλάση Γ που είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση έχουμε τα εξής:

(i) Αν το σύνολο $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ ανήκει στη Γ, τότε για κάθε $y \in \mathcal{Y}$ η y-τομή

$$P_y = \{x \in \mathcal{X} \mid (x, y) \in P\}$$

ανήκει επίσης στη Γ.

(ii) Προκύπτει ότι ισχύει η εξής συνεπαγωγή,

$$\Gamma\text{: κλειστή ως προς } \bigvee_{\mathbb{N}} \implies \Gamma\text{: κλειστή ως προς } \exists^{\mathbb{N}}.$$

Απόδειξη. Για το (i) θεωρούμε $y \in \mathcal{Y}$ και παρατηρούμε ότι

$$x \in P_y \iff (x, y) \in P \iff a_{\mathcal{X},y}(x) \in P \iff x \in a_{\mathcal{X},y}^{-1}[P]$$

όπου

$$a_{\mathcal{X},y} : \mathcal{X} \to \mathcal{X} \times \mathcal{Y} : a_{\mathcal{X},y}(x) = (x, y).$$

Είναι σαφές ότι οι $a_{\mathcal{X},y}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις. Επομένως, από την κλειστότητα της Γ ως προς συνεχή αντικατάσταση προκύπτει ότι το σύνολο P_y ανήκει στη Γ για κάθε $y \in \mathcal{Y}$.

Για το (ii) εφαρμόζουμε τις παρατηρήσεις της προηγούμενης συζήτησης για $\mathcal{Y} = \mathbb{N}$ και το (i). Θεωρούμε $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ που ανήκει στη Γ και δείχνουμε ότι το σύνολο $\exists^{\mathbb{N}} P \subseteq \mathcal{X}$ ανήκει επίσης στη Γ. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} x \in \exists^{\mathbb{N}} P &\iff \exists n\ (x, n) \in P \\ &\iff \exists n\ x \in P_n \end{aligned}$$

όπου P_n είναι η n-τομή $\{x \in \mathcal{X} \mid (x, n) \in P\}$. Από το (i) κάθε P_n ανήκει στη Γ και από την κλειστότητα της Γ ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$ έχουμε ότι το σύνολο $\exists^{\mathbb{N}} P = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} a_{\mathcal{X},n}^{-1}[P]$ ανήκει επίσης στη Γ. ▫

Παρατήρηση 3.2.7. Είναι άμεσο ότι τα συμπεράσματα στα (i) και (ii) της προηγούμενης πρότασης ισχύουν ακόμα και αν η Γ είναι κλειστή ως προς την αντικατάσταση από μια μικρή συλλογή συνεχών συναρτήσεων. Συγκεκριμένα, στην προηγούμενη πρόταση αρκεί να υποθέσει κανείς ότι η Γ είναι κλειστή ως προς Γ′-αντικατάσταση, όπου Γ′ είναι η κλάση όλων των συναρτήσεων $a_{\mathcal{X},y}$ της τελευταίας απόδειξης.

Η κλειστότητα ως προς Γ'-αντικατάσταση είναι το ελάχιστο που θα θέλαμε να ικανοποιεί μια ενδιαφέρουσα κλάση Γ, οπότε για τις ενδιαφέρουσες κλάσεις η κλειστότητα ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$ συνεπάγεται την κλειστότητα ως προς $\exists^{\mathbb{N}}$.

Το ακόλουθο αποτέλεσμα μας βοηθά να συμπεράνουμε την αντίστροφη συνεπαγωγή της Πρότασης 3.2.6.

Πρόταση 3.2.8. *Θεωρούμε μια κλάση Γ που ικανοποιεί την ιδιότητα:*

$$(3.3)\quad \begin{cases} \text{για κάθε Πολωνικό χώρο } \mathcal{X} \text{ και κάθε ακολουθία } (P_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ από} \\ \text{σύνολα της } \Gamma(\mathcal{X}) \text{ το σύνολο } P \subseteq \mathcal{X}\times\mathbb{N} \text{ που ορίζεται ως εξής} \\ \qquad\qquad (x,n)\in P \iff x \in P_n \\ \text{ανήκει στη } \Gamma. \end{cases}$$

Αν η Γ είναι επιπλέον κλειστή ως προς $\exists^{\mathbb{N}}$, τότε είναι επίσης κλειστή ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$.

Απόδειξη. Θεωρούμε μια ακολουθία $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από υποσύνολα του ίδιου χώρου $\mathcal{X}$ που ανήκουν στη Γ και το σύνολο $P \subseteq \mathcal{X}\times\mathbb{N}$ που ορίζεται όπως στην (3.3). Από την υπόθεση το P ανήκει στη Γ. Επιπλέον για κάθε $x \in \mathcal{X}$,

$$\begin{aligned} x \in \bigcup\nolimits_{n\in\mathbb{N}} P_n &\iff \exists n\ x \in P_n \\ &\iff \exists n\ (x,n) \in P. \end{aligned}$$

Επομένως, αν η Γ είναι κλειστή ως προς $\exists^{\mathbb{N}}$, τότε από τις προηγούμενες ισοδυναμίες το σύνολο $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n$ ανήκει στη Γ και άρα η τελευταία είναι κλειστή ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$. □

Η προηγούμενη πρόταση είναι προφανής υπό το φως της προηγούμενης συζήτησης, αλλά αποτελεί ένα χρήσιμο εργαλείο. Θα δούμε ότι όλες οι κλάσεις που μας απασχολούν στο παρόν σύγγραμμα ικανοποιούν την ιδιότητα (3.3) και επίσης είναι κλειστές ως προς συνεχή αντικατάσταση. Με βάση τις τελευταίες δύο προτάσεις συμπεραίνουμε ότι οι κλειστότητες ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$ και $\exists^{\mathbb{N}}$ για τις κλάσεις μας είναι ισοδύναμες ιδιότητες. Αξίζει να απομονώσουμε αυτό τον συλλογισμό σε ένα ξεχωριστό αποτέλεσμα.

Πόρισμα 3.2.9. *Θεωρούμε μια κλάση Γ που είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση και που ικανοποιεί την πιο πάνω ιδιότητα* (3.3). *Τότε η Γ είναι κλειστή ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$ αν και μόνο αν είναι κλειστή ως προς $\exists^{\mathbb{N}}$.*

Απόδειξη. Άμεση από τις Προτάσεις 3.2.6 και 3.2.8. □

Τέλος παρατηρούμε ότι τα προηγούμενα ισχύουν και για άλλα ζεύγη τελεστών στη θέση των $(\bigvee_{\mathbb{N}}, \exists^{\mathbb{N}})$.

Πρόταση 3.2.10. *Οι Προτάσεις 3.2.6 και 3.2.8 και συνεπώς το Πόρισμα 3.2.9 ισχύουν αν αντικαταστήσουμε το ζεύγος τελεστών $(\bigvee_{\mathbb{N}}, \exists^{\mathbb{N}})$ με οποιαδήποτε από τα $(\exists^{\leqslant}, \bigvee_{\leqslant})$, $(\forall^{\mathbb{N}}, \bigwedge_{\mathbb{N}})$ και $(\forall^{\leqslant}, \bigwedge_{\leqslant})$.*

Η απόδειξη είναι ουσιαστικά η ίδια – αποφεύγουμε να εισέλθουμε σε περαιτέρω λεπτομέρειες.

Ασκήσεις

Άσκηση 3.2.11. Θεωρούμε την κλάση Γ των *μονοσυνόλων* σε Πολωνικούς χώρους, δηλαδή

$$\Gamma(\mathcal{X}) = \{\{x\} \mid x \in \mathcal{X}\}$$

για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$. Εξετάστε την κλειστότητα της Γ ως προς $\exists^{\mathbb{N}}$ και $\bigvee_{\mathbb{N}}$.

Άσκηση 3.2.12. Θεωρούμε την κλάση Γ των υποσυνόλων Πολωνικών χώρων με *τουλάχιστον δύο στοιχεία*, δηλαδή

$$\Gamma(\mathcal{X}) = \{A \in \mathcal{P}(\mathcal{X}) \mid \exists a, b \in A \ a \neq b\}$$

για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$. Εξετάστε την κλειστότητα της Γ ως προς $\exists^{\mathbb{N}}$ και $\bigvee_{\mathbb{N}}$.

Άσκηση 3.2.13. Θεωρούμε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και συνεχείς συναρτήσεις

$$f_n : \mathcal{X} \to \mathcal{N},\ g_m : \mathcal{X} \times \mathcal{N} \to \mathbb{R},\ m, n \in \mathbb{N}.$$

Ορίζουμε το σύνολο $P \subseteq \mathcal{X}$ ως εξής,

$$x \in P \iff \forall n\ \exists \alpha\ \forall m\ (x = f_n(\alpha)\ \vee\ g_m(x, \alpha) = 0).$$

Τότε το P γράφεται ως αριθμήσιμη τομή συνόλων που είναι προβολές κλειστών συνόλων.

Άσκηση 3.2.14. Έστω $\mathcal{X}$ Πολωνικός χώρος και T κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ (όπου στο $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ θεωρούμε τη διακριτή μετρική), έτσι ώστε για κάθε $x \in \mathcal{X}$ το σύνολο $T(x) = \{u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \mid (x, u) \in T\}$ να είναι δένδρο. Τότε για κάθε $u \in \mathbb{N}$ το σύνολο

$$A_u = \{x \in \mathcal{X} \mid \text{το υποδένδρο } T_u(x) \text{ έχει κόμβους οσοδήποτε μεγάλου μήκους}\}$$

ανήκει στην $\forall^{\mathbb{N}}\exists^{\mathbb{N}}\Gamma$, όπου Γ είναι η κλάση των κλειστών συνόλων σε Πολωνικούς χώρους.

Άσκηση 3.2.15. *Επαναλαμβάνουμε την Άσκηση 2.5.26, όπου τώρα ζητείται οι υπολογισμοί να γίνουν με χρήση των τελεστών. Συγκρίνετε τις λύσεις των δύο ασκήσεων.*

Έστω $\mathcal{X}$ Πολωνικός χώρος, $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία από ανοικτά υποσύνολα του $\mathcal{X}$, ένα σύνολο $T \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ που ικανοποιεί την ισοδυναμία (2.26),

$$(x, u) \in T \iff \forall v \in J\ \forall n \in I \text{ με } n \leqslant |u|\ (x \notin V_n \ \&\ v \nsubseteq u)$$

και η συνάρτηση $f : \mathcal{X} \to \mathrm{Tr}$

$$f(x) = T(x) = \{u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \mid (x, u) \in T\}.$$

Παίρνουμε δεδομένο ότι η κλάση των κλειστών συνόλων είναι κλειστή ως προς τον τελεστή $\forall^{\mathbb{N}}$. Τότε το T είναι κλειστό σύνολο και για κάθε $u, w \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ το σύνολο $P_{u,w} \subseteq \mathcal{X}$ με

$$x \in P_{u,w} \iff u \in f(x)\ \&\ w \notin f(x)$$

είναι F_σ.

Μάλιστα, αν τα V_n είναι κλειστά-ανοικτά υποσύνολα του $\mathcal{X}$, τα $P_{u,w}$ είναι ανοικτά σύνολα.

3.3. Οι κλάσεις Borel συνόλων πεπερασμένης τάξης

Ορισμός 3.3.1. Ορίζουμε με αναδρομή στο $n \geqslant 1$ τις εξής κλάσεις συνόλων σε Πολωνικούς χώρους:

$$\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_1 = \text{η κλάση όλων των ανοικτών συνόλων}$$

$$\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_1 = \mathrm{c}\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_1 = \text{η κλάση όλων των κλειστών συνόλων}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \mathbf{\Sigma}^0_1(\mathcal{X}) \arrow[dr, phantom, sloped, "\subseteq"] & & \mathbf{\Sigma}^0_2(\mathcal{X}) \arrow[dr, phantom, sloped, "\subseteq"] & & & \mathbf{\Sigma}^0_n(\mathcal{X}) \arrow[dr, phantom, sloped, "\subseteq"] & \\
\mathbf{\Delta}^0_1(\mathcal{X}) \arrow[ur, phantom, sloped, "\subseteq"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subseteq"] & & \mathbf{\Delta}^0_2(\mathcal{X}) \arrow[ur, phantom, sloped, "\subseteq"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subseteq"] & & \cdots \arrow[r, phantom] & \mathbf{\Delta}^0_n(\mathcal{X}) \arrow[ur, phantom, sloped, "\subseteq"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subseteq"] & & \cdots \\
 & \mathbf{\Pi}^0_1(\mathcal{X}) \arrow[ur, phantom, sloped, "\subseteq"] & & \mathbf{\Pi}^0_2(\mathcal{X}) \arrow[ur, phantom, sloped, "\subseteq"] & & & \mathbf{\Pi}^0_n(\mathcal{X}) \arrow[ur, phantom, sloped, "\subseteq"] &
\end{tikzcd}$$

Διαγραμμα 1. Η ιεραρχία των Borel υποσυνόλων του $\mathcal{X}$ πεπερασμένης τάξης.

και

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Sigma}^0_{n+1} &= \textstyle\bigvee_{\mathbb{N}} \ \mathbf{\Pi}^0_n \\
&= \text{οι αριθμήσιμες ενώσεις συνόλων της } \mathbf{\Pi}^0_n \\
\mathbf{\Pi}^0_{n+1} &= \mathrm{c}\mathbf{\Sigma}^0_{n+1} \\
&= \text{τα συμπληρώματα των συνόλων της } \mathbf{\Sigma}^0_{n+1}.
\end{aligned}$$

Τέλος θέτουμε

$$\mathbf{\Delta}^0_n = \mathbf{\Sigma}^0_n \cap \mathbf{\Pi}^0_n.$$

Είναι άμεσο ότι ένα $P \subseteq \mathcal{X}$ ανήκει στη $\mathbf{\Delta}^0_n$ αν και μόνο αν τα σύνολα P και $\mathcal{X} \setminus P$ ανήκουν στη $\mathbf{\Sigma}^0_n$. Επιπλέον, είναι εύκολο να δει κανείς (Άσκηση 3.3.11) ότι

$$\mathbf{\Pi}^0_{n+1} = \textstyle\bigwedge_{\mathbb{N}} \ \mathbf{\Sigma}^0_n.$$

Οι κλάσεις $\mathbf{\Sigma}^0_n$ είναι οι **κλάσεις Borel συνόλων πεπερασμένης τάξης** ενώ οι $\mathbf{\Pi}^0_n$ και $\mathbf{\Pi}^0_n$ είναι οι **δυϊκές** (dual) και **αμφίσημες** (ambiguous) αντίστοιχα κλάσεις Borel συνόλων πεπερασμένης τάξης.

Η συλλογή όλων των προηγούμενων κλάσεων ονομάζεται **ιεραρχία των Borel συνόλων πεπερασμένης τάξης**. Θα αναφερόμαστε επίσης στην **ιεραρχία των Borel υποσυνόλων ενός δοσμένου Πολωνικού χώρου $\mathcal{X}$ πεπερασμένης τάξης** εννοώντας τη συλλογή όλων των οικογενειών υποσυνόλων του $\mathcal{X}$ που προκύπτουν από τις προηγούμενες κλάσεις.

Παρατήρηση 3.3.2. Η κλάση $\mathbf{\Sigma}^0_2$ αποτελείται ακριβώς από τα F_σ σύνολα και συνεπώς η $\mathbf{\Pi}^0_2$ αποτελείται ακριβώς από τα G_δ σύνολα.

Πρόταση 3.3.3. *Για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και κάθε $n \geqslant 1$ έχουμε*

$$\mathbf{\Delta}^0_n(\mathcal{X}) \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_n(\mathcal{X}) \subseteq \mathbf{\Delta}^0_{n+1}(\mathcal{X})$$

και επομένως ισχύει επίσης

$$\mathbf{\Delta}^0_n(\mathcal{X}) \subseteq \mathbf{\Pi}^0_n(\mathcal{X}) \subseteq \mathbf{\Delta}^0_{n+1}(\mathcal{X}).$$

Δείτε το Διάγραμμα 1.

Απόδειξη. Προφανώς ισχύει $\mathbf{\Delta}^0_n(\mathcal{X}) \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_n(\mathcal{X})$ και $\mathbf{\Delta}^0_n(\mathcal{X}) \subseteq \mathbf{\Pi}^0_n(\mathcal{X})$. Δείχνουμε με επαγωγή στο $n \geqslant 1$ ότι

$$\mathbf{\Sigma}^0_n(\mathcal{X}) \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_{n+1}(\mathcal{X}) \quad \text{και} \quad \mathbf{\Sigma}^0_n(\mathcal{X}) \subseteq \mathbf{\Pi}^0_{n+1}(\mathcal{X}). \tag{3.4}$$

Από το πιο πάνω προκύπτουν φυσικά ότι $\mathbf{\Sigma}^0_n(\mathcal{X}) \subseteq \mathbf{\Delta}^0_{n+1}(\mathcal{X})$.

Για $n = 1$, από την Πρόταση 2.1.6 κάθε ανοικτό υποσύνολο του $\mathcal{X}$ είναι F_σ και G_δ, οπότε από την Παρατήρηση 3.3.2 ισχύει $\mathbf{\Sigma}^0_1(\mathcal{X}) \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_2(\mathcal{X})$ και $\mathbf{\Pi}^0_1(\mathcal{X}) \subseteq \mathbf{\Pi}^0_2(\mathcal{X})$.

Θεωρούμε ότι για κάποιο $n \geqslant 1$ ισχύει η (3.4) και δείχνουμε το αντίστοιχο για το $n+1$. Έστω $A \in \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+1}(\mathcal{X})$. Τότε από τον ορισμό υπάρχει μια ακολουθία $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ από $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$ υποσύνολα του $\mathcal{X}$ με $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$.

Έχουμε

$$\mathcal{X} \setminus B_i \in \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n(\mathcal{X}) \subseteq \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+1}(\mathcal{X})$$

όπου στον τελευταίο εγκλεισμό χρησιμοποιήσαμε την Επαγωγική Υπόθεση. Άρα $B_i \in \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_{n+1}(\mathcal{X})$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$ και

$$A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i \in \bigvee_{\mathbb{N}} \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_{n+1}(\mathcal{X}) = \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+2}(\mathcal{X}).$$

Επιπλέον, αν πάρουμε $A_i = A$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι $A = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i$ και $A_i \in \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+1}(\mathcal{X})$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Επομένως

$$\mathcal{X} \setminus A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}(\mathcal{X} \setminus A_i) \in \bigvee_{\mathbb{N}} \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_{n+1}(\mathcal{X}) = \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+2}(\mathcal{X})$$

και άρα $A \in \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_{n+2}(\mathcal{X})$. Έτσι έχουμε δείξει την (3.4) για το $n+1$.

Τέλος, είναι σαφές ότι οι εγκλεισμοί $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n(\mathcal{X}) \subseteq \underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^0_{n+1}(\mathcal{X})$ είναι άμεσοι από αυτούς της (3.4) παίρνοντας τα συμπληρώματα. ◻

Στο επόμενο βήμα εξασφαλίζουμε κάποιες στοιχειώδεις ιδιότητες κλειστότητας των πιο πάνω κλάσεων. Οι πλήρης λίστα με τις ιδιότητες κλειστότητας δίνεται σε μεταγενέστερο στάδιο στο Θεώρημα 3.3.8.

Λήμμα 3.3.4. *Οι κλάσεις* $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$, $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$ *και* $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^0_n$, $n \geqslant 1$ *είναι κλειστές ως προς* $\vee$, &, *και συνεχή αντικατάσταση.*

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι οι ιδιότητες κλειστότητας των κλάσεων $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^0_n$ είναι άμεσες από τις αντίστοιχες των κλάσεων $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ και $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$. Για παράδειγμα, για να δείξουμε ότι η $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{17}$ και η $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_{17}$ είναι κλειστές ως προς $\vee$, τότε για κάθε $A, B \in \underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^0_{17}(\mathcal{X})$ έχουμε $A, B \in \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{17}(\mathcal{X})$ και $A, B \in \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_{17}(\mathcal{X})$ και άρα

$$A \vee B \in \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{17}(\mathcal{X}) \cap \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_{17}(\mathcal{X}) = \underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^0_{17}(\mathcal{X}).$$

Παρατηρούμε επίσης ότι η κλειστότητα ως προς συνεχή αντικατάσταση της $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ είναι ισοδύναμη με την κλειστότητα ως προς συνεχή αντικατάσταση της $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$, γιατί για κάθε συνάρτηση $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ και κάθε $A \subseteq \mathcal{Y}$ έχουμε

$$f^{-1}[\mathcal{Y} \setminus A] = \mathcal{X} \setminus A.$$

Με άλλα λόγια, αν η f αντιστρέφει στοιχεία της $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ σε στοιχεία της $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$, τότε αντιστρέφει και στοιχεία της $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$ σε στοιχεία της $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$ και αντίστροφα.

Τέλος, παρατηρούμε ότι η κλειστότητα της $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ ως προς $\vee$ και & είναι ισοδύναμη με την κλειστότητα της $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$ ως προς τους ίδιους τελεστές και αντίστροφα. Αυτό συμβαίνει λόγω των *νόμων του de Morgan*,

$$\mathcal{X} \setminus (A \cup B) = (\mathcal{X} \setminus A) \ \cap \ (\mathcal{X} \setminus B)$$
$$\mathcal{X} \setminus (A \cap B) = (\mathcal{X} \setminus A) \ \cup \ (\mathcal{X} \setminus B).$$

Για παράδειγμα αν έχουμε ότι η $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ είναι κλειστή ως προς $\vee$ και πάρουμε $A, B \in \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n(\mathcal{X})$, τότε τα σύνολα $\mathrm{c}_{\mathcal{X}}A = \mathcal{X} \setminus A$ και $\mathrm{c}_{\mathcal{X}}B = \mathcal{X} \setminus B$ ανήκουν στην $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ και συνεπώς το σύνολο $\mathrm{c}_{\mathcal{X}}(A \cap B) = \mathrm{c}_{\mathcal{X}}A \cup \mathrm{c}_{\mathcal{X}}B$ ανήκει επίσης στη $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$. Επομένως, το σύνολο $A \& B = A \cap B$ ανήκει στη $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$ και άρα η τελευταία κλάση είναι κλειστή ως προς &.

Έπειτα, δείχνουμε με επαγωγή στο n ότι οι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$, $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$ έχουν τις ζητούμενες ιδιότητες κλειστότητας.

Για $n = 1$ αφού η πεπερασμένη ένωση και η πεπερασμένη τομή ανοικτών (αντίστοιχα κλειστών) συνόλων είναι ανοικτό (αντίστοιχα κλειστό) υποσύνολο του ίδιου χώρου έχουμε ότι οι κλάσεις $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_1$ και $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_1$ είναι κλειστές ως προς $\vee$ και &. Επίσης, η $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_1$ είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση γιατί η αντίστροφη εικόνα ανοικτού συνόλου μέσω συνεχούς συνάρτησης είναι ανοικτό σύνολο.

Υποθέτουμε ότι ισχύει το ζητούμενο για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ και δείχνουμε το ζητούμενο για το $n+1$. Έστω $A, B \subseteq \mathcal{X}$ που ανήκουν στην $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+1}$ και $f : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ συνεχής. Σύμφωνα με τα προηγούμενα, αρκεί να δείξουμε ότι τα σύνολα $A \cup B$, $A \cap B$ και $f^{-1}[A]$ ανήκουν στη $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+1}$.

Υπάρχουν ακολουθίες $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ και $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ με $A_i, B_i \in \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n(\mathcal{X})$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$ ώστε

$$A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \quad \text{και} \quad B = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i.$$

Τότε

$$\begin{aligned} A \cup B = &\ \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (A_i \cup B_i) \\ A \cap B = &\ \bigcup_{i,j\in\mathbb{N}} (A_i \cap B_j) \\ f^{-1}[A] = &\ \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f^{-1}[A_i]. \end{aligned}$$

Από την επαγωγική υπόθεση η κλάση $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$ είναι κλειστή ως προς $\vee$, &, και συνεχή αντικατάσταση. Άρα τα σύνολα $A_i \cup B_i$, $A_i \cap B_j$ και $f^{-1}[A_i]$ στις πιο πάνω ισότητες ανήκουν στην $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$. Αφού οι πιο πάνω ενώσεις είναι αριθμήσιμες, έχουμε ότι τα σύνολα $A \cup B$, $A \cap B$ και $f^{-1}[A]$ ανήκουν στην $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+1}$ και έχουμε το ζητούμενο. ▫

Πριν προχωρήσουμε στις υπόλοιπες ιδιότητες κλειστότητας είναι χρήσιμο να χαρακτηρίσουμε τις κλάσεις $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ με βάση τον υπαρξιακό ποσοδείκτη $\exists^{\mathbb{N}}$. Δίνουμε πρώτα κάποια βοηθητικά αποτελέσματα.

Παρατήρηση 3.3.5. Για κάθε φυσικό αριθμό $n \geqslant 1$, κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και κάθε $A \in \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n(\mathcal{X} \times \mathcal{X})$ τα σύνολα $A_i \subseteq \mathcal{X}$, $i \in \mathbb{N}$, που ορίζονται ως εξής

$$x \in A_i \iff (x, i) \in A$$

ανήκουν επίσης στην κλάση $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$.

Αυτό είναι άμεσο από το (i) της Πρότασης 3.2.6 γιατί κάθε A_i είναι η i-τομή του A και η $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση (Λήμμα 3.3.4). Φυσικά μπορεί κανείς να το αποδείξει κατευθείαν, όπως στην Πρόταση 3.2.6, παρατηρώντας ότι

$$A_i = f_i^{-1}[A] \quad \text{όπου} \quad f_i : \mathcal{X} \to \mathcal{X} \times \mathbb{N} : f_i(x) = (x, i), \quad i \in \mathbb{N}.$$

Προφανώς, ισχύουν τα ίδια αν αντί της κλάσης $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ έχουμε την $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$.

Στη συνέχεια, δείχνουμε ότι οι κλάσεις Borel συνόλων πεπερασμένης τάξης ικανοποιούν την ιδιότητα (3.3) της Πρότασης 3.2.8.

Λήμμα 3.3.6 ([**34**] - 1F.7). *Θεωρούμε έναν φυσικό αριθμό $n \geqslant 1$, έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$, και μια ακολουθία συνόλων $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ που ανήκουν στην οικογένεια $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n(\mathcal{X})$. Τότε το σύνολο $B \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ που ορίζεται ως εξής*

$$(x, i) \in B \iff x \in B_i$$

ανήκει στην κλάση $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$.

Το πιο πάνω ισχύει επίσης αν αντικαταστήσουμε την κλάση $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ με την $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$.

Απόδειξη. Ο ισχυρισμός για την $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$ προκύπτει από αυτόν για την $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ παίρνοντας τα συμπληρώματα. Γι' αυτό δείχνουμε μόνο τον ισχυρισμό για την $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$.

Ορίζουμε τα σύνολα $C_i \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{N}$, ως εξής:

$$(x, s) \in C_i \iff x \in B_i \ \&\ s = i.$$

Για κάθε i το σύνολο $V_i = \{(x,s) \mid s = i\}$ είναι προφανώς ανοικτό υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathbb{N}$ και από το Λήμμα 3.3.4 ανήκει στην $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$. Πάλι με εφαρμογή του τελευταίου λήμματος, το σύνολο $C_i = B_i \cap V_i$ ανήκει επίσης στη $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$.

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} (x,s) \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i &\iff \exists i \ (x,s) \in C_i \\ &\iff \exists i \ (x \in B_i \ \& \ s = i) \\ &\iff x \in B_s \\ &\iff (x,s) \in B, \end{aligned}$$

δηλαδή $B = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i$.

Αν $n = 1$, τότε κάθε C_i είναι ανοικτό σύνολο και άρα το B είναι επίσης ανοικτό ως ένωση ανοικτών συνόλων, δηλαδή $B \in \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_1(\mathcal{X})$. Αν $n > 1$, τότε για κάθε i υπάρχει ακολουθία συνόλων $(C^i_j)_{j\in\mathbb{N}}$ από $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_{n-1}$ υποσύνολα του $\mathcal{X}$ με

$$C_i = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} C^i_j.$$

Επομένως

$$B = \bigcup_{i,j\in\mathbb{N}} C^i_j$$

και άρα το B είναι αριθμήσιμη ένωση $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_{n-1}$ υποσυνόλων του $\mathcal{X}$, δηλαδή $B \in \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n(\mathcal{X})$. ▫

Πρόταση 3.3.7 (Ισοδύναμος ορισμός των κλάσεων $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$, [**9**], [**35**]). *Για κάθε $n \geqslant 1$ έχουμε*

$$\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+1} = \exists^{\mathbb{N}} \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$$

και συνεπώς

$$\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_{n+1} = \forall^{\mathbb{N}} \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n.$$

Απόδειξη. Ορίζουμε προσωρινά τις κλάσεις

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^*_1 &= \text{η κλάση όλων των ανοικτών συνόλων} = \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_1 \\ \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^*_1 &= \text{η κλάση όλων των κλειστών συνόλων} = \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_1 \\ \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^*_{n+1} &= \exists^{\mathbb{N}} \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^*_n \\ \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^*_{n+1} &= \mathrm{c}\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^*_{n+1}. \end{aligned}$$

Δείχνουμε με επαγωγή στο $n \geqslant 1$ ότι

$$\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n(\mathcal{X}) = \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^*_n(\mathcal{X}) \quad \text{και} \quad \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n(\mathcal{X}) = \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^*_n(\mathcal{X}).$$

(Προφανώς, η τελευταία ισότητα προκύπτει από την προτελευταία παίρνοντας τα συμπληρώματα.)

Για $n = 1$ το ζητούμενο είναι άμεσο από τον ορισμό. Θεωρούμε ότι για κάποιο $n \geqslant 1$ έχουμε το ζητούμενο και δείχνουμε το ίδιο για το $n+1$.

Έστω $P \subseteq \mathcal{X}$ που ανήκει στη $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^*_{n+1}$. Τότε υπάρχει $A \in \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^*_n(\mathcal{X} \times \mathbb{N})$ με $P = \exists^{\mathbb{N}} A$. Από την Επαγωγική Υπόθεση $A \in \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n(\mathcal{X} \times \mathbb{N})$. Εφαρμόζουμε την Παρατήρηση 3.3.5 για την κλάση $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$ και έχουμε ότι για κάθε $i \in \mathbb{N}$ το σύνολο

$$A_i = \{x \mid (x,i) \in A\}$$

ανήκει στην $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$. Επιπλέον

$$x \in P \iff \exists i \ (x,i) \in A \iff \exists i \ x \in A_i,$$

άρα $P = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$. Προκύπτει ότι το P ανήκει στη $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+1}(\mathcal{X})$.

Αντίστροφα, θεωρούμε ένα $P \subseteq \mathcal{X}$ που ανήκει στη $\boldsymbol{\Sigma}^0_{n+1}$ και $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία στοιχείων της $\boldsymbol{\Pi}^0_n(\mathcal{X})$, έτσι ώστε $P = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$. Από το Λήμμα 3.3.6 το σύνολο

$$B = \{(x,i) \mid x \in B_i\}$$

ανήκει επίσης στην $\boldsymbol{\Pi}^0_n$. Από την Επαγωγική Υπόθεση $B \in \boldsymbol{\Pi}^*_n(\mathcal{X} \times \mathbb{N})$. Επιπλέον

$$x \in P \iff \exists i\ x \in B_i \iff \exists i\ (x,i) \in B$$

και άρα $P = \exists^{\mathbb{N}} B \in \boldsymbol{\Sigma}^*_{n+1}(\mathcal{X})$. □

Θεώρημα 3.3.8 (Οι Θεμελιώδεις Ιδιότητες Κλειστότητας των Borel κλάσεων πεπερασμένης τάξης, [**12**], [**34**]). *Οι κλάσεις $\boldsymbol{\Sigma}^0_n$, $\boldsymbol{\Pi}^0_n$ και $\boldsymbol{\Delta}^0_n$, όπου $n \geqslant 1$, είναι κλειστές ως προς συνεχή αντικατάσταση καθώς και ως προς τους τελεστές $\vee$, &, $\exists^{\leqslant}$, $\forall^{\leqslant}$, $\bigvee_{\leqslant}$ και $\bigwedge_{\leqslant}$.*

Οι κλάσεις $\boldsymbol{\Sigma}^0_n$ είναι επιπλέον κλειστές ως προς τους τελεστές

*$\bigvee_{\mathbb{N}}$, $\exists^{\mathbb{N}}$ και γενικότερα $\exists^Y$ όπου Y είναι **αριθμήσιμος** Πολωνικός χώρος.*

Οι κλάσεις $\boldsymbol{\Pi}^0_n$ είναι επιπλέον κλειστές ως προς τους τελεστές

*$\bigwedge_{\mathbb{N}}$, $\forall^{\mathbb{N}}$ και γενικότερα $\forall^Y$ όπου Y είναι **αριθμήσιμος** Πολωνικός χώρος.*

Οι κλάσεις $\boldsymbol{\Delta}^0_n$ είναι επιπλέον κλειστές ως προς τον τελεστή του συμπληρώματος c.

Απόδειξη. Η κλειστότητα των κλάσεων ως προς συνεχή αντικατάσταση και ως προς τους τελεστές $\vee$, & αποδείχθηκε στο Λήμμα 3.3.4. Η κλειστότητα ως προς τους τελεστές της πεπερασμένης ένωσης $\bigvee_{\leqslant}$ και τομής $\bigwedge_{\leqslant}$ προκύπτει από την κλειστότητα ως προς $\vee$ και & αντίστοιχα με επαγωγή στο πλήθος της πεπερασμένης ακολουθίας συνόλων που θεωρούμε.

Από την Πρόταση 3.2.10 η κλειστότητα της $\boldsymbol{\Sigma}^0_n$ ως προς $\exists^{\leqslant}$ και $\forall^{\leqslant}$ είναι ισοδύναμη με την κλειστότητα ως προς $\bigvee_{\leqslant}$ και $\bigwedge_{\leqslant}$ αντίστοιχα (εδώ χρησιμοποιούμε φυσικά την κλειστότητα της $\boldsymbol{\Sigma}^0_n$ ως προς συνεχή αντικατάσταση).

Στη συνέχεια, ασχολούμαστε με τις επιπλέον ιδιότητες κλειστότητας της $\boldsymbol{\Sigma}^0_n$. Θεωρούμε αρχικά μια ακολουθία $(P_i)_{i\in\mathbb{N}}$ υποσυνόλων του $\mathcal{X}$ που ανήκει στη $\boldsymbol{\Sigma}^0_n$ και δείχνουμε ότι η ένωση $P = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} P_i$ είναι ανοικτό σύνολο.

Αν $n = 1$, τότε τα P_i είναι ανοικτά σύνολα και συνεπώς το P είναι ανοικτό ως ένωση ανοικτών συνόλων. Αν $n > 1$, τότε κάθε P_i είναι η ένωση μια ακολουθίας $(Q^i_j)_{j\in\mathbb{N}}$ από $\boldsymbol{\Pi}^0_{n-1}$ υποσύνολα του $\mathcal{X}$. Επομένως

$$P = \bigcup_{i,j} Q^i_j$$

και άρα το P είναι αριθμήσιμη ένωση ακολουθίας $\boldsymbol{\Pi}^0_{n-1}$ υποσυνόλων του $\mathcal{X}$, δηλαδή $P \in \boldsymbol{\Sigma}^0_n(\mathcal{X})$.

Το πιο πάνω δείχνει την κλειστότητα της $\boldsymbol{\Sigma}^0_n$ ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$. Από το Πόρισμα 3.2.9, η κλειστότητα της $\boldsymbol{\Sigma}^0_n$ είναι ισοδύναμη με την κλειστότητα ως προς $\exists^{\mathbb{N}}$.

Για την κλειστότητα της $\boldsymbol{\Sigma}^0_n$ ως προς $\exists^Y$, όπου Y είναι ένας αριθμήσιμος Πολωνικός χώρος, θεωρούμε μια απαρίθμηση $f : \mathbb{N} \twoheadrightarrow Y$. Αφού το $\mathbb{N}$ θεωρείται με τη διακριτή τοπολογία, η f είναι συνεχής. Για κάθε $Q \in \boldsymbol{\Sigma}^0_n(\mathcal{X} \times Y)$ έχουμε

$$\begin{aligned} x \in \exists^Y Q &\iff \exists y\ (x,y) \in Q \\ &\iff \exists n\ (x, f(n)) \in Q \end{aligned}$$

και το σύνολο $\exists^Y Q$ ανήκει στην κλάση $\boldsymbol{\Sigma}^0_n$ λόγω της κλειστότητας της τελευταίας ως προς $\exists^{\mathbb{N}}$ και συνεχή αντικατάσταση.

Οι ιδιότητες κλειστότητας της $\boldsymbol{\Pi}^0_n$ ως προς $\exists^{\leqslant}$, $\forall^{\leqslant}$, $\bigwedge_{\mathbb{N}}$, $\forall^{\mathbb{N}}$, $\forall^Y$, όπου Y είναι αριθμήσιμος Πολωνικός χώρος προκύπτουν από τις αντίστοιχες της $\boldsymbol{\Pi}^0_n$ παίρνοντας τον τελεστή του συμπληρώματος. Προκύπτει ότι η $\boldsymbol{\Delta}^0_n$ είναι επίσης κλειστή ως προς $\exists^{\leqslant}$ και $\forall^{\leqslant}$. Τέλος είναι σαφές ότι η $\boldsymbol{\Delta}^0_n$ είναι κλειστή ως προς τον τελεστή του συμπληρώματος c. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. ▫

Η κλειστότητα ως προς $\exists^Y$ ή $\forall^Y$, όπου Y είναι ένας αριθμήσιμος Πολωνικός χώρος, μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον Πολωνικό χώρο $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ χωρίς να χρειαστεί να καταφύγουμε σε κάποια απαρίθμησή του, όπως έχουμε κάνει στην επίλυση της Άσκησης 3.2.14. Δείτε για παράδειγμα τις λύσεις των Ασκήσεων 3.3.13 και 3.3.15.

Οι ιδιότητες κλειστότητας των κλάσεων Borel συνόλων πεπερασμένης τάξης μας επιτρέπουν να εκτιμήσουμε σε ποια κλάση ανήκει το δοσμένο σύνολο. Δίνουμε μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 3.3.9. Θεωρούμε τον Πολωνικό χώρο $\mathcal{X} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}$ και το σύνολο

$$P = \{\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, x\big) \in \mathcal{X} \mid x_n \to x\}.$$

Δείχνουμε ότι το P είναι $\boldsymbol{\Pi}^0_3$ υποσύνολο του $\mathcal{X}$. Έχουμε

$$\begin{aligned}\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, x\big) \in P &\iff \forall k\ \exists n_0\ \forall n\ \geqslant n_0\ |x_n - x| \leqslant 2^{-k}\\ &\iff \forall k\ \exists n_0\ \forall n\ (n < n_0\ \vee\ |x_n - x| \leqslant 2^{-k}).\end{aligned}$$

Με χρήση του διαγραμματικού συλλογισμού υπολογίζουμε:

$$\underbrace{\forall k\ \underbrace{\exists n_0\ \underbrace{\forall n\ \underbrace{(\underbrace{n < n_0}_{\boldsymbol{\Pi}^0_1}\ \vee\ \underbrace{|x_n - x| \leqslant 2^{-k}}_{\boldsymbol{\Pi}^0_1})}_{\boldsymbol{\Pi}^0_1 \text{ κλειστότητα ως προς } \vee}}_{\forall^{\mathbb{N}}\boldsymbol{\Pi}^0_1=\boldsymbol{\Pi}^0_1}}_{\exists^{\mathbb{N}}\boldsymbol{\Pi}^0_1=\boldsymbol{\Sigma}^0_2}}_{\forall^{\mathbb{N}}\boldsymbol{\Sigma}^0_2=\boldsymbol{\Pi}^0_3}.$$

Πιο πάνω έχουμε χρησιμοποιήσει την Πρόταση 3.3.7 (ισοδύναμος ορισμός των $\boldsymbol{\Sigma}^0_n$ με βάση τον τελεστή $\exists^{\mathbb{N}}$), καθώς και την κλειστότητα της κλάσης $\boldsymbol{\Pi}^0_1$ ως προς $\vee$ και συνεχή αντικατάσταση (Θεώρημα 3.3.8).

Δίνουμε κάποιες εξηγήσεις. Αυστηρά θεωρούμε τα σύνολα A, B με

$$\begin{aligned}\big((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, x, k, n_0, n\big) \in A &\iff n < n_0\\ &\iff f\big((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, x, k, n_0, n\big) > 0\\ &\iff \big((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, x, k, n_0, n\big) \in f^{-1}[(0,\infty) \cap \mathbb{N}]\\ \big((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, x, k, n_0, n\big) \in B &\iff |x_n - x| \leqslant 2^{-k}\\ &\iff g\big((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, x, k, n_0, n\big) \geqslant 0\\ &\iff \big((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, x, k, n_0, n\big) \in g^{-1}[[0,\infty)],\end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned}f\big((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, x, k, n_0, n\big) &= n - n_0\\ g\big((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, x, k, n_0, n\big) &= 2^{-k} - |x_n - x|.\end{aligned}$$

Είναι σαφές ότι οι πιο πάνω συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς. Επειδή τα σύνολα $(0,\infty) \cap \mathbb{N}$ και $[0,\infty)$ είναι κλειστά υποσύνολα των $\mathbb{N}$ και $\mathbb{R}$ αντίστοιχα, έχουμε από την κλειστότητα της $\boldsymbol{\Pi}^0_1$ ως προς συνεχή αντικατάσταση ότι τα σύνολα A, B είναι κλειστά.

Επιπλέον, από τα προηγούμενα έχουμε ότι

$$P = \forall^{\mathbb{N}}\ \exists^{\mathbb{N}}\ \forall^{\mathbb{N}}\ A \vee B$$

Επομένως το P είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_3$ σύνολο.

Όπως έχουμε εξηγήσει στην Ενότητα 3.1 (δείτε τα Παραδείγματα 3.2.1 και 3.2.5), δεν θα κάνουμε συνήθως αναφορά στις πιο πάνω συναρτήσεις f, g ούτε στα ενδιάμεσα σύνολα A, B, αλλά θα εφαρμόζουμε κατευθείαν τον πιο πάνω διαγραμματικό συλλογισμό.

Ορισμός 3.3.10 (Θεμελιώδη $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ σύνολα). Ορίζουμε κάποια σύνολα P_n, όπου $n \geqslant 2$, τα οποία είναι θεμελιώδη για τις κλάσεις $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$. Ο ορισμός γίνεται με επαγωγή στο n αλλά είναι χρήσιμο να απομονώσουμε τα πρώτα βήματα:

$$\begin{aligned}
\alpha \in P_2 &\iff \quad\quad\quad \exists i_0\ \forall j \geqslant i_0\ \alpha(j) = 0, \quad \text{όπου } \alpha \in 2^{\mathbb{N}},\\
\beta \in P_3 &\iff \quad\ \exists i_1\ \forall i_0\ \exists j \geqslant i_0\ \beta(i_1, j) = 1, \quad \text{όπου } \beta \in \{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}},\\
\gamma \in P_4 &\iff \exists i_2\ \forall i_1\ \exists i_0\ \forall j \geqslant j_0\ \gamma(i_2, i_1, j) = 0, \quad \text{όπου } \gamma \in \{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}},\\
&\ \ \vdots
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $P_2 \subseteq \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $P_3 \subseteq \{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ και $P_4 \subseteq \{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$. Επιπλέον, για κάθε $\beta \in \{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ έχουμε

$$\beta \in P_3 \iff \exists i_1\ \beta_{i_1} \notin P_2$$

όπου $\beta_{i_1} : \mathbb{N} \to \{0,1\} : \beta_{i_1}(t) = \beta(i_1, t)$. Όμοια για κάθε $\gamma \in \{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ έχουμε

$$\gamma \in P_4 \iff \exists i_2\ \gamma_{i_2} \notin P_3$$

όπου $\gamma_{i_2} : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \{0,1\} : \gamma_{i_2}(t) = \gamma(i_2, t)$.

Αυστηρά τα σύνολα P_n, $n \geqslant 2$, είναι υποσύνολα του $\{0,1\}^{\mathbb{N}^{n-1}}$ και ορίζονται με αναδρομή. Το P_2 είναι όπως πιο πάνω και για κάθε $x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}^n}$ ορίζουμε

$$x \in P_{n+1} \iff \exists i\ x_{[i]} \notin P_n$$

όπου $x_{[i]} : \mathbb{N}^{n-1} \to \{0,1\} : x_{[i]}(t) = x(i,t)$.

Είναι εύκολο να αποδείξει κανείς με επαγωγή στο n ότι κάθε P_n είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ σύνολο. (Θεωρούμε κάθε $\mathbb{N}^k$ με τη διακριτή τοπολογία.) Θα δούμε αργότερα ότι το P_n δεν είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$ υποσύνολο του $\{0,1\}^{\mathbb{N}^{n-1}}$ και μάλιστα ότι ικανοποιεί μια θεμελιώδη ιδιότητα που αφορά την κλάση $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ (Πρόταση 3.7.11).

Ασκήσεις

Άσκηση 3.3.11. Για κάθε $n \geqslant 1$ ισχύει

$$\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_{n+1} = \textstyle\bigwedge_{\mathbb{N}}\ \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n \quad \text{και} \quad \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n = \mathrm{c}\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n.$$

Άσκηση 3.3.12. Για κάθε $n \geqslant 1$ ισχύει

$$\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+1} = \textstyle\bigvee_{\mathbb{N}}\ \left(\bigcup_{k\leqslant n} \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_k\right).$$

Δηλαδή ένα σύνολο $A \subseteq \mathcal{X}$ είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+1}$ αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ υποσυνόλων του $\mathcal{X}$, έτσι ώστε για κάθε i υπάρχει $n_i \leqslant n$ με $B_i \in \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_{n_i}(\mathcal{X})$.

Άσκηση 3.3.13. Κάθε $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+1}$ σύνολο μπορεί να γραφεί ως αριθμήσιμη ένωση μιας *αύξουσας* ακολουθίας $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$ συνόλων.

Άσκηση 3.3.14. Χρησιμοποιήστε την κλειστότητα της κλάσης $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_2$ ως προς $\exists^{\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ για να δείξετε ότι τα σύνολα A_u της Άσκησης 3.2.14 είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_3$.

Άσκηση 3.3.15. Το σύνολο όλων των δένδρων πεπερασμένης διακλάδωσης είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_3$ υποσύνολο του Tr.

Άσκηση 3.3.16 ([**34**]-1C.3). Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Τότε τα ακόλουθα σύνολα είναι $\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_3$ υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}$ αντίστοιχα,

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \text{η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } x \text{ και } f'(x) = y\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } x\}.$$

Άσκηση 3.3.17. Δείξτε την κλειστότητα των κλάσεων $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ $(n \geqslant 1)$ ως προς $\exists^{\mathbb{N}}$ κατευθείαν από την κλειστότητα των τελευταίων ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$ χωρίς την επίκληση του Πορίσματος 3.2.9.

Άσκηση 3.3.18. Δείξτε την κλειστότητα των κλάσεων $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ $(n \geqslant 1)$ ως προς $\exists^{\leqslant}$ και $\forall^{\leqslant}$ κατευθείαν από την κλειστότητα των τελευταίων ως προς $\bigvee_{\leqslant}$ και $\bigwedge_{\leqslant}$ αντίστοιχα, χωρίς την επίκληση της Πρόταση 3.2.10.

Άσκηση 3.3.19. Το Λήμμα 3.3.6 αποτυγχάνει για την κλάση $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_1$ αν αντικαταστήσουμε το σύνολο $\mathbb{N}$ με τον Πολωνικό χώρο $\mathcal{Y} = [0, 1]$.

Μάλιστα για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ υπάρχει οικογένεια $(V_y)_{y \in [0,1]}$ ανοικτών υποσυνόλων του $\mathcal{X}$, έτσι ώστε το σύνολο $V \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ με

$$(x, y) \in V \iff x \in V_y$$

δεν είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.

Άσκηση 3.3.20. Θεωρούμε Πολωνικούς χώρους $\mathcal{X}_i$, $i \in \mathbb{N}$ και έναν φυσικό αριθμό $n \geqslant 1$. Τότε για κάθε ακολουθία συνόλων $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ με $A_i \in \utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n(\mathcal{X}_i)$, όπου $i \in \mathbb{N}$, το σύνολο $\prod_{i \in \mathbb{N}} A_i$ είναι $\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_{n+1}$ υποσύνολο του χώρου γινόμενο $\mathcal{X} = \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{X}_i$.

Επίσης για κάθε $m \in \mathbb{N}$ το σύνολο $A_0 \times \cdots \times A_m$ είναι $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ υποσύνολο του $\mathcal{X}_0 \times \cdots \times \mathcal{X}_m$.

Διατυπώστε τα ανάλογα συμπεράσματα για ακολουθία συνόλων $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ με $A_i \in \utilde{\mathbf{\Pi}}^0_n(\mathcal{X}_i)$.

Άσκηση 3.3.21. Για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$, κάθε μη κενό $G \subseteq \mathcal{X}$ που είναι Πολωνικός υπόχωρος με τη σχετική τοπολογία και κάθε $A \subseteq G$ έχουμε ότι

$$A \in \utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n(G) \iff \text{υπάρχει } B \in \utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n(\mathcal{X}) \text{ με } A = G \cap B$$

και

$$A \in \utilde{\mathbf{\Pi}}^0_n(G) \iff \text{υπάρχει } B \in \utilde{\mathbf{\Pi}}^0_n(\mathcal{X}) \text{ με } A = G \cap B$$

όπου $n \geqslant 1$.

Ποιο είναι το αντίστοιχο συμπέρασμα για την κλάση $\utilde{\mathbf{\Delta}}^0_n$;

3.4. Οι προβολικές κλάσεις συνόλων

Ορισμός 3.4.1 (Ορισμός των προβολικών κλάσεων [**19**, **18**, **16**, **38**, **34**]). Ορίζουμε με αναδρομή στο $n \geqslant 1$ τις εξής κλάσεις συνόλων σε Πολωνικούς χώρους:

$$\begin{aligned} \utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_1 &= \exists^{\mathcal{N}} \utilde{\mathbf{\Pi}}^0_1 \\ &= \text{οι προβολές κλειστών } F \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N} \text{ υπεράνω του } \mathcal{X}, \\ &\quad\ \text{όπου } \mathcal{X} \text{ Πολωνικός χώρος} \\ \utilde{\mathbf{\Pi}}^1_1 &= c\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_1 = \text{τα συμπληρώματα των } \utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_1 \text{ συνόλων} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^1_{n+1} &= \exists^{\mathcal{N}}\utilde{\boldsymbol{\Pi}}^1_n \\
&= \text{οι προβολές } \utilde{\boldsymbol{\Pi}}^1_n \text{ συνόλων } F \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N} \text{ υπεράνω του } \mathcal{X}, \\
&\quad\ \text{όπου } \mathcal{X} \text{ Πολωνικός χώρος} \\
\utilde{\boldsymbol{\Pi}}^1_{n+1} &= \mathrm{c}\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^1_{n+1} \\
&= \text{τα συμπληρώματα των } \utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^1_{n+1} \text{ συνόλων.}
\end{aligned}$$

Με άλλα λόγια, ένα $P \subseteq \mathcal{X}$ είναι $\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^1_1$ (ή $\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^1_{n+1}$) σύνολο αν και μόνο αν υπάρχει ένα $\utilde{\boldsymbol{\Pi}}^0_1$ (ή $\utilde{\boldsymbol{\Pi}}^1_n$ αντίστοιχα) σύνολο $Q \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ έτσι ώστε για κάθε $x \in \mathcal{X}$,

$$x \in P \iff \exists\alpha\ (x,\alpha) \in Q.$$

Παίρνοντας τα συμπληρώματα έχουμε ότι ένα $P_* \subseteq \mathcal{X}$ είναι $\utilde{\boldsymbol{\Pi}}^1_1$ (ή $\utilde{\boldsymbol{\Pi}}^1_{n+1}$) σύνολο αν και μόνο αν υπάρχει ένα $\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^0_1$ (ή $\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^1_n$ αντίστοιχα) σύνολο $Q_* \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$, έτσι ώστε για κάθε $x \in \mathcal{X}$,

$$x \in P_* \iff \forall\alpha\ (x,\alpha) \in Q_*.$$

Είναι αρκετά βολικό να θέσουμε

$$\utilde{\boldsymbol{\Pi}}^1_0 = \utilde{\boldsymbol{\Pi}}^0_1 \quad \text{και} \quad \utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^1_0 = \utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^0_1$$

έτσι που

$$\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^1_n = \exists^{\mathcal{N}}\utilde{\boldsymbol{\Pi}}^1_{n-1} \quad \text{και} \quad \utilde{\boldsymbol{\Pi}}^1_n = \forall^{\mathcal{N}}\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^1_{n-1}$$

για κάθε $n \geqslant 1$.

Τέλος θέτουμε

$$\utilde{\boldsymbol{\Delta}}^1_n = \utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^1_n \cap \utilde{\boldsymbol{\Pi}}^1_n.$$

Είναι άμεσο ότι ένα $P \subseteq \mathcal{X}$ ανήκει στη $\utilde{\boldsymbol{\Delta}}^1_n$ αν και μόνο αν τα σύνολα P και $\mathcal{X} \setminus P$ ανήκουν στη $\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^1_n$.

Οι κλάσεις $\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^1_n$ λέγονται **προβολικές** ή αλλιώς **κλάσεις του Lusin**, ενώ οι $\utilde{\boldsymbol{\Pi}}^0_n$ και $\utilde{\boldsymbol{\Pi}}^0_n$ είναι οι **δυϊκές** (dual) και **αμφίσημες** (ambiguous) αντίστοιχα προβολικές κλάσεις.

Η συλλογή των προηγούμενων κλάσεων ονομάζεται **ιεραρχία των προβολικών συνόλων**. Με τον όρο **ιεραρχία των προβολικών υποσυνόλων του** $\mathcal{X}$, όπου $\mathcal{X}$ είναι δοσμένος Πολωνικός χώρος, εννοούμε τη συλλογή όλων των οικογενειών υποσυνόλων του $\mathcal{X}$ που προκύπτουν από τις προηγούμενες κλάσεις.

Τα σύνολα της κλάσης $\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^1_1$ ονομάζονται **αναλυτικά** (analytic) και αυτά της κλάσης $\utilde{\boldsymbol{\Pi}}^1_1$ **συναλυτικά** (coanalytic). Τα σύνολα της κλάσης $\utilde{\boldsymbol{\Delta}}^1_1$ ονομάζονται **αμφι-αναλυτικά** (bi-analytic).

Λήμμα 3.4.2. *Οι κλάσεις $\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^1_n$, $\utilde{\boldsymbol{\Pi}}^1_n$ και $\utilde{\boldsymbol{\Delta}}^1_n$ είναι κλειστές ως προς συνεχή αντικατάσταση.*

Απόδειξη. Όπως και στην απόδειξη του Λήμματος 3.3.4, παρατηρούμε ότι η κλειστότητα ως προς συνεχή αντικατάσταση της $\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^1_n$ είναι ισοδύναμη με την κλειστότητα της $\utilde{\boldsymbol{\Pi}}^1_n$ ως προς συνεχή αντικατάσταση. (Γενικότερα μια κλάση Γ είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση αν και μόνο αν η $\mathrm{c}\Gamma$ είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση.)

Επιπλέον, η κλειστότητα της $\utilde{\boldsymbol{\Delta}}^1_n$ ως προς συνεχή αντικατάσταση είναι άμεση από την ίδια ιδιότητα των κλάσεων $\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^1_n$ και $\utilde{\boldsymbol{\Pi}}^1_n$.

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι αν μια κλάση Γ είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση τότε και η $\exists^{\mathcal{N}}\Gamma$ έχει την ίδια ιδιότητα. Θεωρούμε Πολωνικούς χώρους $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, μια συνεχή συνάρτηση $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ και ένα $P \subseteq \mathcal{Y}$ που ανήκει στη $\exists^{\mathcal{N}}\Gamma$, όπου η Γ είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση. Πρέπει να δείξουμε ότι το σύνολο $f^{-1}[P]$ ανήκει στη $\exists^{\mathcal{N}}\Gamma$.

Υπάρχει $Q \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ που ανήκει στη Γ, έτσι ώστε $P = \exists^{\mathcal{N}} Q$. Τότε για κάθε $x \in \mathcal{X}$,

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}[P] &\iff f(x) \in P \\ &\iff \exists\alpha\ (f(x), \alpha) \in Q \\ &\iff \exists\alpha\ h(x,\alpha) \in Q \\ &\iff \exists\alpha (x,\alpha) \in h^{-1}[Q], \end{aligned}$$

όπου $h(x,\alpha) = (f(x),\alpha)$. Η h είναι συνεχής συνάρτηση και από την υπόθεσή μας για τη Γ το σύνολο $h^{-1}[Q]$ ανήκει στη Γ. Από τις πιο πάνω ισοδυναμίες προκύπτει $f^{-1}[P] = \exists^{\mathcal{N}} h^{-1}[Q]$ και συνεπώς το $f^{-1}[P]$ ανήκει στη Γ.

Τέλος δείχνουμε με επαγωγή στο $n \geqslant 1$ ότι η κλάση $\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^1_n$ είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση. Για $n = 1$ έχουμε ότι η $\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^1_1 = \exists^{\mathcal{N}} \utilde{\boldsymbol{\Pi}}^0_1$ είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση από τα πιο πάνω και από το ότι η κλάση $\utilde{\boldsymbol{\Pi}}^0_1$ έχει αυτή την ιδιότητα.

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \geqslant 1$ η κλάση $\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^0_n$ είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση. Επομένως, και η $\utilde{\boldsymbol{\Pi}}^1_n$ έχει την ίδια ιδιότητα και από τα πιο πάνω το ίδιο ισχύει και για την $\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^1_{n+1} = \exists^{\mathcal{N}} \utilde{\boldsymbol{\Pi}}^1_n$. ▫

Το επόμενο βήμα είναι να δείξουμε ότι οι προβολικές κλάσεις ικανοποιούν τις ανάλογες συμπεριλήψεις με τις κλάσεις των Borel συνόλων πεπερασμένης τάξης. Ξεκινάμε με ένα βοηθητικό αποτέλεσμα.

Λήμμα 3.4.3. *Για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και κάθε κλειστό $F \subseteq \mathcal{X}$ έχουμε $F \in \utilde{\boldsymbol{\Delta}}^1_1(\mathcal{X})$.*

(Το προηγούμενο επεκτείνεται πέραν των κλειστών συνόλων, βλ. το Πόρισμα 3.4.7.)

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{X}$ Πολωνικός χώρος και $F \subseteq \mathcal{X}$ κλειστό. Θεωρούμε το $Q = F \times \mathcal{N}$ και τότε για κάθε $x \in \mathcal{X}$,

$$x \in F \iff \exists\alpha\ (x,\alpha) \in Q.$$

Το Q είναι προφανώς κλειστό σύνολο, επομένως το F είναι $\exists^{\mathcal{N}} \utilde{\boldsymbol{\Pi}}^0_1 = \utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^1_1$ σύνολο.

Το F, ως κλειστό, είναι επίσης G_δ σύνολο, επομένως υπάρχει ακολουθία $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από ανοικτά υποσύνολα του $\mathcal{X}$ με $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$. Θεωρούμε το σύνολο

$$V = \{(x,\alpha) \in \mathcal{X} \times \mathcal{N} \mid x \in V_{\alpha(0)}\}.$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι το V είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathcal{N}$. Επιπλέον, για κάθε $x \in \mathcal{X}$,

$$\begin{aligned} x \in F &\iff \forall n\ x \in V_n \\ &\iff \forall\alpha\ x \in V_{\alpha(0)} \\ &\iff \forall\alpha\ (x,\alpha) \in V. \end{aligned}$$

Συνεπώς, το F είναι $\forall^{\mathcal{N}} \utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^0_1 = \utilde{\boldsymbol{\Pi}}^1_1$ σύνολο. ▫

Πρόταση 3.4.4. *Για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και κάθε $n \geqslant 1$ έχουμε*

$$\utilde{\boldsymbol{\Delta}}^1_n(\mathcal{X}) \subseteq \utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^1_n(\mathcal{X}) \subseteq \utilde{\boldsymbol{\Delta}}^1_{n+1}(\mathcal{X})$$

και επομένως ισχύει επίσης

$$\utilde{\boldsymbol{\Delta}}^1_n(\mathcal{X}) \subseteq \utilde{\boldsymbol{\Pi}}^1_n(\mathcal{X}) \subseteq \utilde{\boldsymbol{\Delta}}^1_{n+1}(\mathcal{X}).$$

Δείτε το Διάγραμμα 2.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & \mathbf{\Sigma}^1_1(\mathcal{X}) & & & \mathbf{\Sigma}^1_2(\mathcal{X}) & & & & \mathbf{\Sigma}^1_n(\mathcal{X}) & & \\
\rotatebox{45}{$\subseteq$} & & \rotatebox{-45}{$\supseteq$} & \rotatebox{45}{$\subseteq$} & & \rotatebox{-45}{$\supseteq$} & & \rotatebox{-45}{$\supseteq$} & & \rotatebox{45}{$\subseteq$} & \\
\mathbf{\Delta}^1_1(\mathcal{X}) & & & \mathbf{\Delta}^1_2(\mathcal{X}) & & & \cdots & \mathbf{\Delta}^1_n(\mathcal{X}) & & & \cdots \\
\rotatebox{-45}{$\subseteq$} & & \rotatebox{45}{$\supseteq$} & \rotatebox{-45}{$\subseteq$} & & \rotatebox{45}{$\supseteq$} & & \rotatebox{45}{$\supseteq$} & & \rotatebox{-45}{$\subseteq$} & \\
 & \mathbf{\Pi}^1_1(\mathcal{X}) & & & \mathbf{\Pi}^1_2(\mathcal{X}) & & & & \mathbf{\Pi}^1_n(\mathcal{X}) & &
\end{array}
$$

Διαγραμμα 2. Η ιεραρχία των προβολικών υποσυνόλων του $\mathcal{X}$.

Απόδειξη. Προφανώς οι εγκλεισμοί στη δεύτερη σειρά προκύπτουν από αυτούς της πρώτης σειράς παίρνοντας συμπληρώματα. Επιπλέον, ο εγκλεισμός $\mathbf{\Delta}^1_n(\mathcal{X}) \subseteq \mathbf{\Sigma}^1_n(\mathcal{X})$ είναι προφανής – όπως φυσικά και ο $\mathbf{\Delta}^1_n(\mathcal{X}) \subseteq \mathbf{\Pi}^1_n(\mathcal{X})$. Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι $\mathbf{\Sigma}^1_n(\mathcal{X}) \subseteq \mathbf{\Delta}^1_{n+1}(\mathcal{X})$.

Αρχικά δείχνουμε ότι $\mathbf{\Sigma}^1_n(\mathcal{X}) \subseteq \mathbf{\Pi}^1_{n+1}(\mathcal{X})$.

Θεωρούμε $P \subseteq \mathcal{X}$ που ανήκει στην $\mathbf{\Sigma}^1_n$ και ορίζουμε το $R \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ ως εξής,

$$(x, \alpha) \in R \iff x \notin P.$$

Με άλλα λόγια $R = (\mathcal{X} \setminus P) \times \mathcal{N}$.

Το συμπλήρωμα $\mathcal{X} \setminus P$ είναι $\mathbf{\Pi}^1_n$ υποσύνολο του $\mathcal{X}$ και από την κλειστότητα της $\mathbf{\Pi}^1_n$ ως προς συνεχή αντικατάσταση (Λήμμα 3.4.2) έχουμε ότι το R είναι $\mathbf{\Pi}^1_n$ υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathcal{N}$.

Επιπλέον, είναι σαφές ότι

$$x \in \mathcal{X} \setminus P \iff \exists \alpha \ (x, \alpha) \in R$$

δηλαδή $P = \exists^{\mathcal{N}} R$. Αφού το R είναι $\mathbf{\Pi}^1_n$ υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathcal{N}$, έχουμε ότι το $P \exists^{\mathcal{N}} R$ είναι $\mathbf{\Sigma}^1_n$ υποσύνολο του $\mathcal{X}$.

Έπειτα δείχνουμε με επαγωγή στο $n \geqslant 1$ ότι *για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$* ισχύει $\mathbf{\Sigma}^1_n(\mathcal{X}) \subseteq \mathbf{\Sigma}^1_{n+1}(\mathcal{X})$. Με βάση αυτό και τις προηγούμενες συμπεριλήψεις, έχουμε το ζητούμενο.

Για $n = 1$, θεωρούμε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και $P \subseteq \mathcal{X}$ που ανήκει στη $\mathbf{\Sigma}^1_1$. Πρέπει να δείξουμε ότι ανήκει στην κλάση $\mathbf{\Sigma}^1_2$. Υπάρχει κλειστό σύνολο $F \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$, έτσι ώστε $P = \exists^{\mathcal{N}} F$.

Δείξαμε ότι το F ως κλειστό είναι $\mathbf{\Pi}^1_1$ υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathcal{N}$ (Πρόταση 3.4.3). Επομένως, το P είναι $\exists^{\mathcal{N}} \mathbf{\Pi}^1_1 = \mathbf{\Sigma}^1_2$ υποσύνολο του $\mathcal{X}$.

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \geqslant 1$ και κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ ισχύει

$$\mathbf{\Sigma}^1_n(\mathcal{X}) \subseteq \mathbf{\Sigma}^1_{n+1}(\mathcal{X}), \quad \text{ισοδύναμα} \quad \mathbf{\Pi}^1_n(\mathcal{X}) \subseteq \mathbf{\Pi}^1_{n+1}(\mathcal{X}).$$

Έστω $\mathcal{X}$ Πολωνικός χώρος και ένα $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$ σύνολο $P \subseteq \mathcal{X}$. Δείχνουμε ότι το P είναι $\mathbf{\Sigma}^1_{n+2}$ υποσύνολο του $\mathcal{X}$. Από τον ορισμό υπάρχει ένα $\mathbf{\Pi}^1_n$ σύνολο $Q \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ με $P = \exists^{\mathcal{N}} Q$. Από την Επαγωγική Υπόθεση εφαρμοσμένη στον χώρο $\mathcal{X} \times \mathcal{N}$, το Q είναι $\mathbf{\Pi}^1_{n+1}$ σύνολο. Συνεπώς, το P είναι $\exists^{\mathcal{N}} \mathbf{\Pi}^1_{n+1} = \mathbf{\Sigma}^1_{n+2}$ υποσύνολο του $\mathcal{X}$. □

Όπως οι κλάσεις Borel συνόλων πεπερασμένης τάξης, έτσι και οι προβολικές κλάσεις ικανοποιούν την ιδιότητα (3.3) της Πρότασης 3.2.8. Στο επόμενο λήμμα αποδεικνύουμε αυτή την ιδιότητα μαζί με τον αντίστροφο ισχυρισμό (αντίστοιχο της Παρατήρησης 3.3.5).

Λήμμα 3.4.5. *Θεωρούμε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$, έναν φυσικό $n \geqslant 1$ και μια ακολουθία $(P_s)_{s \in \mathbb{N}}$ από υποσύνολα $\mathcal{X}$ που ανήκουν στην $\mathbf{\Sigma}^1_n$. Τότε το σύνολο*

$$P = \{(x, s) \in \mathcal{X} \times \mathbb{N} \mid x \in P_s\}$$

ανήκει στην $\mathbf{\Sigma}^1_n$.

Αντίστροφα, για κάθε $R \in \utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n(\mathcal{X} \times \mathbb{N})$ και κάθε $s \in \mathbb{N}$ το σύνολο

$$R_s = \{x \in \mathcal{X} \mid (x, s) \in R\}$$

ανήκει στην $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n$.

Επιπλέον, ισχύουν τα ίδια αν αντικαταστήσουμε την $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ με την $\utilde{\mathbf{\Pi}}^1_n$.

Απόδειξη. Δείχνουμε το ζητούμενο με επαγωγή στο $n \geqslant 1$ και *για κάθε* Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$. Για $n = 1$ θεωρούμε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$, μια ακολουθία $(P_s)_{s\in\mathbb{N}}$ από $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_1$ υποσύνολα του $\mathcal{X}$ και μια ακολουθία $(Q_s)_{s\in\mathbb{N}}$ κλειστών υποσυνόλων του $\mathcal{X} \times \mathcal{N}$ με $P_s = \exists^{\mathcal{N}} Q_s$ για κάθε $s \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε επίσης το σύνολο P της εκφώνησης.

Από το Λήμμα 3.3.6 το

$$Q = \{(x, \alpha, s) \in \mathcal{X} \times \mathbb{N} \mid (x, \alpha) \in Q_s\}$$

είναι κλειστό σύνολο. Επιπλέον για κάθε x, s,

$$\begin{aligned}(x, s) \in P &\iff x \in P_s \\ &\iff \exists\alpha\ (x, \alpha) \in Q_s \\ &\iff \exists\alpha \in (x, \alpha, s) \in Q.\end{aligned}$$

Άρα το P είναι $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_1$ σύνολο.

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \geqslant 1$ έχουμε ότι για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και κάθε ακολουθία $(P_s)_{s\in\mathbb{N}}$ από $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ υποσύνολα του $\mathcal{X}$, το σύνολο P της εκφώνησης ανήκει στην κλάση $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n$. Δείχνουμε το ίδιο για το $n + 1$.

Έστω $\mathcal{X}$ Πολωνικός χώρος και $(P_s)_{s\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία από $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_{n+1}$ υποσύνολα του $\mathcal{X}$. Παίρνουμε μια ακολουθία $(Q_s)_{s\in\mathbb{N}}$ από $\utilde{\mathbf{\Pi}}^1_n$ υποσύνολα $\mathcal{X} \times \mathcal{N}$ με $P_s = \exists^{\mathcal{N}} Q_s$ για κάθε $s \in \mathbb{N}$.

Από την Επαγωγική Υπόθεση εφαρμοσμένη στον Πολωνικό χώρο $\mathcal{X} \times \mathcal{N}$ και στην ακολουθία $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ συνόλων $\big((\mathcal{X} \times \mathcal{N}) \setminus Q_s\big)_{s\in\mathbb{N}}$ το σύνολο $Q \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N} \times \mathbb{N}$ με

$$(x, \alpha, s) \in Q \iff (x, \alpha) \in Q_s$$

είναι $\utilde{\mathbf{\Pi}}^1_n$. Όπως πιο πάνω, για κάθε x, s έχουμε

$$\begin{aligned}(x, s) \in P &\iff x \in P_s \\ &\iff \exists\alpha\ (x, \alpha) \in Q_s \\ &\iff \exists\alpha \in (x, \alpha, s) \in Q.\end{aligned}$$

Άρα το P είναι $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_{n+1}$ σύνολο.

Ο δεύτερος ισχυρισμός για το αντίστροφο (σύνολα R και R_s) αποδεικνύεται όμοια με την Παρατήρηση 3.3.5.

Τέλος, οι ισχυρισμοί για την κλάση $\utilde{\mathbf{\Pi}}^1_n$ προκύπτουν από τους αντίστοιχους για την κλάση $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ παίρνοντας τα συμπληρώματα. ▫

Θεώρημα 3.4.6 (Οι Θεμελιώδεις Ιδιότητες Κλειστότητας των κλάσεων του Lusin, [**39**], [**34**]). *Οι κλάσεις $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n$, $\utilde{\mathbf{\Pi}}^1_n$ και $\utilde{\mathbf{\Delta}}^1_n$, $n \geqslant 1$, είναι κλειστές ως προς συνεχή αντικατάσταση και ως προς τους τελεστές* $\vee$, &, $\exists^{\leqslant}, \forall^{\leqslant}$, $\bigvee_{\leqslant}$, $\bigwedge_{\leqslant}$, $\exists^{\mathbb{N}}$, $\forall^{\mathbb{N}}$, $\bigvee_{\mathbb{N}}$, $\bigwedge_{\mathbb{N}}$.

Οι κλάσεις $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ είναι επιπλέον κλειστές ως προς τον τελεστή $\exists^{\mathcal{Y}}$ και οι $\utilde{\mathbf{\Pi}}^1_n$ ως προς τον $\forall^{\mathcal{Y}}$ για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{Y}$. Οι κλάσεις $\utilde{\mathbf{\Delta}}^1_n$ είναι επιπλέον κλειστές ως προς τον τελεστή του συμπληρώματος c.

Απόδειξη. Η κλειστότητα ως προς συνεχή αντικατάσταση έχει δειχθεί στο Λήμμα 3.4.2.

Ως συνήθως, οι ιδιότητες κλειστότητας των κλάσεων $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ δίνουν τις αντίστοιχες για τις κλάσεις $\utilde{\mathbf{\Pi}}^1_n$ και κατά συνέπεια και για τις $\utilde{\mathbf{\Delta}}^1_n$. Επιπλέον, είναι σαφές ότι οι τελευταίες είναι κλειστές ως προς το συμπλήρωμα. Επομένως δείχνουμε τις ζητούμενες ιδιότητες για τις $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$.

Αν δείξουμε ότι οι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ είναι κλειστές ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$, τότε θα έχουμε και κλειστότητα ως προς πεπερασμένη ένωση (υποσυνόλων του ίδιου χώρου), γιατί το κενό σύνολο ανήκει σε όλες αυτές τις κλάσεις. Δηλαδή θα έχουμε και την κλειστότητα ως προς $\bigvee_{\leqslant}$ και $\vee$. Επιπλέον, από την Άσκηση 3.4.12 (που είναι εφαρμογή του Λήμματος 3.4.5) η κλειστότητα ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$ και $\bigvee_{\leqslant}$ είναι ισοδύναμη με την κλειστότητα ως προς $\exists^{\mathbb{N}}$ και $\exists^{\leqslant}$ αντίστοιχα.

Με όμοια συλλογιστική έχουμε επίσης ότι η κλειστότητα των $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ ως προς $\bigwedge_{\mathbb{N}}$ συνεπάγεται και την κλειστότητα ως προς $\bigwedge_{\leqslant}$ και & χρησιμοποιώντας ότι κάθε Πολωνικός χώρος $\mathcal{X}$ ανήκει σε όλες αυτές τις κλάσεις. Επιπλέον, πάλι από την Άσκηση 3.4.12 η κλειστότητα ως προς $\bigwedge_{\mathbb{N}}$ και $\bigwedge_{\leqslant}$ είναι ισοδύναμη με την κλειστότητα ως προς $\forall^{\mathbb{N}}$ και $\forall^{\leqslant}$ αντίστοιχα.

Επομένως, αρκεί να δείξουμε την κλειστότητα των κλάσεων $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ ως προς $\exists^{\mathbb{N}}$, $\forall^{\mathbb{N}}$ και $\exists^{\mathcal{Y}}$, όπου $\mathcal{Y}$ είναι τυχαίος Πολωνικός χώρος.

Υπενθυμίζουμε τη συνάρτηση κωδικοποίησης $\langle\,\cdot\,\rangle$ από το (2.7) και τους συμβολισμούς

$$\begin{aligned}\alpha^* &= (\alpha(1),\dots,\alpha(n),\dots) \in \mathcal{N}\\ (\alpha)_i &= (\alpha(\langle i,0\rangle),\alpha(\langle i,1\rangle),\dots,\alpha(\langle i,t\rangle),\dots) \in \mathcal{N}.\end{aligned}$$

από τα (2.9), και (2.12) αντίστοιχα, όπου $i \in \mathbb{N}$ και $\alpha \in \mathcal{N}$. Όπως έχουμε πει, οι συναρτήσεις $(\alpha \mapsto \alpha^*)$ και $((i,\alpha) \mapsto (\alpha)_i)$ είναι συνεχείς (Άσκηση 2.3.18).

Παρατηρούμε ότι για κάθε ακολουθία $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ από στοιχεία του $\mathcal{N}$ μπορούμε να βρούμε ένα $\alpha \in \mathcal{N}$ με την ιδιότητα $(\alpha)_i = \alpha_i$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Μια τέτοια επιλογή α είναι η

$$\alpha(\langle i,t\rangle) = \alpha_i(t) \qquad \text{και} \qquad \alpha(k) = 0, \quad \text{αν } k \neq \langle i,t\rangle \text{ για κάθε } i,t.$$

Δείχνουμε την κλειστότητα των $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ ως προς $\exists^{\mathcal{Y}}$ όπου $\mathcal{Y}$ Πολωνικός χώρος. Θεωρούμε $n \geqslant 1$, ένα $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ σύνολο $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, και ένα $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_{n-1}$ σύνολο $Q \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{N}$. Πρέπει να δείξουμε ότι το $\exists^{\mathcal{Y}}P$ ανήκει στην κλάση $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$. Στην περίπτωση όπου $\mathcal{Y} = \mathcal{N}$ έχουμε για κάθε $x \in \mathcal{X}$,

$$\begin{aligned}x \in \exists^{\mathcal{N}}P &\iff \exists\alpha\ (x,\alpha) \in P\\ &\iff \exists\alpha\ \exists\beta\ (x,\alpha,\beta) \in Q\\ &\iff \exists\gamma\ (x,(\gamma)_0,(\gamma)_1) \in Q.\end{aligned}$$

Επομένως, το σύνολο $\exists^{\mathcal{N}}P$ ανήκει στην κλάση $\exists^{\mathcal{N}}\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_{n-1} = \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$, χρησιμοποιώντας την κλειστότητα της $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_{n-1}$ ως προς συνεχή αντικατάσταση. Αυτό δείχνει την κλειστότητα της $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ ως προς $\exists^{\mathcal{N}}$. Στη γενική περίπτωση ενός Πολωνικού χώρου $\mathcal{Y}$ θεωρούμε έναν συνεχή επιμορφισμό $\pi : \mathcal{N} \twoheadrightarrow \mathcal{Y}$ (Θεώρημα 2.3.7) και για κάθε $x \in \mathcal{X}$ έχουμε

$$\begin{aligned}x \in \exists^{\mathcal{Y}}P &\iff \exists y\ (x,y) \in P\\ &\iff \exists\alpha\ (x,\pi(\alpha)) \in P,\end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ισοδυναμία χρησιμοποιήσαμε ότι η π είναι επί. Από την κλειστότητα της κλάσης $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ ως προς συνεχή αντικατάσταση προκύπτει ότι το σύνολο $\exists^{\mathcal{Y}}P$ ανήκει στην $\exists^{\mathcal{N}}\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$. Όπως είδαμε αμέσως πιο πάνω η $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$, είναι κλειστή ως προς $\exists^{\mathcal{N}}$, άρα το $\exists^{\mathcal{Y}}P$ ανήκει στην $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$.

Η κλειστότητα της $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$, $n \geqslant 1$ ως προς $\exists^{\mathbb{N}}$ προκύπτει από την κλειστότητα ως προς $\exists^{\mathcal{Y}}$ για $\mathcal{Y} = \mathbb{N}$ – μπορεί όμως να αποδειχτεί και κατευθείαν ως εξής:

Θεωρούμε $n \geqslant 1$, ένα $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ σύνολο $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ και ένα $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_{n-1}$ σύνολο $Q \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N} \times \mathcal{N}$, έτσι ώστε $P = \exists^{\mathcal{N}} Q$. Τότε για κάθε $x \in \mathcal{X}$ έχουμε

$$\begin{aligned} x \in \exists^{\mathbb{N}} P &\iff \exists i \ (x, i) \in P \\ &\iff \exists i \ \exists \alpha \ (x, i, \alpha) \in Q \\ &\iff \exists \beta \ (x, \beta(0), \beta^*) \in Q, \end{aligned}$$

όπου πιο πάνω παίρνουμε $\beta = (i, \alpha(0), \alpha(1), \dots)$. Αφού η κλάση $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_{n-1}$ είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση προκύπτει από την τελευταία ισοδυναμία ότι το σύνολο $\exists^{\mathbb{N}} P$ ανήκει στην κλάση $\exists^{\mathcal{N}} \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_{n-1} = \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$.

Για την κλειστότητα της $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$, $n \geqslant 1$, ως προς $\forall^{\mathbb{N}}$, θεωρούμε όπως πιο πάνω ένα $P \in \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n(\mathcal{X} \times \mathbb{N})$ και $Q \in \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_{n-1}(\mathcal{X} \times \times \mathbb{N} \times \mathcal{N})$. Τότε για κάθε $x \in \mathcal{X}$ έχουμε

$$\begin{aligned} x \in \forall^{\mathbb{N}} P &\iff \forall i \ (x, i) \in P \\ &\iff \forall i \ \exists \alpha \ (x, i, \alpha) \in Q \\ &\iff \exists \alpha \forall i \ (x, i, (\alpha)_i) \in Q. \end{aligned}$$

Για να δούμε την τελευταία ισοδυναμία παρατηρούμε ότι αν για κάθε i υπάρχει κάποιο $\alpha \equiv \alpha_i$ με $(x, i, \alpha_i) \in Q$, τότε μπορούμε να επιλέξουμε ένα $\alpha \in \mathcal{N}$ με $(\alpha)_i = \alpha_i$ για κάθε i, όπως έχουμε εξηγήσει πιο πάνω. Τότε θα έχουμε $(x, i, (\alpha)_i) \in Q$ για κάθε i.

Από την τελευταία ισοδυναμία προκύπτει ότι το σύνολο $\forall^{\mathbb{N}} P$ ανήκει στην κλάση $\exists^{\mathcal{N}} \forall^{\mathbb{N}} \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_{n-1}$. Όπως έχουμε δείξει πιο πάνω, η κλάση $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_{n-1}$ είναι κλειστή ως προς $\exists^{\mathbb{N}}$. (Για $n = 1$ το ζητούμενο προκύπτει από τις ιδιότητες κλειστότητας της κλάσης $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_0 = \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_1$, δείτε το Θεώρημα 3.3.8.) Παίρνοντας το συμπλήρωμα η $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_{n-1}$ είναι κλειστή ως προς $\forall^{\mathbb{N}}$. Επομένως, το σύνολο $\forall^{\mathbb{N}} P$ ανήκει στην κλάση $\exists^{\mathcal{N}} \forall^{\mathbb{N}} \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_{n-1} = \exists^{\mathcal{N}} \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_{n-1} = \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$. □

Τα ακόλουθα πορίσματα είναι άμεσα από τις ιδιότητες κλειστότητας των προβολικών κλάσεων. Το πρώτο από αυτά δίνει τη σχέση συμπερίληψης των κλάσεων Borel συνόλων πεπερασμένης τάξης και των προβολικών κλάσεων.

Πόρισμα 3.4.7. *Για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ έχουμε*

$$\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n(\mathcal{X}) \subseteq \underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^1_1(\mathcal{X}) \quad \textit{ισοδύναμα} \quad \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n(\mathcal{X}) \subseteq \underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^1_1(\mathcal{X}).$$

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή στο $n \geqslant 1$. Η περίπτωση $n = 1$ είναι το Λήμμα 3.4.3. Αφήνουμε το επαγωγικό βήμα για άσκηση (Άσκηση 3.4.10) . □

Πόρισμα 3.4.8 (Ισοδύναμος ορισμός των κλάσεων $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$). *Για κάθε $n \geqslant 1$ η κλάση $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ αποτελείται ακριβώς από τις συνεχείς εικόνες $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_{n-1}$ συνόλων.*

Απόδειξη. Κάθε $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ σύνολο είναι προβολή (και επομένως είναι συνεχής εικόνα) ενός $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_{n-1}$ συνόλου, επομένως πρέπει να δείξουμε το αντίστροφο. Έστω $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ συνεχής και $Q \subseteq \mathcal{X}$ το οποίο είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_{n-1}$. Πρέπει να δείξουμε ότι η εικόνα $f[Q]$ είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ σύνολο. Πράγματι, για κάθε $y \in \mathcal{Y}$ έχουμε

$$\begin{aligned} y \in f[Q] &\iff \exists x \ (x \in Q \ \& \ f(x) = y) \\ &\iff \exists x \ (x \in Q \ \& \ (x, y) \in Graph(f)) \end{aligned}$$

Το γράφημα της f είναι κλειστό σύνολο και επομένως από την Πρόταση 3.4.4 (και την απόδειξή της) είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_{n-1}$ σύνολο. Από το Θεώρημα 3.4.6 (Ιδιότητες Κλειστότητας των κλάσεων του Lusin) η κλάση $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_{n-1}$ είναι κλειστή ως προς &. Στην περίπτωση όπου $n = 1$ αυτό προκύπτει από τις ιδιότητες κλειστότητας των κλειστών συνόλων.

Με βάση την τελευταία από τις πιο πάνω ισοδυναμίες καταλήγουμε ότι $f[Q] = \exists^{\mathcal{X}} R$ όπου το R είναι ένα $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_{n-1}$ υποσύνολο του $\mathcal{Y} \times \mathcal{X}$. Συνεπώς, το $f[Q]$ είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ υποσύνολο του $\mathcal{Y}$. ▫

Πόρισμα 3.4.9. *Η συνεχής εικόνα $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ συνόλου είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ σύνολο.*

Απόδειξη. Αφήνεται στην Άσκηση 3.4.11. ▫

Ασκήσεις

Άσκηση 3.4.10. Συμπληρώστε την απόδειξη του Πορίσματος 3.4.7: για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και κάθε $n \geqslant 1$ η οικογένεια $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n(\mathcal{X})$ περιέχεται στην $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^1_1(\mathcal{X})$.

Άσκηση 3.4.11. Κάθε κλάση $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ είναι κλειστή ως προς συνεχείς εικόνες.

Άσκηση 3.4.12. Αν η Γ είναι οποιαδήποτε από τις κλάσεις $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ και $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n$, $n \geqslant 1$, τότε ο ισχυρισμός πως η Γ είναι κλειστή ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$ και $\bigvee_{\leqslant}$ είναι ισοδύναμος με τον ισχυρισμό ότι η Γ είναι κλειστή ως προς $\exists^{\mathbb{N}}$ και $\exists^{\leqslant}$ αντίστοιχα. Όμοια ο ισχυρισμός πως η Γ είναι κλειστή ως προς $\bigwedge_{\mathbb{N}}$ και $\bigwedge_{\leqslant}$ είναι ισοδύναμος με τον ισχυρισμό ότι η Γ είναι κλειστή ως προς $\forall^{\mathbb{N}}$ και $\forall^{\leqslant}$ αντίστοιχα.

Άσκηση 3.4.13. Θεωρούμε μια κλάση συνόλων Γ που περιέχει τα κλειστά σύνολα, και είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση όπως επίσης ως προς τον τελεστή &. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Η Γ είναι κλειστή ως προς $\exists^{\mathcal{N}}$.

(ii) Η Γ είναι κλειστή ως προς $\exists^{\mathcal{Y}}$ για όλους τους Πολωνικούς χώρους $\mathcal{Y}$.

(iii) Η Γ είναι κλειστή ως προς συνεχείς εικόνες.

Συμπεράνετε ότι ο ισχυρισμός πως η $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ είναι κλειστή ως προς $\exists^{\mathcal{Y}}$ για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{Y}$ είναι ισοδύναμος με τον ισχυρισμό ότι η $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ είναι κλειστή ως προς συνεχείς εικόνες, όπου $n \geqslant 1$.

Άσκηση 3.4.14. Αν η Γ είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση τότε και οι κλάσεις $\mathrm{c}\Gamma$, $\bigvee_{\mathbb{N}} \Gamma$, $\exists^{\mathcal{Y}}$ είναι επίσης κλειστές ως προς συνεχή αντικατάσταση.

Άσκηση 3.4.15. Δείξτε το ανάλογο με την Άσκηση 3.3.21 για τις προβολικές κλάσεις συνόλων:

Για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$, κάθε μη κενό $G \subseteq \mathcal{X}$, το οποίο είναι Πολωνικός υπόχωρος με τη σχετική τοπολογία και κάθε $A \subseteq G$ έχουμε ότι

$$A \in \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n(G) \iff \text{υπάρχει } B \in \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n(\mathcal{X}) \text{ με } A = G \cap B$$

και

$$A \in \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n(G) \iff \text{υπάρχει } B \in \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n(\mathcal{X}) \text{ με } A = G \cap B$$

όπου $n \geqslant 1$.

Ποιο είναι το αντίστοιχο συμπέρασμα για την κλάση $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^1_n$;

3.5. Μετρησιμότητα συνάρτησης ως προς κλάση

Η επόμενη έννοια γενικεύει αυτήν της συνεχούς συνάρτησης και σχετίζεται με τη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωσης.

Ορισμός 3.5.1. Δίνεται μια κλάση συνόλων Γ και μια συνάρτηση $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, όπου $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ είναι Πολωνικοί χώροι. Η f λέγεται Γ-**μετρήσιμη** αν για κάθε ανοικτό σύνολο $U \subseteq \mathcal{Y}$ έχουμε $f^{-1}[U] \in \Gamma(\mathcal{X})$.

Για παράδειγμα οι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_1$-μετρήσιμες συναρτήσεις είναι ακριβώς αυτές που αντιστρέφουν ανοικτά σύνολα σε ανοικτά, δηλαδή είναι οι συνεχείς συναρτήσεις. Το μεγαλύτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι Γ-μετρήσιμες συναρτήσεις όπου η Γ είναι κλειστή ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$. Μάλιστα σε πολλές περιπτώσεις η Γ είναι κάποια από τις κλάσεις $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ και $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^1_n$. Σε αυτές τις κλάσεις αρκεί να ελέγξουμε την αντίστροφη εικόνα των συνόλων μιας αριθμήσιμης βάσης για να έχουμε Γ-μετρησιμότητα:

Παρατήρηση 3.5.2. Αν μια κλάση Γ είναι κλειστή ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ είναι Πολωνικοί χώροι, και $\mathcal{V} = \{V_s \mid s \in \mathbb{N}\}$ είναι μια αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του $\mathcal{Y}$, τότε μια συνάρτηση $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ είναι Γ-μετρήσιμη αν και μόνο αν για κάθε $s \in \mathbb{N}$ έχουμε $f^{-1}[V_s] \in \Gamma(\mathcal{X})$.

Η απόδειξη της προηγούμενης παρατήρησης είναι άμεση και παραλείπεται.

Στην περίπτωση των προβολικών κλάσεων η μετρησιμότητα ως προς την κλάση είναι ισοδύναμη με τη μετρησιμότητα ως προς τη δυϊκή και ως προς την αμφίσημη κλάση.

Πρόταση 3.5.3. *Για κάθε $n \geqslant 1$ και κάθε $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Η f είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$-μετρήσιμη.*

(ii) *Η f είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n$-μετρήσιμη.*

(iii) *Η f είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^1_n$-μετρήσιμη.*

Απόδειξη. Αρχικά δείχνουμε ότι τα (i) και (ii) είναι ισοδύναμα. Για τη συνεπαγωγή (i) $\Longrightarrow$ (ii) έχουμε κάθε κλειστό $C \subseteq \mathcal{Y}$ το σύνολο $f^{-1}[C]$ είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n$ υποσύνολο του $\mathcal{X}$, γιατί

$$\mathcal{X} \setminus f^{-1}[C] = f^{-1}[\mathcal{Y} \setminus C] = f^{-1}[V] \in \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n(\mathcal{X})$$

όπου το $V = \mathcal{Y} \setminus C$ είναι ανοικτό.

Επομένως έχουμε ότι η f αντιστρέφει τα κλειστά υποσύνολα του $\mathcal{Y}$ σε $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n$ υποσύνολα του $\mathcal{X}$. Τώρα αν έχουμε ένα ανοικτό $U \subseteq \mathcal{Y}$ το U είναι ειδικότερα F_σ-σύνολο, δηλαδή υπάρχει ακολουθία κλειστών συνόλων $(C_i)_{i \in \mathbb{N}}$ με $U = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i$. Επομένως

$$f^{-1}[U] = f^{-1}[\textstyle\bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}[C_i].$$

Αφού κάθε $f^{-1}[C_i]$ είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$ υποσύνολο του $\mathcal{X}$ έχουμε από την κλειστότητα της $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n$ ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$ ότι και το $f^{-1}[U]$ είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$ υποσύνολο του $\mathcal{X}$. Άρα η f είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^0_n$-μετρήσιμη.

Η συνεπαγωγή (ii) $\Longrightarrow$ (i) αποδεικνύεται όμοια. Αν η f είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^0_n$-μετρήσιμη τότε για κάθε κλειστό σύνολο $C \subseteq \mathcal{Y}$ το $f^{-1}[C]$ είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ υποσύνολο του $\mathcal{X}$. Επομένως γράφοντας κάθε ανοικτό $U \subseteq \mathcal{Y}$ ως αριθμήσιμη ένωση κλειστών συνόλων και χρησιμοποιώντας την κλειστότητα της $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$, βλέπουμε όπως πιο πάνω ότι το $f^{-1}[U]$ είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ υποσύνολο του $\mathcal{X}$.

Η συνεπαγωγή (iii) $\Longrightarrow$ (i) είναι προφανής αφού $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^1_n(\mathcal{X}) \subseteq \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n(\mathcal{X})$. Για την (i) $\Longrightarrow$ (iii) χρησιμοποιούμε την ισοδυναμία των (i) και (ii): αν η f αντιστρέφει τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathcal{Y}$ σε $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ υποσύνολα του $\mathcal{X}$, τότε θα αντιστρέφει τα ανοικτά και σε $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$ σύνολα. Συνεπώς θα αντιστρέφει τα ανοικτά και σε $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^0_n$ υποσύνολα του $\mathcal{X}$. $\square$

Επίσης στην περίπτωση των προβολικών κλάσεων η μετρησιμότητα μπορεί να χαρακτηριστεί με τη βοήθεια του γραφήματος της συνάρτησης.

Πρόταση 3.5.4. *Για κάθε $n \geqslant 1$ και κάθε συνάρτηση $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ μεταξύ Πολωνικών χώρων τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Η f είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$-μετρήσιμη.*
(2) *Το γράφημα $Graph(f)$ της f είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^1_n$ σύνολο.*
(3) *Το γράφημα $Graph(f)$ της f είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ σύνολο.*

Απόδειξη. Για την κατεύθυνση (1) $\Longrightarrow$ (2) θεωρούμε μια αριθμήσιμη βάση $(V_s)_{s\in\mathbb{N}}$ του $\mathcal{Y}$. Για κάθε x, y έχουμε

$$\begin{aligned}(x,y) \in Graph(f) &\iff \forall s\ (y \in V_s \longrightarrow f(x) \in V_s)\\ &\iff \forall s\ (y \notin V_s \ \vee\ f(x) \in V_s).\end{aligned}$$

Αν η f είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$-μετρήσιμη έχουμε από την Πρόταση 3.5.3 ότι η f είναι και $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^1_n$-μετρήσιμη. Από τις προηγούμενες ισοδυναμίες και τις ιδιότητες κλειστότητας της κλάσης $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^1_n$ το γράφημα $Graph(f)$ της f είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^1_n$ υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.

Η κατεύθυνση (2) $\Longrightarrow$ (3) είναι προφανής.

Για την κατεύθυνση (3) $\Longrightarrow$ (1) έχουμε για κάθε ανοικτό $U \subseteq \mathcal{Y}$ και κάθε $x \in \mathcal{X}$,

$$\begin{aligned}x \in f^{-1}[U] &\iff f(x) \in U\\ &\iff \exists y\ ((x,y) \in Graph(f)\ \&\ y \in U).\end{aligned}$$

Αυτό δείχνει ότι το $f^{-1}[U]$ είναι $\exists^{\mathcal{Y}}\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n \subseteq \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ υποσύνολο του $\mathcal{X}$. ▫

Η αντίστροφη εικόνα ενός $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_m$ συνόλου υπό μια συνεχή συνάρτηση είναι επίσης $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_m$ σύνολο (κλειστότητα $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_m$ ως προς συνεχή αντικατάσταση). Το αντίστοιχο αποτέλεσμα για τις $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$-μετρήσιμες συναρτήσεις είναι το ακόλουθο.

Πρόταση 3.5.5. *Για κάθε φυσικούς αριθμούς $n, m \geqslant 1$, αν η $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$-μετρήσιμη και το $P \subseteq \mathcal{Y}$ είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_m$ σύνολο τότε το $f^{-1}[P]$ είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+m-1}$ υποσύνολο του $\mathcal{X}$.*

Ειδικότερα η αντίστροφη εικόνα ενός $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_m$ συνόλου κάτω από μια συνεχή συνάρτηση είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_m$ σύνολο.

Απόδειξη. Με επαγωγή στο $m \geqslant 1$. Για $m = 1$ το ζητούμενο είναι άμεσο από τον ορισμό της $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$-μετρησιμότητας. Υποθέτουμε ότι ισχύει ο ισχυρισμός για κάποιο $m \geqslant 1$ και θεωρούμε ένα $P \subseteq \mathcal{Y}$ που είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{m+1}$ σύνολο. Τότε $P = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} Q_i$ όπου $Q_i \in \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_m(\mathcal{X})$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Από την Επαγωγική Υπόθεση το $f^{-1}[Q_i]$ είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_{n+m-1}$ υποσύνολο του $\mathcal{X}$ για κάθε i, οπότε το σύνολο $f^{-1}[P] = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f^{-1}[Q_i] \in \bigvee_{\mathbb{N}}$ ανήκει στην $\bigvee_{\mathbb{N}} \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_{n+m-1} = \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+m} = \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+(m+1)-1}$.

Ο δεύτερος ισχυρισμός προκύπτει από αυτό που αποδείξαμε παίρνοντας $n = 1$. ▫

Πρόταση 3.5.6. *Αν η $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$-μετρήσιμη και αν η $g : \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_m$-μετρήσιμη, τότε η σύνθεση $g \circ f : \mathcal{X} \to \mathcal{Z}$ είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+m-1}$-μετρήσιμη.*

Ειδικότερα η σύνθεση μιας συνεχούς συνάρτησης με μια $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_k$-μετρήσιμη συνάρτηση είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_k$-μετρήσιμη.

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα ανοικτό $U \subseteq \mathcal{Z}$. Τότε το σύνολο $P = g^{-1}[U]$ είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_m$ υποσύνολο του $\mathcal{Y}$ και επομένως από την Πρόταση 3.5.5 η αντίστροφη εικόνα

$$f^{-1}[P] = f^{-1}[g^{-1}[U]] = (g \circ f)^{-1}[U]$$

είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+m-1}$ υποσύνολο του $\mathcal{X}$.

Για να δούμε τον δεύτερο ισχυρισμό παίρνουμε $n = 1$ ή $m = 1$ ανάλογα με το ποια από τις f και g είναι συνεχής. ▫

Όπως έχουμε δείξει κάθε Πολωνικός χώρος $\mathcal{X}$ είναι συνεχής εικόνα του $\mathcal{N}$, επιπλέον δεν είναι σωστό ότι αντί του χώρου του Baire θα μπορούσαμε να είχαμε για παράδειγμα τον $\mathbb{R}$. Το πρόβλημα στο τελευταίο βρίσκεται στη συνέχεια της συνάρτησης, καθώς κάθε συνεχής συνάρτηση $\pi : \mathbb{R} \to \mathcal{N}$ είναι αναγκαστικά σταθερή (Άσκηση 2.6.16) και επομένως δεν μπορεί να είναι επιμορφισμός. Θα δείξουμε στα επόμενα βήματα ότι αν αντικαταστήσουμε τη συνέχεια με την πιο ασθενή συνθήκη της $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_2$-μετρησιμότητας τότε δεν υπάρχει κανένα πρόβλημα: κάθε Πολωνικός χώρος είναι η εικόνα του $\mathbb{R}$ (ή ενός οποιουδήποτε υπαραριθμήσιμου Πολωνικού χώρου) κάτω από μια $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_2$-μετρήσιμη συνάρτηση.

Λήμμα 3.5.7. *Υπάρχει $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_2$-μετρήσιμη και επί συνάρτηση $g : 2^{\mathbb{N}} \twoheadrightarrow \mathcal{N}$.*

Απόδειξη. Θα εφαρμόσουμε την ιδέα της Άσκησης 2.3.19. Ξεκινάμε με μια πρόσθετη ορολογία που θα χρησιμοποιήσουμε ειδικά για αυτή την απόδειξη. Αν έχουμε ένα $\gamma \in 2^{\mathbb{N}}$ για το οποίο $\gamma(n) = 1$ για άπειρα στο πλήθος $n \in \mathbb{N}$, τότε μπορούμε να γράψουμε το γ ως την παράθεση πεπερασμένων ακολουθιών της μορφής $(0)^{k_n}$ ακολουθούμενες από μονάδες,

$$\gamma = (0)^{k_0} * (1) * (0)^{k_1} * (1) * \ldots * (0)^{k_n} * (1) * \ldots \tag{3.5}$$

Υπενθυμίζουμε ότι $k_n = 0$ σημαίνει πως η $(0)^{k_n}$ είναι η κενή ακολουθία. Μάλιστα, αυτά τα k_n είναι μοναδικά και προφανώς εξαρτώνται από το γ. Για την ακρίβεια ισχύει $(k_0, k_1, \ldots, k_n, \ldots) = f^{-1}(\gamma)$, όπου η f είναι ο μονομορφισμός της Άσκησης 2.3.19.

Το πιο πάνω $(0)^{k_n}$ θα το αποκαλούμε το *n-μπλοκ* της γ και επίσης θα λέμε ότι το γ έχει *άπειρα μπλοκ*.

Όταν το γ είναι τελικά μηδέν, τότε υπάρχουν μοναδικά $k_0, \ldots, k_{n-1} \in \mathbb{N}$ με

$$\gamma = (0)^{k_0} * (1) * \ldots * (0)^{k_{n-1}} * (1) * (0, 0, 0, \ldots). \tag{3.6}$$

(Αν $n = 0$ πιο πάνω, εννοούμε ότι $\gamma = (0, 0, 0, \ldots)$). Σε αυτή την περίπτωση, θα λέμε ότι το γ έχει *n στο πλήθος μπλοκ* και, όπως με πριν θα αποκαλούμε την πεπερασμένη ακολουθία $(0)^{k_i}$ το *t-μπλοκ* της γ για κάθε $i < n$.

Ορίζουμε τη συνάρτηση $g : 2^{\mathbb{N}} \to \mathcal{N}$ ως εξής: αν το $\gamma \in 2^{\mathbb{N}}$ έχει άπειρα το πλήθος μπλοκ, ορίζουμε

$$g(\gamma) = (k_0, k_1, \ldots, k_n, \ldots) = f^{-1}(\gamma),$$

όπου τα k_n είναι όπως στην (3.5) και η f όπως στην Άσκηση 2.3.19. Αν το γ έχει n το πλήθος μπλοκ, τότε ορίζουμε

$$g(\gamma) = (k_0, \ldots, k_{n-1}, 0, 0, \ldots),$$

όπου τα $k_0, \ldots, k_{n-1}$ είναι όπως στην (3.6).

Αποδεικνύεται εύκολα ότι η συνάρτηση g επιμορφισμός: για κάθε $\alpha = (k_0, k_1, \ldots, k_n, \ldots) \in \mathcal{N}$ έχουμε $g(\gamma) = \alpha$, όπου το γ είναι όπως στην (3.5).

Απομένει να δείξουμε ότι η g είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_2$-μετρήσιμη. Με εφαρμογή της Παρατήρησης 3.5.2 αρκεί να δείξουμε ότι η αντίστροφη εικόνα $g^{-1}[\mathcal{N}_u]$ είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_2$ υποσύνολο του $2^{\mathbb{N}}$ για κάθε $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. Προφανώς, κάθε $\mathcal{N}_u$ είναι πεπερασμένη τομή συνόλων της μορφής $V_{t,k} = \{\alpha \in \mathcal{N} \mid \alpha(t) = k\}$, και συγκεκριμένα $\mathcal{N}_u = \bigcap_{t<|u|} V_{t,u(t)}$, όπου $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. Αφού η $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_2$ είναι κλειστή ως προς $\bigwedge_{\leqslant}$ (δηλαδή πεπερασμένες τομές υποσυνόλων του ίδιου χώρου), αρκεί να δείξουμε ότι $g^{-1}[V_{t,k}] \in \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_2(\mathcal{X})$ για κάθε $t, k \in \mathbb{N}$.

Θεωρούμε λοιπόν $t, k \in \mathbb{N}$ και διακρίνουμε περιπτώσεις. Όταν $k > 0$, τότε $g(\gamma)(t) = k$ αν και μόνο αν η γ έχει τουλάχιστον t στο πλήθος μπλοκ και το

t-μπλοκ της γ είναι της μορφής $(0)^k$. Επομένως

$$\begin{aligned}\gamma \in g^{-1}[V_{t,k}] &\iff g(\gamma)(t) = k \\ &\iff \exists u\ \exists w\ \Big(\ t < |u|\ \&\ w = (0)^{u(0)} * (1) * \ldots * (0)^{u(|u|-1)} * (1) \\ &\qquad \&\ u(t) = k\ \&\ w \sqsubseteq \gamma\ \Big).\end{aligned}$$

Προκύπτει από την τελευταία ισοδυναμία ότι το $g^{-1}[V_{t,k}]$ είναι *ανοικτό* και ειδικότερα $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_2$ υποσύνολο του $2^{\mathbb{N}}$. Αυτό μπορούμε να το δούμε είτε με τον διαγραμματικό συλλογισμό είτε παρατηρώντας ότι $g^{-1}[V_{n,k}] = \bigcup_{(u,w)\in I_{t,k}}(\mathcal{N}_w \cap 2^{\mathbb{N}})$, όπου

$$I_{t,k} = \{(u,w) \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \times \{0,1\}^{<\mathbb{N}} \mid t < |u|\ \&\ w = (0)^{u(0)} * (1) * \ldots * (0)^{u(|u|-1)} * (1)\ \&\ u(t) = k\}.$$

Στην περίπτωση που $k = 0$, τότε μπορούμε να έχουμε $g(\gamma)(t) = 0$ για δύο λόγους: α) όπως με πριν, η γ έχει τουλάχιστον t το πλήθος μπλοκ και το t-μπλοκ της γ είναι της μορφής $(0)^0 = \Lambda$, β) η γ έχει λιγότερα από t το πλήθος μπλοκ. Επομένως

$$\begin{aligned}\gamma \in g^{-1}[V_{t,0}] &\iff g(\gamma)(t) = 0 \\ &\iff \exists u\ \exists w\ \Big(\ w = (0)^{u(0)} * (1) * \ldots * (0)^{u(|u|-1)} * (1) \\ &\qquad \&\ w \sqsubseteq \gamma\ \&\ [\ (t < |u|\ \&\ u(t) = 0)\ \vee\ (t \geqslant |u|\ \&\ (\forall s \geqslant |w|\ \gamma(s) = 0)\ ]\ \Big).\end{aligned}$$

Προκύπτει από την τελευταία ισοδυναμία ότι το $g^{-1}[V_{t,0}]$ είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_2$ υποσύνολο του $2^{\mathbb{N}}$. Αυτό μπορούμε να το δούμε είτε με τον διαγραμματικό συλλογισμό είτε παρατηρώντας ότι $g^{-1}[V_{n,0}] = \bigcup_{(u,v)\in J_t} C_{t,u,w}$, όπου

$$J_t = \{(u,w) \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \times \{0,1\}^{<\mathbb{N}} \mid w = (0)^{u(0)} * (1) * \ldots * (0)^{u(|u|-1)} * (1)\ \&\ (t \geqslant |u|\ \vee\ u(t) = 0)\}$$

$$C_{t,u,w} = \begin{cases} \mathcal{N}_w \cap 2^{\mathbb{N}}, & \text{αν } t < |u|, \\ \mathcal{N}_w \cap \bigcap_{s \geqslant |w|}\{\delta \in 2^{\mathbb{N}} \mid \delta(s) = 0\}, & \text{αν } t \geqslant |u|. \end{cases}$$

Κάθε $C_{t,u,w}$ είναι είτε ανοικτό σύνολο είτε η τομή ενός ανοικτού με ένα κλειστό σύνολο. Σε κάθε περίπτωση είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_2$, και άρα το $g^{-1}[V_{n,0}]$ είναι επίσης $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_2$ υποσύνολο του $2^{\mathbb{N}}$. □

Θεώρημα 3.5.8. *Για κάθε υπεραριθμήσιμο Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ υπάρχει $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_2$-μετρήσιμη και επί συνάρτηση $f : \mathcal{X} \twoheadrightarrow \mathcal{N}$.*

Απόδειξη. Από το Πόρισμα 2.4.3 υπάρχει συνεχής μονορφισμός $\tau : 2^{\mathbb{N}} \rightarrowtail \mathcal{X}$. Το σύνολο $K = \tau[2^{\mathbb{N}}]$ είναι συμπαγές, και άρα κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{X}$, και όπως έχουμε εξηγήσει η αντίστροφη συνάρτηση $\tau^{-1} : K \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow 2^{\mathbb{N}}$ είναι συνεχής. Θεωρούμε τη $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_2$-μετρήσιμη και επί συνάρτηση $g : 2^{\mathbb{N}} \twoheadrightarrow \mathcal{N}$ του Λήμματος 3.5.7 και ορίζουμε

$$f : \mathcal{X} \to \mathcal{N} : f(x) = \begin{cases} g(\tau^{-1}(x)), & x \in K \\ (0,0,0,\ldots), & x \notin K. \end{cases}$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι η f είναι επιμορφισμός. Δείχνουμε ότι είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_2$-μετρήσιμη. Για να το δούμε αυτό θεωρούμε $U \subseteq \mathcal{N}$ ανοικτό και έχουμε

$$f^{-1}[U] = \begin{cases} (\mathcal{X} \setminus K)\ \cup\ (K \cap (g \circ \tau^{-1})^{-1}[U]), & \text{αν } (0,0,0,\ldots) \in U \\ \big(K \cap (g \circ \tau^{-1})^{-1}[U]\big), & \text{αν } (0,0,0,\ldots) \notin U. \end{cases}$$

Το $\mathcal{X} \setminus K$ είναι ανοικτό σύνολο, και επομένως $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_2$. Άρα αρκεί να δείξουμε ότι το

$$K \cap (g \circ \tau^{-1})^{-1}[U] = (g \circ \tau^{-1})^{-1}[U] = (\tau^{-1})^{-1}[g^{-1}[U]]$$

είναι $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_2$ υποσύνολο του $\mathcal{X}$, (στη δεύτερη ισότητα πιο πάνω χρησιμοποιήσαμε ότι η τ^{-1} ορίζεται μόνο στο K).

Επειδή η g είναι $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_2$-μετρήσιμη έχουμε ότι $g^{-1}[U] \in \utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_2(2^{\mathbb{N}})$, και επειδή η τ^{-1} είναι συνεχής, προκύπτει από την Πρόταση 3.5.5 ότι το σύνολο $P = (\tau^{-1})^{-1}[g^{-1}[U]]$ είναι $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_2$ υποσύνολο του K. Βλέπουμε το τελευταίο είναι Πολωνικός χώρος. Από την Άσκηση 3.3.21, το P έχει τη μορφή $K \cap Q$, όπου το Q είναι $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_2$ υποσύνολο του $\mathcal{X}$. Εφόσον το K είναι κλειστό, έχουμε ότι $P = K \cap Q \in \utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_2(\mathcal{X})$. □

Ασκήσεις

Άσκηση 3.5.9. Δίνονται Πολωνικοί χώροι $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ και μια αριθμήσιμη βάση $\{V_s \mid s \in \mathbb{N}\}$. Τότε για κάθε $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ έχουμε ότι η f είναι $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$-μετρήσιμη ($n \geqslant 1$) αν και μόνο αν για κάθε $s \in \mathbb{N}$ το σύνολο $f^{-1}[V_s]$ ανήκει στη $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$. Το ίδιο ισχύει και για την $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ στη θέση της $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$.

Άσκηση 3.5.10. Για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και κάθε $A \subseteq \mathcal{X}$ η χαρακτηριστική συνάρτηση

$$\chi_A : \mathcal{X} \to \mathbb{R} : \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A, \end{cases}$$

είναι $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$-μετρήσιμη αν και μόνο αν $A \in \utilde{\mathbf{\Delta}}^0_n(\mathcal{X})$, όπου $n \geqslant 1$.

Άσκηση 3.5.11. Δίνεται μια ακολουθία $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ από $\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_{n-1}$ υποσύνολα ενός Πολωνικού χώρου $\mathcal{X}$, όπου $n \geqslant 2$. Θέτουμε $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$. Τότε η συνάρτηση

$$f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} : f(x) = \begin{cases} 2^{-k}, & \text{αν } x \in A \text{ και ο } k \text{ είναι ο ελάχιστος φυσικός με } x \in B_k, \\ 0, & \text{αν } x \notin A, \end{cases}$$

είναι $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$-μετρήσιμη. Μάλιστα, αν $A \notin \utilde{\mathbf{\Pi}}^0_n(\mathcal{X})$, τότε η f δεν είναι $\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_n$-μετρήσιμη.

Άσκηση 3.5.12. Για κάθε Πολωνικούς χώρους $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, κάθε φυσικό $n \geqslant 1$ και κάθε συνάρτηση $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Η f είναι $\utilde{\mathbf{\Delta}}^0_n$-μετρήσιμη.

(ii) Η f είναι $\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_n$-μετρήσιμη.

(iii) Για κάθε $A \in \utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_2(\mathcal{Y})$ ισχύει $f^{-1}[A] \in \utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n(\mathcal{X})$.

Άσκηση 3.5.13. Για κάθε $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$-μετρήσιμες συναρτήσεις $f, g : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ οι συναρτήσεις

$$f + g, \ f \cdot g, \ |f|, \ \lambda \cdot f, \ (\lambda \in \mathbb{R}), \ \max\{f + g\}, \ \min\{f + g\},$$

είναι $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$-μετρήσιμες.

Άσκηση 3.5.14. Θεωρούμε Πολωνικούς χώρους $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ και μια αριθμήσιμη βάση $\{V_s \mid s \in \mathbb{N}\}$ για την τοπολογία του $\mathcal{Y}$. Αν η Γ είναι μία από τις κλάσεις $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$, $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n$, $n \geqslant 1$, τότε κάθε συνάρτηση $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ είναι Γ-μετρήσιμη αν και μόνο αν το σύνολο

$$R^f = \{(x, s) \in \mathcal{X} \times \mathbb{N} \mid f(x) \in V_s\}$$

ανήκει στη Γ.

Άσκηση 3.5.15. Για κάθε $n \geqslant 1$ οι κλάσεις $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ και $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n$ είναι κλειστές ως προς αντικατάσταση με $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^1_n$-μετρήσιμες συναρτήσεις, δηλαδή για κάθε $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^1_n$-μετρήσιμη $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, όπου $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ Πολωνικοί χώροι, και για κάθε $A \in \Gamma(\mathcal{Y})$ ισχύει $f^{-1}[A] \in \Gamma(\mathcal{X})$, όπου $\Gamma = \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n, \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n$.

Άσκηση 3.5.16. Για κάθε Πολωνικούς χώρους $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$, αν ο $\mathcal{X}$ είναι υπεραριθμήσιμος, τότε υπάρχει $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_2$-μετρήσιμη και επί συνάρτηση $f : \mathcal{X} \twoheadrightarrow \mathcal{Y}$.

Άσκηση 3.5.17. Δίνονται Πολωνικοί χώροι $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ και συναρτήσεις $f_i : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, $i \in \mathbb{N}$. Αν η ακολουθία $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει *ομοιόμορφα* στην $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ και κάθε f_i είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$-μετρήσιμη συνάρτηση, τότε και η f είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$-μετρήσιμη, όπου $n \geqslant 1$.

3.6. Παραμετρικοποίηση και Καθολικά Σύνολα

Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι οι συμπεριλήψεις των Διαγραμμάτων 1 και 2 είναι γνήσιες, όταν ο $\mathcal{X}$ είναι υπεραριθμήσιμος Πολωνικός χώρος (συμπεριλήψεις μεταξύ των κλάσεων Borel συνόλων πεπερασμένης τάξης καθώς και των προβολικών κλάσεων). Για να το αποδείξουμε αυτό θα εφαρμόσουμε μια τεχνική «διαγωνοποίησης» που θεμελιώθηκε από τον Lebesgue, η οποία στηρίζεται στην έννοια του καθολικού συνόλου [**14, 17, 40, 13**].

Ορισμός 3.6.1. Θεωρούμε μια κλάση Γ και έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{Y}$. Ένα σύνολο $G \subseteq \mathcal{Y} \times \mathcal{X}$, όπου $\mathcal{X}$ Πολωνικός χώρος, λέγεται $\mathcal{Y}$-**καθολικό** για την οικογένεια $\Gamma(\mathcal{X})$ αν το G ανήκει στην Γ και επιπλέον για κάθε $P \subseteq \mathcal{X}$ έχουμε

$$P \in \Gamma(\mathcal{X}) \iff \exists y \in \mathcal{Y}\ P = G_y = \{x \in \mathcal{X} \mid (y,x) \in G\}. \tag{3.7}$$

Η αντίστροφη κατεύθυνση στην προηγούμενη ισοδυναμία είναι τετριμμένη, όταν η Γ είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση (Πρόταση 3.2.6. Γι' αυτό δεν θα κάνουμε πάντα αναφορά σε αυτήν.

Λέμε επίσης ότι η Γ είναι $\mathcal{Y}$-**παραμετρικοποιήσιμη** αν για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ υπάρχει ένα σύνολο $G^{\mathcal{X}} \subseteq \mathcal{Y} \times \mathcal{X}$ που είναι $\mathcal{Y}$-**καθολικό** για την $\Gamma(\mathcal{X})$.

Λήμμα 3.6.2. *Η κλάση $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_1$ είναι $2^{\mathbb{N}}$-παραμετρικοποιήσιμη.*

Απόδειξη. Θεωρούμε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και πρέπει να βρούμε ένα $G \subseteq 2^{\mathbb{N}} \times \mathcal{X}$ που είναι $2^{\mathbb{N}}$-καθολικό για την $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_1(\mathcal{X})$. Παίρνουμε μια αριθμήσιμη βάση $\mathcal{V} = \{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ για την τοπολογία του $\mathcal{X}$ και ορίζουμε το σύνολο $G \subseteq 2^{\mathbb{N}} \times \mathcal{X}$,

$$(\alpha, x) \in G \iff \exists n\ (\alpha(n) = 1\ \&\ x \in V_n).$$

Το G είναι εύκολα ανοικτό σύνολο, δηλαδή $G \in \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}(2^{\mathbb{N}} \times \mathcal{X})$. Είναι σαφές ότι κάθε G_α, όπου $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$, είναι επίσης ανοικτό σύνολο. Στη συνέχεια θεωρούμε ένα $P \subseteq \mathcal{X}$ που είναι ανοικτό. Εφόσον η $\mathcal{V}$ είναι βάση, το P γράφεται ως ένωση στοιχείων της $\mathcal{V}$. Επομένως υπάρχει $I \subseteq \mathbb{N}$ με

$$P = \bigcup\nolimits_{n\in I} V_n.$$

Ορίζουμε $\alpha : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$,

$$\alpha(n) = \begin{cases} 1, & n \in I \\ 0, & n \notin I. \end{cases}$$

Δείχνουμε ότι $P = G_\alpha$. Πράγματι, αν $x \in P$, τότε για κάποιο $n \in I$ ισχύει $x \in V_n$. Οπότε έχουμε $\alpha(n) = 1$ και $x \in V_n$, άρα $(\alpha, x) \in G$ ή αλλιώς $x \in G_\alpha$. Αντίστροφα, αν $x \in G_\alpha$, τότε υπάρχει n με $\alpha(n) = 1$ και $x \in V_n$. Τότε $n \in I$ και επομένως $x \in V_n \subseteq P$.

Καταλήγουμε ότι το G είναι $2^{\mathbb{N}}$-καθολικό για την $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_1(\mathcal{X})$. □

Λήμμα 3.6.3. *Θεωρούμε μια κλάση* Γ *που είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση. Αν η* Γ *είναι* $2^{\mathbb{N}}$*-παραμετρικοποιήσιμη, τότε οι* $c\Gamma$, $\bigvee_{\mathbb{N}} \Gamma$ *και* $\exists^{\mathcal{Y}}\Gamma$, *όπου* $\mathcal{Y}$ *Πολωνικός χώρος, είναι επίσης* $2^{\mathbb{N}}$*-παραμετρικοποιήσιμες.*

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και σύνολα $G^0 \subseteq 2^{\mathbb{N}} \times \mathcal{X}$, $G^1 \subseteq 2^{\mathbb{N}} \times \mathcal{X}$, $G^2 \subseteq 2^{\mathbb{N}} \times (\mathcal{Y} \times \mathcal{X})$, τα οποία είναι $2^{\mathbb{N}}$-καθολικά για τις $\Gamma(\mathcal{X})$, $\Gamma(\mathcal{X})$ και $\Gamma(\mathcal{Y} \times \mathcal{X})$ αντίστοιχα.

Ορίζουμε τα σύνολα $H^0, H^1 \subseteq 2^{\mathbb{N}} \times \mathcal{X}$, $H^2 \subseteq 2^{\mathbb{N}} \times (\mathcal{Y} \times \mathcal{X})$ ως εξής,

$$\begin{aligned}
(\alpha, x) \in H^0 &\iff (\alpha, x) \notin G^0 \\
(\alpha, x) \in H^1 &\iff \exists n \ ((\alpha)_n, x) \in G^1 \\
(\alpha, x) \in H^2 &\iff \ \exists y \ (\alpha, y, x) \in G^2.
\end{aligned}$$

Δείχνουμε ότι τα H^0, H^1 και H^2 είναι $2^{\mathbb{N}}$-καθολικά για τις οικογένειες $c\Gamma(\mathcal{X})$, $\bigvee_{\mathbb{N}} \Gamma(\mathcal{X})$ και $\exists^{\mathcal{Y}}\Gamma(\mathcal{X})$ αντίστοιχα.

Είναι σαφές ότι το σύνολο H^0 ανήκει στη Γ, και από την κλειστότητα της τελευταίας ως προς συνεχή αντικατάσταση έχουμε ότι τα σύνολα H^1, H^2 ανήκουν στις κλάσεις $\bigvee_{\mathbb{N}} \Gamma$ και $\exists^{\mathcal{Y}}\Gamma$ αντίστοιχα.

Επιπλέον, από την Άσκηση 3.4.14 οι κλάσεις $c\Gamma$, $\bigvee_{\mathbb{N}} \Gamma$ και $\exists^{\mathcal{Y}}\Gamma$ είναι κλειστές ως προς συνεχή αντικατάσταση. Επομένως, όπως έχουμε αναφέρει, αρκεί να δείξουμε μόνο την αντίστροφη κατεύθυνση της (3.7) για κάθε μία από τις $c\Gamma(\mathcal{X})$, $\bigvee_{\mathbb{N}} \Gamma(\mathcal{X})$ και $\exists^{\mathcal{Y}}\Gamma(\mathcal{X})$.

Για την πρώτη θεωρούμε ένα $P \in c\Gamma(\mathcal{X})$, οπότε $c_{\mathcal{X}}P \in \Gamma(\mathcal{X})$ και επομένως υπάρχει $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$ με $c_{\mathcal{X}}P = G^0_\alpha$. Έπεται άμεσα ότι $P = c_{\mathcal{X}}G^0_\alpha = H^0_\alpha$.

Για τη δεύτερη θεωρούμε μια ακολουθία $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από υποσύνολα του $\mathcal{X}$ που ανήκουν στη Γ και το σύνολο $P = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n$. Πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$ με $P = H^1_\alpha$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $\alpha_n \in 2^{\mathbb{N}}$ με $P_n = G^1_{\alpha_n}$. Η ιδέα είναι να κωδικοποιήσουμε την ακολουθία $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με ένα $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$. Αυτό είναι άμεσο με τον συνήθη τρόπο: ορίζουμε $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με

$$\alpha(t) = \begin{cases} \alpha_n(i), & \text{αν υπάρχουν } n, i \text{ με } t = \langle n, i\rangle \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Προφανώς ισχύει $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$ και $(\alpha)_n = \alpha_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, πράγμα υπαγορεύει τον ορισμό του H^1 πιο πάνω. Έχουμε για κάθε $x \in \mathcal{X}$,

$$\begin{aligned}
x \in P &\iff \exists n \ x \in P_n \\
&\iff \exists n \ x \in G^1_{\alpha_n} \\
&\iff \exists n \ (\alpha_n, x) \in G^1 \\
&\iff \exists n \ ((\alpha)_n, x) \in G^1 \\
&\iff (\alpha, x) \in H^1.
\end{aligned}$$

Επομένως $P = H^1_\alpha$.

Για την τρίτη οικογένεια $\exists^{\mathcal{Y}}(\mathcal{X})$ θεωρούμε ένα $P \subseteq \mathcal{X}$ που ανήκει στην $\exists^{\mathcal{Y}}\Gamma$. Πρέπει να βρούμε ένα $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$ με $P = H^2_\alpha$. Υπάρχει ένα $Q \subseteq \mathcal{Y} \times \mathcal{X}$ που ανήκει στη Γ με $P = \exists^{\mathcal{Y}}Q$ και υπάρχει επίσης ένα $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$ με $Q = G^2_\alpha$, (το $G^2 \subseteq 2^{\mathbb{N}} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Y}$ είναι $2^{\mathbb{N}}$-καθολικό για την $\Gamma(\mathcal{Y} \times \mathcal{X})$). Για κάθε $x \in \mathcal{X}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
x \in P &\iff \exists y \ (y, x) \in Q \\
&\iff \exists y \ (y, x) \in G^2_\alpha \\
&\iff \exists y (\alpha, y, x) \in G^2 \\
&\iff (\alpha, x) \in H^2.
\end{aligned}$$

Επομένως $P = H^2_\alpha$, με το οποίο ολοκληρώνεται την απόδειξη. ▫

Πρόταση 3.6.4. *Οι Borel κλάσεις πεπερασμένης τάξης* $\boldsymbol{\Sigma}^0_n$, $\boldsymbol{\Pi}^0_n$ *καθώς και οι προβολικές κλάσεις* $\boldsymbol{\Sigma}^1_n$, $\boldsymbol{\Pi}^1_n$, *όπου* $n \geqslant 1$, *είναι* $2^{\mathbb{N}}$*-παραμετρικοποιήσιμες.*

Απόδειξη. Το συμπέρασμα προκύπτει από τα Λήμματα 3.6.2 και 3.6.3 με επαγωγή στο $n \geqslant 1$. ▫

Η προηγούμενη πρόταση γενικεύεται από τον χώρο του Cantor σε κάθε υπεραριθμήσιμο Πολωνικό χώρο.

Πρόταση 3.6.5. *Για κάθε υπεραριθμήσιμο Πολωνικό χώρο* $\mathcal{Y}$ *οι Borel κλάσεις πεπερασμένης τάξης* $\boldsymbol{\Sigma}^0_n$, $\boldsymbol{\Pi}^0_n$ *καθώς και οι προβολικές κλάσεις* $\boldsymbol{\Sigma}^1_n$, $\boldsymbol{\Pi}^1_n$, *όπου* $n \geqslant 1$, *είναι* $\mathcal{Y}$*-παραμετρικοποιήσιμες.*

Απόδειξη. Παίρνουμε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$. Αρχικά δείχνουμε τον ισχυρισμό για όλες τις κλάσεις πλην της $\boldsymbol{\Sigma}^0_1$. Θεωρούμε ότι η Γ είναι μία από τις υπόλοιπες κλάσεις. Ειδικότερα έχουμε ότι κάθε κλειστό σύνολο ανήκει στην Γ. Από την Πρόταση 3.6.4 υπάρχει ένα σύνολο $G \subseteq 2^{\mathbb{N}} \times \mathcal{X}$ που είναι $2^{\mathbb{N}}$-καθολικό για την $\Gamma(\mathcal{X})$.

Αφού ο $\mathcal{Y}$ είναι υπεραριθμήσιμος, έχουμε από το Πόρισμα 2.4.3 ότι υπάρχει ένας συνεχής μονομορφισμός $\tau : 2^{\mathbb{N}} \rightarrowtail \mathcal{Y}$. Ορίζουμε $H \subseteq \mathcal{Y} \times \mathcal{X}$,

$$(y, x) \in H \iff y \in \tau[2^{\mathbb{N}}] \ \& \ (\tau^{-1}(y), x) \in G.$$

Δείχνουμε ότι το H είναι $\mathcal{Y}$-καθολικό για την οικογένεια $\Gamma(\mathcal{X})$. Το σύνολο $\tau[2^{\mathbb{N}}]$ είναι συνεχής εικόνα συμπαγούς συνόλου. Επομένως, είναι συμπαγές, άρα κλειστό και ειδικότερα μέλος της Γ. Χρησιμοποιώντας ότι η τ^{-1} είναι συνεχής, έχουμε από τις ιδιότητες κλειστότητας της Γ ότι το σύνολο H ανήκει στην Γ.

Παίρνουμε ένα $P \subseteq \mathcal{X}$ που ανήκει στη Γ. Τότε υπάρχει $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$ με $P = G_\alpha$. Θέτουμε $y = \tau(\alpha) \in \mathcal{Y}$, έτσι που $y \in \tau[2^{\mathbb{N}}]$ και $\tau^{-1}(y) = \alpha$. Για κάθε $x \in \mathcal{X}$ έχουμε

$$\begin{aligned} x \in P &\iff x \in G_\alpha \\ &\iff (\alpha, x) \in G \\ &\iff y \in \tau[2^{\mathbb{N}}] \ \& \ (\tau^{-1}(y), x) \in G \\ &\iff (y, x) \in H. \end{aligned}$$

Άρα έχουμε $P = H_y$ και επομένως το H είναι $\mathcal{Y}$-καθολικό για την οικογένεια $\Gamma(\mathcal{X})$.

Για την περίπτωση της $\boldsymbol{\Sigma}^0_1$ χρειάζεται να εξετάσουμε τον ορισμό της τ: με μια προσεκτική ανάγνωση των αποδείξεων του Πορίσματος 2.4.3 και του Θεωρήματος 2.3.12 βλέπουμε ότι ισχύει

$$\{\tau(\alpha)\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_{\alpha|n} \qquad \text{για κάθε } \alpha \in 2^{\mathbb{N}},$$

όπου τα $V_u, u \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$, είναι ανοικτές μπάλες με τις ιδιότητες

$$\begin{cases} \overline{V_{u*(i)}} \subseteq \overline{V_u}, \\ \overline{V_{u*(0)}} \cap \overline{V_{u*(1)}} = \varnothing, \end{cases} \tag{3.8}$$

για κάθε $u \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$.

Θεωρούμε μια βάση $\mathcal{V} = \{W_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ του $\mathcal{X}$ και ορίζουμε $J \subseteq \mathcal{Y} \times \mathcal{X}$ ως εξής:

$$(y, x) \in J \iff \exists u \ \exists n < |u| \ (y \in V_u \ \& \ u(n) = 1 \ \& \ x \in W_n).$$

Δείχνουμε ότι το H είναι $\mathcal{Y}$-καθολικό για την οικογένεια $\boldsymbol{\Sigma}^0_n(\mathcal{X})$. Εύκολα μπορεί να δει κανείς ότι το J είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathcal{Y} \times \mathcal{X}$. Θεωρούμε ένα ανοικτό $P \subseteq \mathcal{X}$, τότε υπάρχει $I \subseteq \mathbb{N}$ με $P = \bigcup_{n \in I} W_n$. Όπως στην απόδειξη του Λήμματος 3.6.2, παίρνουμε το $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$ με $\alpha(n) = 1 \iff n \in I$, και ομοίως με πριν παίρνουμε $y = \tau(\alpha)$.

Ισχυριζόμαστε ότι $P = J_y$. Αν $x \in P$, τότε υπάρχει $n \in I$ με $x \in W_n$. Παίρνουμε $u = \alpha|(n+1)$. Τότε $n < |u|$ και $u(n) = 1$. Αφού $y \in V_{\alpha|(n+1)} = V_u$, έχουμε $(y, x) \in J$, δηλαδή $x \in J_y$. Αυτό δείχνει $P \subseteq J_y$. Αντίστροφα, θεωρούμε $x \in J_y$ και $u, n < |u|$ με $y \in V_u$, $u(n) = 1$ και $x \in W_n$. Παίρνουμε $u' = \alpha'|n$, ειδικότερα έχουμε $|u| = |u'| = n$. Αν είχαμε $u \neq u'$, θα είχαμε από (3.8) ότι $V_u \cap V_{u'} = \emptyset$. Αυτό όμως είναι άτοπο, γιατί $y \in V_u$ και $y = \tau(\alpha) \in V_{\alpha|(n+1)} = V_{u'}$. Άρα έχουμε $u = u'$ και $\alpha(n) = u(n) = 1$, δηλαδή $n \in I$. Επομένως ισχύει $x \in W_n \subseteq P$ και άρα $J_y \subseteq P$.

Το τελευταίο δείχνει ότι $P = J_y$ και η απόδειξη είναι πλήρης. ▫

Το επόμενο λήμμα εφαρμόζει την αρχή «διαγωνοποίησης» του Lebesgue, που αναφέραμε προηγουμένως, και είναι το βασικό εργαλείο για τις γνήσιες συμπεριλήψεις των κλάσεων που μας απασχολούν.

Λήμμα 3.6.6. *Θεωρούμε μια κλάση Γ που είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση, έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και ένα σύνολο $G \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{X}$. Αν το G είναι $\mathcal{X}$-καθολικό για την $\Gamma(\mathcal{X})$, τότε για το σύνολο*

$$A = \{x \in \mathcal{X} \mid (x, x) \notin G\}$$

έχουμε $A \in \mathrm{c}\Gamma(\mathcal{X}) \setminus \Gamma(\mathcal{X})$. Ειδικότερα, ισχύει $\Gamma(\mathcal{X}) \neq \mathrm{c}\Gamma(\mathcal{X})$.

Απόδειξη. Η κλάση $\mathrm{c}\Gamma$ είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση (Άσκηση 3.4.14), και επειδή το G ανήκει στη Γ, έχουμε ότι το σύνολο A ανήκει στη $\mathrm{c}\Gamma$. Αν το A ανήκε στην $\Gamma(\mathcal{X})$, εφόσον το G είναι $\mathcal{X}$-καθολικό για την τελευταία οικογένεια, θα υπήρχε ένα $x_0 \in \mathcal{X}$ με $A = G_{x_0}$. Τότε θα είχαμε

$$\begin{aligned} x_0 \in A &\iff (x_0, x_0) \notin G \quad \text{(από τον ορισμό του } A\text{)} \\ &\iff x_0 \notin G_{x_0} \\ &\iff x_0 \notin A \quad \text{(επειδή } A = G_{x_0}\text{)}, \end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο. Επομένως ισχύει $A \notin \Gamma(\mathcal{X})$. ▫

Θεώρημα 3.6.7 (Lebesgue [14]). *Για κάθε υπεραριθμήσιμο Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ έχουμε*

$$\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n(\mathcal{X}) \neq \utilde{\mathbf{\Pi}}^0_n(\mathcal{X}) \quad \textit{και} \quad \utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n(\mathcal{X}) \neq \utilde{\mathbf{\Pi}}^1_n(\mathcal{X}).$$

Επομένως, οι εγκλεισμοί των Προτάσεων 3.3.3 και 3.4.4 είναι γνήσιοι,

$$\utilde{\mathbf{\Delta}}^0_n(\mathcal{X}) \subsetneq \utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n(\mathcal{X}) \subsetneq \utilde{\mathbf{\Delta}}^0_{n+1}(\mathcal{X}), \qquad \utilde{\mathbf{\Delta}}^1_n(\mathcal{X}) \subsetneq \utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n(\mathcal{X}) \subsetneq \utilde{\mathbf{\Delta}}^1_{n+1}(\mathcal{X}),$$

και

$$\utilde{\mathbf{\Delta}}^0_n(\mathcal{X}) \subsetneq \utilde{\mathbf{\Pi}}^0_n(\mathcal{X}) \subsetneq \utilde{\mathbf{\Delta}}^0_{n+1}(\mathcal{X}), \qquad \utilde{\mathbf{\Delta}}^1_n(\mathcal{X}) \subsetneq \utilde{\mathbf{\Pi}}^1_n(\mathcal{X}) \subsetneq \utilde{\mathbf{\Delta}}^1_{n+1}(\mathcal{X}),$$

για κάθε $n \geqslant 1$. Δείτε το Διάγραμμα 3.

Απόδειξη. Από την Πρόταση 3.6.5 υπάρχει $G \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{X}$, που είναι $\mathcal{X}$-καθολικό για την $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n(\mathcal{X})$. Εφαρμόζουμε το Λήμμα 3.6.6 για $\Gamma = \utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ και γι' αυτό το G. Τότε το σύνολο $H = \{x \in \mathcal{X} \mid (x, x) \notin G\}$ ανήκει στην $\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_n(\mathcal{X})$ και δεν ανήκει στην $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n(\mathcal{X})$. Επομένως έχουμε $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n(\mathcal{X}) \neq \utilde{\mathbf{\Pi}}^0_n(\mathcal{X})$. Η απόδειξη για τις κλάσεις $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n$, $\utilde{\mathbf{\Pi}}^1_n$ είναι όμοια.

Για τους γνήσιους εγκλεισμούς παρατηρούμε ότι η δεύτερη σειρά προκύπτει από την πρώτη σειρά παίρνοντας συμπληρώματα. Για παράδειγμα, αν $A \in \utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n(\mathcal{X}) \setminus \utilde{\mathbf{\Delta}}^0_n(\mathcal{X})$ τότε $\mathrm{c}_{\mathcal{X}} A \in \utilde{\mathbf{\Pi}}^0_n(\mathcal{X})$ και αν είχαμε $\mathrm{c}_{\mathcal{X}} A \in \utilde{\mathbf{\Delta}}^0_n(\mathcal{X})$, θα είχαμε επίσης $A = \mathrm{c}_{\mathcal{X}}(\mathrm{c}_{\mathcal{X}} A) \in \utilde{\mathbf{\Delta}}^0_n(\mathcal{X})$. Καταλήγουμε ότι $\mathrm{c}_{\mathcal{X}} A \in \utilde{\mathbf{\Pi}}^0_n(\mathcal{X}) \setminus \utilde{\mathbf{\Delta}}^0_n(\mathcal{X})$.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & \mathbf{\Sigma}^0_1(\mathcal{X}) & & \mathbf{\Sigma}^0_n(\mathcal{X}) & & & \mathbf{\Sigma}^1_1(\mathcal{X}) & & \mathbf{\Sigma}^1_m(\mathcal{X}) & & \\
\rotatebox{45}{$\subsetneq$} & & & & & \rotatebox{45}{$\subsetneq$} & & & & & \\
\mathbf{\Delta}^0_1(\mathcal{X}) & & \overset{\subsetneq}{\cdots} & & \overset{\subsetneq}{\cdots} & \mathbf{\Delta}^1_1(\mathcal{X}) & & \overset{\subsetneq}{\cdots} & & \overset{\subsetneq}{\cdots} & \\
\rotatebox{-45}{$\subsetneq$} & & & & & \rotatebox{-45}{$\subsetneq$} & & & & & \\
 & \mathbf{\Pi}^0_1(\mathcal{X}) & & \mathbf{\Pi}^0_n(\mathcal{X}) & & & \mathbf{\Pi}^1_1(\mathcal{X}) & & \mathbf{\Pi}^1_m(\mathcal{X}) & &
\end{array}
$$

Διαγραμμα 3. Οι γνήσιοι εγκλεισμοί των ιεραρχιών των Borel (πεπερασμένης τάξης) και των προβολικών υποσυνόλων υπεραριθμήσιμου $\mathcal{X}$.

Επομένως, αρκεί να ασχοληθούμε με την πρώτη σειρά των εγκλεισμών. Ας υποθέσουμε προς άτοπο ότι ένας από τους πρώτους δύο γνήσιους εγκλεισμούς δεν ισχύει. Εφόσον ισχύει $\mathbf{\Delta}^0_n(\mathcal{X}) \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_n(\mathcal{X}) \subseteq \mathbf{\Delta}^0_{n+1}(\mathcal{X})$, θα είχαμε $\mathbf{\Sigma}^0_n(\mathcal{X}) = \mathbf{\Delta}^0_n(\mathcal{X})$ ή $\mathbf{\Sigma}^0_n(\mathcal{X}) = \mathbf{\Delta}^0_{n+1}(\mathcal{X})$. Σε κάθε περίπτωση, η οικογένεια $\mathbf{\Sigma}^0_n(\mathcal{X})$ θα ήταν κλειστή ως προς το συμπλήρωμα $c_{\mathcal{X}}$ ως προς $\mathcal{X}$. Αν λοιπόν $A \in \mathbf{\Pi}^0_n(\mathcal{X})$, τότε $A = c_{\mathcal{X}}B$ για κάποιο $B \in \mathbf{\Sigma}^0_n(\mathcal{X})$, και λόγω της κλειστότητας της $\mathbf{\Sigma}^0_n(\mathcal{X})$ ως προς $c_{\mathcal{X}}$ θα είχαμε $A = c_{\mathcal{X}}B \in \mathbf{\Sigma}^0_n(\mathcal{X})$. Με άλλα λόγια, θα είχαμε $\mathbf{\Pi}^0_n(\mathcal{X}) \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_n(\mathcal{X})$. Επιπλέον, αν $A \in \mathbf{\Sigma}^0_n(\mathcal{X})$ τότε θα είχαμε $c_{\mathcal{X}}A \in \mathbf{\Sigma}^0_n(\mathcal{X})$ και άρα $A = c_{\mathcal{X}}(c_{\mathcal{X}}A) \in \mathbf{\Pi}^0_n(\mathcal{X})$. Δηλαδή θα είχαμε και $\mathbf{\Sigma}^0_n(\mathcal{X}) \subseteq \mathbf{\Pi}^0_n(\mathcal{X})$. Θα καταλήγαμε επομένως ότι $\mathbf{\Pi}^0_n(\mathcal{X}) = \mathbf{\Sigma}^0_n(\mathcal{X})$, πράγμα που έρχεται σε αντίθεση με τα προηγούμενα. Οι υπόλοιποι γνήσιοι εγκλεισμοί αποδεικνύονται όμοια.

Σημείωση. Ο ισχυρισμός $\mathbf{\Sigma}^0_n(\mathcal{X}) \neq \mathbf{\Pi}^0_n(\mathcal{X})$ είναι εύκολα ισοδύναμος με το ότι οι συνολοθεωρητικές διαφορές $\mathbf{\Sigma}^0_n(\mathcal{X}) \setminus \mathbf{\Pi}^0_n(\mathcal{X})$, $\mathbf{\Pi}^0_n(\mathcal{X}) \setminus \mathbf{\Sigma}^0_n(\mathcal{X})$ είναι μη κενές. ▫

Ασκήσεις

Άσκηση 3.6.8. Γιατί είναι αναγκαίο στο Θεώρημα 3.6.7 ο Πολωνικός χώρος $\mathcal{X}$ να είναι υπεραριθμήσιμος;

Άσκηση 3.6.9. Για κάθε υπεραριθμήσιμο Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ ο εγκλεισμός του Πορίσματος 3.4.7 είναι γνήσιος,

$$\mathbf{\Sigma}^0_n(\mathcal{X}) \subsetneq \mathbf{\Delta}^1_1(\mathcal{X}),$$

όπου $n \geqslant 1$.

Άσκηση 3.6.10. Για κάθε υπεραριθμήσιμο Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και κάθε φυσικό $n \geqslant 1$ **δεν υπάρχουν** σύνολα $G \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ και $H \subseteq 2^{\mathbb{N}} \times \mathcal{X}$, έτσι ώστε το G να είναι $\mathcal{X}$-καθολικό για την $\mathbf{\Delta}^0_n(\mathcal{X})$ και το H να είναι $2^{\mathbb{N}}$-καθολικό για την $\mathbf{\Delta}^0_{n+1}(\mathcal{X})$.

Δώστε το παράδειγμα ενός $J \subseteq 2^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}$ που είναι $2^{\mathbb{N}}$-καθολικό για την $\mathbf{\Delta}^0_1(\mathbb{R})$.

Άσκηση 3.6.11. Δείξτε ότι για κάθε υπεραριθμήσιμο Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και κάθε $n \geqslant 1$ έχουμε $\mathbf{\Sigma}^0_n(\mathcal{X}) \neq \mathbf{\Pi}^0_n(\mathcal{X})$ με χρήση $2^{\mathbb{N}}$-καθολικών συνόλων και της Άσκησης 3.3.21.

Άσκηση 3.6.12. Για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και κάθε φυσικό αριθμό $n \geqslant 1$ οι οικογένειες $\mathbf{\Sigma}^i_n(\mathcal{X})$, $\mathbf{\Pi}^i_n(\mathcal{X})$, $\mathbf{\Sigma}^i_n(\mathcal{X})$, $i = 0, 1$, έχουν πληθάριθμο μικρότερο ή ίσο του συνεχούς. (Μπορείτε να επικαλεστείτε το Αξίωμα Επιλογής.)

Συμπεράνετε ότι υπάρχει $A \subseteq \mathcal{N}$ με $A \notin \bigcup_{n \geqslant 1} \mathbf{\Sigma}^1_n(\mathcal{N})$.

Άσκηση 3.6.13. Θεωρούμε μια ακολουθία $(G^n)_{n\geqslant 1}$ υποσυνόλων του $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$, έτσι ώστε για $n \geqslant 1$ το σύνολο G^n είναι $\mathcal{N}$-καθολικό για την $\undertilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n(\mathcal{N})$ (υπάρχουν τέτοια σύνολα από την Πρόταση 3.6.5). Τότε το σύνολο $P \subseteq \mathcal{N}$,

$$\alpha \in P \iff \forall n\ ((\alpha)_n, \alpha) \in G^n$$

δεν είναι προβολικό υποσύνολο του $\mathcal{N}$, δηλαδή $P \notin \bigcup_{n\geqslant 1} \undertilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n(\mathcal{N}) = \bigcup_{n\geqslant 1} \undertilde{\mathbf{\Pi}}^1_n(\mathcal{N})$.

Ειδικότερα, υπάρχει $P \subseteq \mathcal{N}$ που δεν είναι προβολικό σύνολο. (Σημειώνουμε ότι εδώ **δεν** γίνεται χρήση του Αξιώματος Επιλογής.)

3.7. Πληρότητα συνόλου ως προς κλάση

Προηγουμένως είδαμε ότι οι κλάσεις συνόλων που μελετάμε διαφέρουν μεταξύ τους στους υπεραριθμήσιμους Πολωνικούς χώρους και ότι αυτό υλοποιείται από τα καθολικά σύνολα. Εδώ παρουσιάζουμε μια τεχνική που μας επιτρέπει να βρίσκουμε και άλλα παραδείγματα συνόλων που ανήκουν σε μία κλάση Γ χωρίς να ανήκουν στη δυϊκή της $\mathrm{c}\Gamma$ (περιορισμένης στον χώρο που μελετάμε).

Ορισμός 3.7.1. Δίνονται Πολωνικοί χώροι $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ και σύνολα $A \subseteq \mathcal{X}$, $B \subseteq \mathcal{Y}$. Μια συνάρτηση $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ λέγεται **αναγωγή του** A **στο** B αν $A = f^{-1}[B]$, δηλαδή για κάθε $x \in \mathcal{X}$ ισχύει

$$x \in A \iff f(x) \in B.$$

Αν Γ είναι μια κλάση, θα λέμε ότι η f είναι Γ-**αναγωγή** από το A στο B αν είναι αναγωγή από το A στο B και Γ-μετρήσιμη. Αντί $\undertilde{\mathbf{\Sigma}}^0_1$-αναγωγή θα λέμε **συνεχής αναγωγή**, έτσι που συνεχής αναγωγή σημαίνει αναγωγή και συνεχής συνάρτηση. (Υπενθυμίζουμε ότι οι $\undertilde{\mathbf{\Sigma}}^0_1$-μετρήσιμες συναρτήσεις είναι ακριβώς οι συνεχείς.)

Θα λέμε ότι το A **ανάγεται συνεχώς** ή **ανάγεται κατά Wadge** στο B αν υπάρχει συνεχής αναγωγή από το A στο B. Σε αυτή την περίπτωση συμβολίζουμε $A \leqslant_W B$.

Παρατήρηση 3.7.2. Θεωρούμε μια κλάση Γ που είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση, Πολωνικούς χώρους $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$ και σύνολα $B \subseteq \mathcal{Y}$, $C \subseteq \mathcal{Z}$. Αν $C \in \Gamma(\mathcal{Z})$ και $B \leqslant_W C$, τότε $B \in \Gamma(\mathcal{Y})$.

Επομένως, αν $B \notin \Gamma(\mathcal{Y})$ και $B \leqslant_W C$, τότε $C \notin \Gamma(\mathcal{Z})$.

Αυτό είναι εύκολο να το δούμε. Εφόσον $B \leqslant_W C$, υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ με $B = f^{-1}[C]$. Άρα αν $C \in \Gamma(\mathcal{Z})$ έχουμε από την κλειστότητα της Γ ως προς συνεχή αντικατάσταση ότι $B \in \Gamma(\mathcal{Y})$.

Η προηγούμενη παρατήρηση, αν και απλή, αποτελεί ένα χρήσιμο εργαλείο για να διαχωρίζουμε μια κλάση από τη δυϊκή της. Για παράδειγμα, αν θέλουμε να δείξουμε ότι ένα σύνολο $C \subseteq \mathcal{Z}$ δεν είναι $\undertilde{\mathbf{\Pi}}^0_3$, αρκεί να βρούμε ένα σύνολο $B \subseteq \mathcal{Y}$, το οποίο είναι γνωστό ότι δεν είναι $\undertilde{\mathbf{\Pi}}^0_3$, και μια συνεχή συνάρτηση $f : \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ με $B = f^{-1}[C]$. Θα δούμε ότι υπάρχουν τυπικές επιλογές για τέτοια σύνολα B.

Ορισμός 3.7.3. Θεωρούμε μια κλάση Γ, έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{Y}$ και ένα $B \subseteq \mathcal{Y}$. Το B ονομάζεται Γ-**πλήρες** αν ικανοποιεί τις εξής δύο ιδιότητες: α) $B \in \Gamma(\mathcal{Y})$, β) για κάθε μηδενοδιάστατο Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και για κάθε $A \in \Gamma(\mathcal{X})$ έχουμε $A \leqslant_W B$.

Πρόταση 3.7.4. *Αν η Γ είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση και υπάρχει μηδενοδιάστατος Πολωνικός χώρος $\mathcal{X}$ ώστε $\Gamma(\mathcal{X}) \neq \mathrm{c}\Gamma(\mathcal{X})$, τότε για κάθε Γ-πλήρες σύνολο $B \subseteq \mathcal{Y}$ ισχύει $B \notin \mathrm{c}\Gamma(2^{\mathbb{N}})$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε έναν μηδενοδιάστατο Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$, έτσι ώστε $\Gamma(\mathcal{X}) \neq c\Gamma(\mathcal{X})$. Τότε υπάρχει $A \in \Gamma(\mathcal{X})$ με $A \notin c\Gamma(\mathcal{X})$. (Αλλιώς θα είχαμε $\Gamma(\mathcal{X}) \subseteq c\Gamma(\mathcal{X})$, απ' όπου προκύπτει εύκολα ότι $c\Gamma(\mathcal{X}) \subseteq cc\Gamma(\mathcal{X}) = \Gamma(\mathcal{X})$ και άρα $\Gamma(\mathcal{X}) = c\Gamma(\mathcal{X})$.)

Αφού το B είναι Γ-πλήρες υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ με $A = f^{-1}[B]$. Επειδή η Γ είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση, έχουμε ότι και η cΓ ικανοποιεί το ίδιο (Άσκηση 3.4.14). Επομένως, αν το B ανήκε στην $c\Gamma(\mathcal{Y})$, θα είχαμε ότι $A = f^{-1}[B] \in \Gamma(\mathcal{X})$, άτοπο. Άρα $B \notin c\Gamma(\mathcal{Y})$. ▫

Παρατήρηση 3.7.5. (i) Σύμφωνα με την Πρόταση 3.7.4, ένα $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$-πλήρες υποσύνολο ενός Πολωνικού χώρου $\mathcal{Y}$ δεν μπορεί να είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$ υποσύνολο του $\mathcal{Y}$. Προκύπτει ότι τελικά ισχύει και το αντίστροφο: *κάθε* $B \in \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n(\mathcal{Y}) \setminus \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n(\mathcal{Y})$ *είναι* $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$*-πλήρες*. Στην περίπτωση $\mathcal{Y} = \mathcal{N}$, αυτό είναι συνέπεια ενός αποτελέσματος του Wadge, στο οποίο θα αναφερθούμε σε μεταγενέστερο κεφάλαιο. Η γενική περίπτωση προκύπτει από ένα βαθύ αποτέλεσμα των Louveau και Saint Raymont με το οποίο δεν θα ασχοληθούμε στο παρόν σύγγραμμα. Καταλήγουμε λοιπόν ότι ένα $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ υποσύνολο του $\mathcal{Y}$ είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$-πλήρες αν και μόνο αν δεν ανήκει στην $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n(\mathcal{Y})$.

Στη συνέχεια θα συνεχίσουμε να αναφερόμαστε στην έννοια της $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$-πληρότητας και θα αποδεικνύουμε τις ιδιότητες σχετικές με αυτήν, χωρίς τη χρήση του πιο πάνω χαρακτηρισμού.

(ii) Στον ορισμό της Γ-πληρότητας είναι σημαντικό ο $\mathcal{X}$ να είναι μηδενοδιάστατος Πολωνικός χώρος, γιατί όπως έχουμε δει προηγουμένως, κάθε συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathcal{N}$ είναι σταθερή (Άσκηση 2.6.16). Άρα, για οποιοδήποτε $B \subseteq \mathcal{N}$ το $f^{-1}[B]$ θα είναι είτε το κενό σύνολο είτε όλος ο $\mathbb{R}$. Επομένως, αν υπάρχει $A \in \Gamma(\mathbb{R})$ με $A \neq \emptyset, \mathbb{R}$ (κάτι που συμβαίνει σε όλες τις κλάσεις που μελετάμε), θα έχουμε $A \not\leqslant_W B$ για κάθε $B \subseteq \mathcal{N}$.

Συνεπώς, αν στον πιο πάνω ορισμό αφαιρούσαμε τον περιορισμό ο $\mathcal{X}$ να είναι μηδενοδιάστατος, δεν θα υπήρχε $B \subseteq \mathcal{N}$ που να τον ικανοποιεί, δεδομένου ότι η Γ δεν είναι τετριμμένη στα υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

(iii) Στην περίπτωση όπου η Γ είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση για να επαληθεύσουμε την Γ-πληρότητα αρκεί να περιοριστούμε στους χώρους $\mathcal{X}$ που είναι κλειστά υποσύνολα του χώρου του Baire $\mathcal{N}$. Αυτό συμβαίνει γιατί κάθε μηδενοδιάστατος Πολωνικός χώρος είναι τοπολογικά ισομορφικός με ένα κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{N}$ (Θεώρημα 2.6.10).

Θα δείξουμε ότι όλες οι κλάσεις $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$, $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ (καθώς και οι δυϊκές τους) έχουν πλήρη σύνολα ως προς αυτές (Πρόταση 3.7.9). Αυτό γίνεται με τη βοήθεια των καθολικών συνόλων. Στην περίπτωση των $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$, θα δώσουμε κάποια επιπλέον παραδείγματα $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$-πλήρων συνόλων για $n \geqslant 2$, τα οποία παρουσιάζουν το δικό τους ενδιαφέρον.

Λήμμα 3.7.6. *Θεωρούμε μια κλάση* Γ *και ένα σύνολο* $B \subseteq \mathcal{Y}$*, όπου* $\mathcal{Y}$ *Πολωνικός χώρος. Αν το* B *είναι* Γ*-πλήρες, τότε για κάθε Πολωνικό χώρο* $\mathcal{Z}$ *και κάθε* $C \in \Gamma(\mathcal{Z})$ *με* $B \leqslant_W C$ *το* C *είναι* Γ*-πλήρες.*

Απόδειξη. Θεωρούμε έναν μηδενοδιάστατο Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και $A \in \Gamma(\mathcal{X})$. Τότε υπάρχει συνεχής $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ με $A = f^{-1}[B]$. Επιπλέον, από την υπόθεση υπάρχει συνεχής συνάρτηση $g : \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ έτσι ώστε $B = g^{-1}[C]$. Επομένως, $A = f^{-1}[g^{-1}[C]] = (g \circ f)^{-1}[C]$ και αφού η $g \circ f$ είναι συνεχής, έχουμε $A \leqslant_W C$. Αφού $C \in \Gamma(\mathcal{Z})$, προκύπτει ότι το C είναι Γ-πλήρες. ▫

Το επόμενο Λήμμα μας επιτρέπει να μεταφέρουμε την έννοια της Γ-πληρότητας στις κλάσεις cΓ και $\bigvee_{\mathbb{N}} \Gamma$.

Λήμμα 3.7.7. *Θεωρούμε μια κλάση* Γ, *έναν Πολωνικό χώρο* $\mathcal{Y}$ *και ένα* Γ-*πλήρες σύνολο* $B \subseteq \mathcal{Y}$. *Ισχύουν τα εξής.*

(i) *Το* $\mathcal{Y} \setminus B = c_{\mathcal{Y}} B$ *είναι* $c\Gamma$-*πλήρες.*

(ii) *Το σύνολο*

$$C = \{(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{Y}^{\mathbb{N}} \mid \exists n\ y_n \in B\}$$

είναι $\bigvee_{\mathbb{N}} \Gamma$-*πλήρες.*

Απόδειξη. Για το (i) έχουμε προφανώς $c_{\mathcal{Y}} B \in c\Gamma(\mathcal{Y})$. Επιπλέον, για κάθε μηδενοδιάστατο Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και κάθε $A' \in c\Gamma(\mathcal{X})$ το σύνολο $A = c_{\mathcal{X}} A'$ ανήκει στην οικογένεια $\Gamma(\mathcal{X})$. Αφού το B είναι Γ-πλήρες, υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ με

$$x \in A \iff f(x) \in B \quad \text{και άρα} \quad x \notin A \iff f(x) \notin B,$$

για κάθε $x \in \mathcal{X}$. Από την τελευταία ισοδυναμία, έχουμε ότι $A' = c_{\mathcal{X}} A \leqslant_W c_{\mathcal{Y}} B$. Άρα, το $c_{\mathcal{Y}} B$ είναι $c\Gamma$-πλήρες.

Σχετικά με το C, θεωρούμε, όπως πριν, έναν μηδενοδιάστατο Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και ένα $A \subseteq \mathcal{X}$, το που ανήκει στην κλάση $\bigvee_{\mathbb{N}} \Gamma$. Τότε $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, όπου $A_n \in \Gamma(\mathcal{X})$. Επειδή το B είναι Γ-πλήρες, υπάρχει για κάθε $n \in \mathbb{N}$ συνεχής συνάρτηση $f_n : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ έτσι ώστε

$$x \in A_n \iff f_n(x) \in B$$

για κάθε $x \in A_n$. Ορίζουμε

$$f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}^{\mathbb{N}} : f(x) = (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}.$$

Προφανώς, η f είναι συνεχής συνάρτηση και επιπλέον για κάθε $x \in \mathcal{X}$ έχουμε

$$\begin{aligned} x \in A &\iff x \in \textstyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \\ &\iff \exists n\ x \in A_n \\ &\iff \exists n\ f_n(x) \in B \\ &\iff (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \in C \\ &\iff f(x) \in C. \end{aligned}$$

Άρα το C είναι Γ-πλήρες. □

Είναι σαφές από τα προηγούμενα ότι η έννοια της Γ-πληρότητας είναι άμεσα συνυφασμένη με την ιδιότητα $\Gamma \neq c\Gamma$, η οποία, όπως έχουμε δει, επαληθεύεται από τα καθολικά σύνολα. Υπογραμμίζουμε αυτή τη διασύνδεση με το ακόλουθο αποτέλεσμα, το οποίο με τη σειρά του θα μας επιτρέψει να συμπεράνουμε την ύπαρξη $\utilde{\Sigma}^0_n$- και $\utilde{\Sigma}^1_n$-πλήρων συνόλων.

Λήμμα 3.7.8 (Κριτήριο ύπαρξης Γ-πλήρους συνόλου). *Θεωρούμε μια κλάση* Γ, *η οποία είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση, και για κάθε κλειστό* $F \subseteq \mathcal{N}$ *ισχύει*

$$\Gamma(F) = \{P \cap F \mid P \in \Gamma(\mathcal{N})\}.$$

Αν υπάρχει $G \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ *που είναι* $2^{\mathbb{N}}$-*καθολικό ή* $\mathcal{N}$-*καθολικό για την οικογένεια* $\Gamma(\mathcal{N})$, *τότε υπάρχει σύνολο* $B \subseteq \mathcal{N}$, *το οποίο είναι* Γ-*πλήρες.*

Απόδειξη. Πριν κατασκευάσουμε το B ας θεωρήσουμε ένα κλειστό $F \subseteq \mathcal{N}$ και ένα $A \in \Gamma(F)$. Σύμφωνα με την υπόθεσή μας, υπάρχει $P \in \Gamma(\mathcal{N})$, έτσι ώστε $A = P \cap F$. Επειδή το G είναι $2^{\mathbb{N}}$-καθολικό ή $\mathcal{N}$-καθολικό για την οικογένεια $\Gamma(\mathcal{N})$, υπάρχει $\varepsilon \in \mathcal{N}$ με $P = G_\varepsilon$. Επομένως, για όλα τα $\alpha \in F$ έχουμε

$$\alpha \in A \iff \alpha \in P \iff \alpha \in G_\varepsilon \iff (\varepsilon, \alpha) \in G.$$

Η συνεχής αναγωγή που θα πάρουμε είναι στην ουσία η $\alpha \mapsto (\varepsilon, \alpha)$. Απλά για να παραμείνουμε σε υποσύνολα του $\mathcal{N}$, θεωρούμε τον τοπολογικό ισομορφισμό

$$\tau : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \to \mathcal{N} : \tau(\varepsilon, \alpha) = (\varepsilon(0), \alpha(0), \varepsilon(1), \alpha(1), \dots, \varepsilon(n), \alpha(n), \dots)$$

Συμβολίζουμε με $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ την αντίστροφη της τ, έτσι που $\sigma_1(\tau(\varepsilon, \alpha)) = \varepsilon$ και $\sigma_2(\tau(\varepsilon, \alpha)) = \alpha$, όπου $\varepsilon, \alpha \in \mathcal{N}$. Οι συναρτήσεις σ_1, σ_2 είναι συνεχείς.

Τέλος ορίζουμε το $B \subseteq \mathcal{N}$,

$$\beta \in B \iff (\sigma_1(\beta), \sigma_2(\beta)) \in G, \quad \beta \in \mathcal{N},$$

έτσι που

$$\tau(\varepsilon, \alpha) \in B \iff (\varepsilon, \alpha) \in G, \quad \varepsilon, \alpha \in \mathcal{N}.$$

Από την κλειστότητα της Γ ως προς συνεχή αντικατάσταση έχουμε ότι το B ανήκει στη Γ. Σύμφωνα με τα προηγούμενα, έχουμε ότι για κάθε $A \in \Gamma(F)$ υπάρχει $\varepsilon \in \mathcal{N}$ με

$$\alpha \in A \iff (\varepsilon, \alpha) \in G \iff \tau(\varepsilon, \alpha) \in B \iff f_\varepsilon(\alpha) \in B$$

για κάθε $\alpha \in F$, όπου $f_\varepsilon : F \to \mathcal{N} : f_\varepsilon(\alpha) = \tau(\varepsilon, \alpha)$. Προφανώς η f_ε είναι συνεχής.

Αυτό δείχνει ότι $A \leqslant_W B$ για κάθε $A \in \Gamma(F)$ και κάθε κλειστό $F \subseteq \mathcal{N}$. Από το (iii) της Παρατήρησης 3.7.5 έχουμε το ζητούμενο. □

Πρόταση 3.7.9. *Υπάρχουν $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^i_n$-πλήρη και $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^i_n$-πλήρη υποσύνολα του $\mathcal{N}$, όπου $n \geqslant 1$ και $i = 0, 1$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε ότι η Γ είναι μία από τις κλάσεις $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^i_n$, $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^i_n$, $i = 0, 1$, $n \geqslant 1$. Από τις Ασκήσεις 3.3.21 και 3.4.15, η Γ-ικανοποιεί ότι $\Gamma(F) = \{P \cap F \mid P \in \Gamma(\mathcal{N})\}$ για κάθε κλειστό $F \subseteq \mathcal{N}$. Επιπλέον, από την Πρόταση 3.6.5 (ύπαρξη καθολικών συνόλων για τη $\Gamma(\mathcal{N})$) και την κλειστότητα της Γ ως προς συνεχή αντικατάσταση, βλέπουμε ότι ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Λήμματος 3.7.8. Επομένως, από το τελευταίο λήμμα έχουμε ότι υπάρχει $B \subseteq \mathcal{N}$, που είναι Γ-πλήρες. □

Στη συνέχεια δίνουμε επιπλέον παραδείγματα $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$-πλήρων συνόλων για $n \geqslant 2$.

Λήμμα 3.7.10. *Το σύνολο $P \subseteq 2^{\mathbb{N}}$,*

$$\alpha \in P \iff \exists s \, \forall t \geqslant s \; \alpha(t) = 0, \quad \alpha \in 2^{\mathbb{N}}$$

είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_2$-πλήρες.

Απόδειξη. Προφανώς, το P είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_2$ σύνολο. Από το (iii) της Παρατήρησης 3.7.5 αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε κλειστό $F \subseteq \mathcal{N}$ και κάθε $A \in \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_2(F)$ υπάρχει συνεχής συνάρτηση $g : F \to 2^{\mathbb{N}}$, έτσι ώστε $A = g^{-1}[P]$. Θεωρούμε λοιπόν τέτοια σύνολα $A \subseteq F \subseteq \mathcal{N}$. Από την Άσκηση 3.3.21, το A είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_2$ υποσύνολο του $\mathcal{N}$. Έχουμε λοιπόν $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i$, όπου κάθε F_i είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{N}$. Από την Πρόταση 2.5.2, για κάθε $i \in \mathbb{N}$ υπάρχει ένα δένδρο T_i στο $\mathbb{N}$ με $F_i = [T_i]$.

Θα κατασκευάσουμε μια κατάλληλη μονότονη συνάρτηση $\varphi : \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \to \{0, 1\}^{<\mathbb{N}}$, έτσι ώστε η επαγώμενη συνάρτηση $\varphi^* : \mathcal{N} \to 2^{\mathbb{N}}$ (δείτε τον Ορισμό 2.5.9) να ικανοποιεί

$$\exists \; i \; \beta \in [T_i] \iff \varphi^*(\beta) \in P \tag{3.9}$$

για κάθε $\beta \in \mathcal{N}$. Τότε η $g = \varphi^* | F : F \to 2^{\mathbb{N}}$ ικανοποιεί $A = g^{-1}[P]$. Επιπλέον, από την Πρόταση 2.5.10 έχουμε ότι η φ^* είναι συνεχής, επομένως και η g είναι συνεχής.

Συνεχίζουμε με την κατασκευή της φ. Αρχικά δίνουμε μια σύντομη περιγραφή και μετά τον αυστηρό ορισμό. Δοσμένου $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με $|u| > 0$ ελέγχουμε ένα-ένα τα αρχικά τμήματα $(u(0)), (u(0), u(1)), \dots, u$ αν ανήκουν στο δένδρο T_0. Για όσο έχουμε $u|n \in T_0$, επισυνάπτουμε κάθε φορά τον αριθμό 0. Την πρώτη φορά που θα έχουμε $u|n \notin T_0$ (εφόσον αυτή συμβαίνει), επισυνάπτουμε τον αριθμό 1 και συνεχίζουμε ελέγχοντας ένα-ένα τα αρχικά τμήματα της u αν ανήκουν στο T_1 ξεκινώντας από το αμέσως επόμενο του $u|n$. (Στην περίπτωση όπου $(u(0)) \notin T_0$ ξεκινάμε την $\varphi(u)$ κατευθείαν από το 1 και στο επόμενο βήμα ελέγχουμε αν το $(u(0), u(1))$ ανήκει στο T_1 - στον αντίποδα όπου $u \in T_0$ η $\varphi(u)$ είναι ίση με $(0, 0, \dots, 0)$ όπου τα 0 είναι $|u|$ το πλήθος.) Με αυτόν, τον τρόπο διαμορφώνουμε την τιμή $\varphi(u)$.

Για παράδειγμα, παίρνουμε $u = (3, 6, 2, 9, 5, 7, 8)$ και ας υποθέσουμε ότι έχουμε $(3, 6) \in T_0$, $(3, 6, 2) \notin T_0$, $(3, 6, 2, 9) \in T_1$, $(3, 6, 2, 9, 5) \notin T_1$, $(3, 6, 2, 9, 5, 7) \notin T_2$, $(3, 6, 2, 9, 5, 7, 8) \in T_3$. Τότε

$$\begin{aligned}
\varphi(u) = {} & (0, 0) && (\text{γιατί } (3), (3, 6) \in T_0) \\
& * (1) && (\text{γιατί } (3, 6, 2) \notin T_0) \\
& * (0) && (\text{γιατί } (3, 6, 2, 9) \in T_1) \\
& * (1) && (\text{γιατί } (3, 6, 2, 9, 5) \notin T_1) \\
& * (1) && (\text{γιατί } (3, 6, 2, 9, 5, 7) \notin T_2) \\
& * (0) && (\text{γιατί } (3, 6, 2, 9, 5, 7, 8) \in T_3) \\
= {} & (0, 0, 1, 0, 1, 1, 0).
\end{aligned}$$

Αυστηρά για κάθε μη κενή $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με $u \notin T_0$ υπάρχει ακριβώς μία πεπερασμένη ακολουθία $(n_0^u, \dots, n_{m_u}^u)$ με $0 < n_0^u < \cdots < n_{m_u}^u \leqslant |u|$ έτσι ώστε

- $u|n_k^u \notin T_k$ για κάθε $k \leqslant m_u$,
- $u|n \in T_0$ για κάθε $n < n_0^u$,
- $u|n \in T_{k+1}$ για κάθε $n_k^u < n < n_{k+1}^u$ και $k + 1 \leqslant m_u$,
  (μπορεί $n_{k+1}^u = n_k^u + 1$ οπότε σε αυτή την περίπτωση δεν υπάρχει τέτοιο n)
- είτε $n_{m_u}^u = |u|$ είτε $n_{m_u}^u < |u|$ και $u|n \in T_{m_u+1}$ για κάθε $n_{m_u}^u < n < |u|$.

Αν $u \in T_0$, τότε παίρνουμε $m_u = 0$ και $n_0^u = n_0$, έτσι που $(n_0^u, \dots, n_{m_u}^u) = (n_0^u)$ και $u|n \in T_0$ για κάθε $n < n_0^u$ (έχουμε δηλαδή μόνο τη δεύτερη από τις πιο πάνω συνθήκες).

Για κάθε $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με $u \notin T_0$ ορίζουμε

$$\varphi(u) = (0)^{(n_0^u)} * (1) * (0)^{(n_1^u - n_0^u - 1)} * (1) * \ldots * (0)^{(|u| - n_{m_u} - 1)}.$$

(Υπενθυμίζουμε ότι με $(0)^{(-1)}$ εννοούμε την κενή ακολουθία.) Αν $u \in T_0$, ορίζουμε $\varphi(u) = u$, ειδικότερα $\varphi(\Lambda) = \Lambda$.

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι $|\varphi(u)| = |u|$ και πως όταν επεκτείνουμε την u τότε επεκτείνουμε και την $\varphi(u)$. Επομένως η φ είναι κατάλληλη μονότονη. Δείχνουμε ότι η φ^* ικανοποιεί την (3.9) για κάθε $\beta \in \mathcal{N}$.

Θεωρούμε $\beta \in \mathcal{N}$ με $\beta \in [T_i]$ για κάποιο $i \in \mathbb{N}$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, έτσι ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$ να ισχύει $\beta|n \in T_i$. Επομένως $\varphi(\beta|n) = \varphi(\beta|n_0) * (0)^{(n-n_0-1)}$ για κάθε $n \geqslant n_0$ και άρα η $\varphi^*(\beta)$ είναι τελικά μηδενική ακολουθία.

Αντίστροφα, αν για κάποιο $\beta \in \mathcal{N}$ έχουμε $\beta \notin \bigcup_{i \in \mathbb{N}} [T_i]$ τότε ορίζουμε με αναδρομή

$$n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} \mid \beta|n \notin T_0\} \qquad n_{k+1} = \min\{n > n_k \mid \beta|n \notin T_k\}$$

όπου $k \in \mathbb{N}$. Τότε $n_0 < n_1 < \cdots < n_k < \ldots$ και

$$\varphi^*(\beta) = (0)^{(n_0-1)} * (1) * (0)^{(n_1-n_0+1)} * (1) * \ldots * (0)^{(n_k-n_{k-1}-1)} * (1) * \ldots.$$

Επομένως το $\varphi^*(\beta)$ έχει άπειρες μονάδες.

$\square$

Πρόταση 3.7.11. *Θεωρούμε τα θεμελιώδη $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ σύνολα $P_n \subseteq \{0,1\}^{\mathbb{N}^{n-1}}$, $n \geqslant 2$ του Ορισμού 3.3.10,*

$$\alpha \in P_2 \iff \exists i\ \forall j \geqslant i\ \alpha(j) = 0, \quad \alpha \in 2^{\mathbb{N}}$$
$$x \in P_{n+1} \iff \exists i\ x_{[i]} \notin P_n, \quad x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}^n},$$

όπου $x_{[i]} : \mathbb{N}^{n-1} \to \{0,1\} : x_{[i]}(t) = x(i,t)$.

Για κάθε $n \geqslant 2$ το σύνολο P_n είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$-πλήρες.

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή στο $n \geqslant 2$. Η βάση της επαγωγής $n = 2$ αποδείχθηκε στο Λήμμα 3.7.10. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \geqslant 2$ το σύνολο P_n είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$-πλήρες και δείχνουμε ότι το P_{n+1} είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+1}$-πλήρες.

Θέτουμε $Q_n = \{0,1\}^{\mathbb{N}^{n-1}} \setminus P_n$ έτσι που

$$x \in P_{n+1} \iff \exists i\ x_{[i]} \in Q_n,$$

για κάθε $x : \{0,1\}^{\mathbb{N}^n} \to \{0,1\}$.

Από το Λήμμα 3.7.7, το Q_n είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$-πλήρες και το σύνολο $\tilde{P}_{n+1} \subseteq \left(\{0,1\}^{\mathbb{N}^{n-1}}\right)^{\mathbb{N}}$ που ορίζεται ως εξής:

$$(y_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \tilde{P}_{n+1} \iff \exists i\ y_i \in Q_n$$

είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+1}$-πλήρες.

Υπάρχει μια προφανής ταύτιση μεταξύ όλων των ακολουθιών $(y_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \left(\{0,1\}^{\mathbb{N}^{n-1}}\right)^{\mathbb{N}}$ με τα στοιχεία του $\{0,1\}^{\mathbb{N}^n}$. Συγκεκριμένα, σε κάθε $\overline{y} = (y_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \left(\{0,1\}^{\mathbb{N}^{n-1}}\right)^{\mathbb{N}}$ αντιστοιχούμε το $\tau(\overline{y}) : \mathbb{N}^n \to \{0,1\}$ που ικανοποιεί

$$\tau(\overline{y})(i,t) = y_i(t) \qquad \text{για κάθε } (i,t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{n-1}.$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η $\tau : \left(\{0,1\}^{\mathbb{N}^{n-1}}\right)^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}^n}$ είναι τοπολογικός ισομορφισμός. Επιπλέον ισχύει $\tau(\overline{y})_{[i]} = y_i$ για κάθε $\overline{y} = (y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ και κάθε i. Επομένως

$$\begin{aligned}
\overline{y} = (y_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \tilde{P}_{n+1} &\iff \exists i\ y_i \in Q_n \\
&\iff \exists i\ \tau(\overline{y})_{[i]} \in Q_n \\
&\iff \tau(\overline{y}) \in P_{n+1}.
\end{aligned}$$

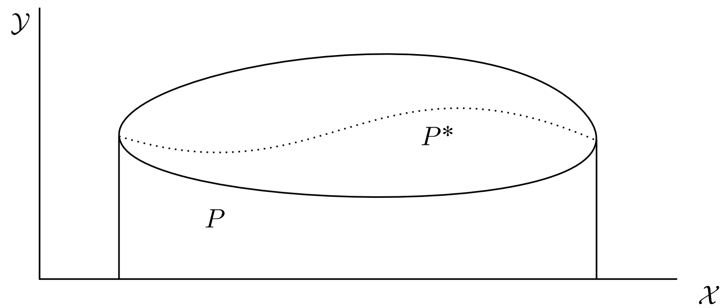
Άρα $P_{n+1} = \tau[\tilde{P}_{n+1}]$. Επειδή η τ είναι τοπολογικός ισομορφισμός και το $\tilde{P}_{n+1}$ είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+1}$-πλήρες, έχουμε ότι και το P_{n+1} είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+1}$-πλήρες. Αυτό ολοκληρώνει το Επαγωγικό Βήμα. $\square$

Ασκήσεις

Άσκηση 3.7.12. Δείξτε ότι η συνεχής αναγωγή στον ορισμό της ιδιότητας της $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_2$-πληρότητας δεν είναι απαραίτητα ένα-προς-ένα.

3.8. Ενοποίηση, Αναγωγή και Διαχωρισμός

Εδώ ασχολούμαστε με τρεις αλληλένδετες δομικές ιδιότητες των κλάσεων συνόλων.



Διαγραμμα 4. Ενοποίηση του P από το P^*

Ορισμός 3.8.1. Δίνονται δύο Πολωνικοί χώροι $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ και σύνολα $P, P^* \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Το σύνολο P^* είναι **ενοποίηση** (uniformization) του P αν $P^* \subseteq P$ και για κάθε $x \in \mathcal{X}$: αν υπάρχει $y \in \mathcal{Y}$ με $(x, y) \in P$ τότε υπάρχει μοναδικό $y \in \mathcal{Y}$ με $(x, y) \in P^*$.

Με άλλα λόγια, το P^* είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\exists^{\mathcal{Y}} P$ και που σε κάθε $x \in \exists^{\mathcal{Y}} P$ έχουμε $(x, f(x)) \in P$. Δείτε το Διάγραμμα 4.

Από το Αξίωμα Επιλογής κάθε υποσύνολο P του $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ έχει μια ενοποίηση. Σκοπός μας είναι να υποθέσουμε ότι το P ανήκει σε μια κλάση Γ και να κατασκευάσουμε μια ενοποίηση P^* *με βάση τις δομικές ιδιότητες* της Γ (και χωρίς τη χρήση του Αξιώματος Επιλογής). Ακριβώς λόγω του κατασκευαστικού χαρακτήρα μιας τέτοιας ενοποίησης προκύπτει ότι το P^* ανήκει είτε σε μια κλάση που είναι «παραπλήσια» της Γ είτε στην ίδια τη Γ.

Αναφέρουμε μερικά χαρακτηριστικά αποτελέσματα, κάποια από τα οποία θα αποδείξουμε σε μεταγενέστερα κεφάλαια.

- Κάθε $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_1$ σύνολο έχει μια ενοποίηση που είναι επίσης $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_1$ σύνολο. Μάλιστα ισχύει το ίδιο και για την κλάση $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_2$ στη θέση της $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_1$ (Θεώρημα Kondo).
- Κάθε $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_1$ σύνολο έχει μια ενοποίηση που ανήκει στην ελάχιστη σ-άλγεβρα που περιέχει τα $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_1$ σύνολα. (Σχετικά με την έννοια της ελάχιστης σ-άλγεβρας δείτε τον Ορισμό 4.1.1 καθώς και τα σχόλια που ακολουθούν τον Ορισμό 4.1.2.)
- Το πρόβλημα της ενοποίησης $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ και $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n$ συνόλων για $n \geqslant 3$ είναι ανεξάρτητο από τα αξιώματα της συνολοθεωρίας. Έχει όμως μια κομψή λύση με ένα πρόσθετο αξίωμα που σχετίζεται με τη Θεωρία Παιγνίων ([**33**, 6C.5]).
- Υπάρχει ένα κλειστό $F \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ που δεν έχει ενοποίηση από ένα $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^1_1$ σύνολο. Επομένως δεν είναι σωστό ότι τα $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^1_1$ σύνολα έχουν $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^1_1$ ενοποίηση, ούτε ότι τα τα $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ σύνολα έχουν $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ ενοποίηση. **Αλλά**:
- Τα $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^1_1$ σύνολα $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ που ικανοποιούν ότι κάθε τομή P_x είναι αριθμήσιμο σύνολο έχουν $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^1_1$ ενοποίηση.
- Ισχύει το ίδιο με το προηγούμενο αποτέλεσμα, όταν κάθε τομή P_x αντί για αριθμήσιμο σύνολο ικανοποιεί άλλες ιδιότητες, όπως να α) είναι συμπαγές ή β) είναι μη ισχνό ή γ) έχει θετικό μέτρο.

Στην περίπτωση όπου έχουμε $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$, υπάρχει ένας φυσιολογικός τρόπος να κατασκευαστεί μια ενοποίηση: σε κάθε $x \in \exists^{\mathbb{N}} P$ επιλέγουμε το ελάχιστο n με $(x, n) \in P$. Με μια βελτίωση αυτής της ιδέας παίρνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πρόταση 3.8.2. *Για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και κάθε $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ σύνολο $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ όπου $n \geqslant 2$, υπάρχει $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ σύνολο $P^* \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ που είναι ενοποίηση του P.*

Απόδειξη. Επειδή $n \geqslant 2$ έχουμε $P = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Q_i$, όπου κάθε Q_i είναι $\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_{n-1}$ υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathbb{N}$. Τότε για κάθε $x \in \exists^{\mathbb{N}} P$ υπάρχουν $k, i \in \mathbb{N}$ με $(x, k) \in Q_i$. Η ιδέα είναι να επιλέξουμε το «ελάχιστο» τέτοιο ζεύγος (k, i), το οποίο θα είναι αναγκαστικά μοναδικό. Για να το κάνουμε αυτό, θεωρούμε μια ένα-προς-ένα συνάρτηση $\pi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrowtail \mathbb{N}$, για παράδειγμα την $\pi = ((k, i) \mapsto \langle k, i \rangle)$, όπου $\langle \cdot \rangle$ είναι η γνωστή συνάρτηση κωδικοποίησης (2.7). Θεωρούμε και τις αντίστροφες συναρτήσεις, για τη συγκεκριμένη επιλογή της π αν $m = \langle k, i \rangle$ τότε $k = (s)_0$ και $i = (s)_1$.

Ορίζουμε το $Q \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$,

$$(x, m) \in Q \iff (x, (m)_0) \in Q_{(m)_1} \ \& \ \forall m' < m \ ((x, (m')_0) \notin Q_{(m')_1}).$$

Με άλλα λόγια, έχουμε $(x, m) \in Q$ αν και μόνο αν το m είναι ο ελάχιστος φυσικός με την ιδιότητα $(x, (m)_0) \in Q_{(m)_1}$.

Έπειτα ορίζουμε το $P^* \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$,

$$(x, k) \in P^* \iff \exists i \ (x, \langle k, i \rangle) \in Q.$$

Η βασική παρατήρηση είναι ότι για κάθε $x \in \mathcal{X}$ υπάρχει το πολύ ένα ζεύγος (k, i) με $(x, \langle k, i \rangle) \in Q$ και επομένως υπάρχει το πολύ ένα k με $(x, k) \in P^*$ – αυτά είναι άμεσα από τους ορισμούς πιο πάνω.

Το Q είναι $\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_{n-1}$ σύνολο με χρήση του Λήμματος 3.3.6 και των ιδιοτήτων κλειστότητας της τελευταίας κλάσης. Επομένως, το P^* είναι $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathbb{N}$.

Δείχνουμε ότι το P^* είναι ενοποίηση του P. Πρώτα παρατηρούμε ότι αν έχουμε $(x, k) \in P^*$ τότε για κάποιο i έχουμε $(x, \langle k, i \rangle) \in Q$, που συνεπάγεται ότι $(x, k) \in Q_i \subseteq P$, άρα $P^* \subseteq P$.

Στη συνέχεια, θεωρούμε ένα $x \in \exists^{\mathbb{N}} P$. Όπως αναφέραμε πιο πάνω, υπάρχει το πολύ ένα k με $(x, k) \in P^*$, επομένως αρκεί να δείξουμε την ύπαρξη ενός τέτοιου k. Εφόσον $x \in \exists^{\mathbb{N}} P$, υπάρχουν k', i' με $(x, k') \in Q_{i'}$. Τότε παίρνουμε για m ως το ελάχιστο του μη κενού συνόλου $\{m' \in \mathbb{N} \mid (x, (m')_0) \in Q_{(m')_1}\}$, έτσι που $(x, m) \in Q$. Ειδικότερα υπάρχει i συγκεκριμένα το $(m)_1$, για το οποίο ισχύει $(x, (m)_0, i) \in Q$. (Παρατηρήστε ότι δεν χρειάζεται να υποθέσουμε ότι $m = \langle (m)_0, (m)_1 \rangle$, μας αρκεί απλώς ότι για τον αριθμό $N = \langle (m)_0, (m)_1 \rangle$ ισχύει $(m)_0 = (N)_0$ και $(m)_1 = (N)_1$). Εφόσον λοιπόν υπάρχει i με $(x, \langle (m)_0, i \rangle) \in Q$, έχουμε ειδικότερα ότι $(x, (m)_0) \in P^*$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

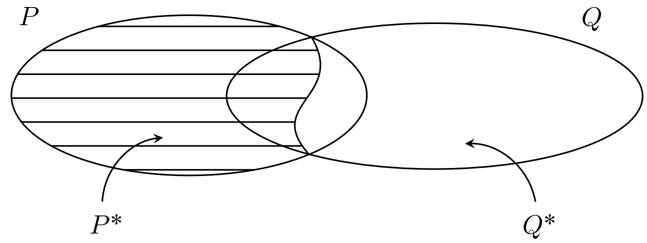
Συνεχίζουμε με την επόμενη έννοια.

Ορισμός 3.8.3. Δίνεται ένας Πολωνικός χώρος $\mathcal{X}$ και σύνολα $P, Q, P^*, Q^* \subseteq \mathcal{X}$. Λέμε ότι το ζεύγος (P^*, Q^*) **ανάγει** (reduces) το ζεύγος (P, Q) ή ότι το (P^*, Q^*) είναι **αναγωγή** του (P, Q) αν ισχύουν τα εξής:

$$P^* \subseteq P, \quad Q^* \subseteq Q$$
$$P^* \cup Q^* = P \cup Q, \quad P^* \cap Q^* = \varnothing.$$

Δείτε το Διάγραμμα 5.

Είναι σαφές ότι κάθε ζεύγος (P, Q) έχει μια αναγωγή (P^*, Q^*), συγκεκριμένα τη $(P \setminus Q, Q)$. Όπως και με την έννοια της ενοποίησης, μας ενδιαφέρει να κατασκευάσουμε αναγωγές (P^*, Q^*) με βάση τις δομικές ιδιότητες μιας κλάσης Γ στην οποία ανήκουν τα δοσμένα σύνολα P, Q. Σχετικά με αυτό, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.



Διαγραμμα 5. Το ζεύγος (P^*, Q^*) ανάγει το ζεύγος (P, Q)

Πρόταση 3.8.4. *Υποθέτουμε ότι έχουμε μια κλάση Γ που είναι κλειστή ως προς $\vee$, & και συνεχή αντικατάσταση, και έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$. Αν κάθε $R \in \Gamma(\mathcal{X} \times \mathbb{N})$ έχει μια ενοποίηση $R^* \in \Gamma(\mathcal{X} \times \mathbb{N})$, τότε κάθε ζεύγος συνόλων (P, Q) με $P, Q \in \Gamma(\mathcal{X})$ έχει μια αναγωγή (P^*, Q^*) με $Q^*, Q^* \in \Gamma(\mathcal{X})$.*

Ειδικότερα, για κάθε $n \geqslant 2$ κάθε ζεύγος (P, Q) από $\undertilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ υποσύνολα του $\mathcal{X}$ έχει μια αναγωγή (P^*, Q^*) από $\undertilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ υποσύνολα του $\mathcal{X}$.

Απόδειξη. Ο δεύτερος ισχυρισμός είναι άμεση συνέπεια του πρώτου με βάση την Πρόταση 3.8.2, παίρνοντας $\Gamma = \undertilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$. Για να δείξουμε τον πρώτο ισχυρισμό θεωρούμε δύο υποσύνολα P, Q του $\mathcal{X}$ που ανήκουν στη Γ και ορίζουμε το $R \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ ως εξής:

$$(x, k) \in R \iff (x \in P \ \& \ k = 0) \ \vee \ (x \in Q \ \& \ k = 1).$$

Από τις ιδιότητες κλειστότητας της Γ έχουμε ότι $R \in \Gamma(\mathcal{X} \times \mathbb{N})$. Από την υπόθεσή μας υπάρχει $R^* \in \Gamma(\mathcal{X} \times \mathbb{N})$ που είναι ενοποίηση του R. Ορίζουμε τα $P^*, Q^* \subseteq \mathcal{X}$ ως εξής:

$$x \in P^* \iff (x, 0) \in R^* \quad \text{και} \quad x \in Q^* \iff (x, 1) \in R^*.$$

Τότε τα P^* και Q^* ανήκουν στη Γ και προκύπτει άμεσα από τους ορισμούς ότι $P^* \subseteq P$, καθώς και $Q^* \subseteq Q$. Επειδή για κάθε x υπάρχει το πολύ ένα k με $(x, k) \in R^*$, είναι επίσης άμεσο ότι τα P^*, Q^* είναι ξένα.

Τέλος, για να δείξουμε ότι $P^* \cup Q^* = P \cup Q$, θεωρούμε $x \in P \cup Q$ και αρκεί να δείξουμε ότι $x \in P^* \cup Q^*$. Αν $x \in P$ τότε $(x, 0) \in R$ και αν $x \in Q$ τότε $(x, 1) \in R$. Σε κάθε περίπτωση έχουμε ότι $x \in \exists^{\mathbb{N}} R$. Από τον ορισμό της ενοποίησης υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ με $(x, k) \in R^*$. Επειδή $R^* \subseteq R$, έχουμε $k = 0$ ή $k = 1$. Αν $k = 0$, έχουμε $x \in P^*$ και αν $k = 1$, έχουμε $x \in Q^*$. ▫

Στη συνέχεια αναφερόμαστε στην ιδιότητα του Διαχωρισμού.

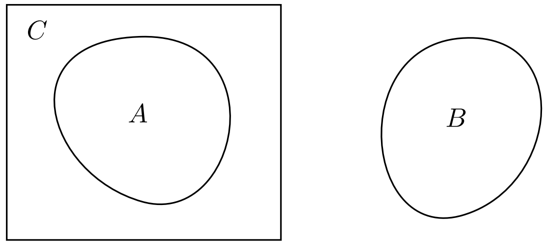
Ορισμός 3.8.5. Θεωρούμε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και σύνολα $A, B \subseteq \mathcal{X}$ με $A \cap B = \varnothing$. Ένα σύνολο $C \subseteq \mathcal{X}$ **διαχωρίζει** το A από το B αν $A \subseteq C$ και $C \cap B = \varnothing$. Δείτε το Διάγραμμα 6.

Παρατηρούμε ότι αν το C διαχωρίζει το A από το B τότε το $\mathcal{X} \setminus C$ διαχωρίζει το B από το A. Ένας προφανής διαχωρισμός του A από το B είναι το $C = A$. Ως συνήθως, μας ενδιαφέρει ο διαχωρισμός να γίνεται με βάση μια δοσμένη κλάση Γ.

Ένα τέτοιο αποτέλεσμα είναι γνωστό από την τοπολογία: αν έχουμε δύο ξένα κλειστά F_1, F_2 υποσύνολα ενός μετρικού χώρου (X, d), τότε υπάρχει ανοικτό σύνολο U που διαχωρίζει το F_1 από το F_2. Η κατασκευή ενός τέτοιου U είναι σχετικά απλή. Στη μη τετριμμένη περίπτωση όπου $F_1, F_2 \neq \varnothing$ ορίζουμε

$$U = \{x \in X \mid d(x, F_1) < d(x, F_2)\}.$$

Τότε το U είναι d-ανοικτό υποσύνολο του X λόγω της συνέχειας της συνάρτησης $(x \mapsto d(x, A))$, όπου το A είναι μη κενό υποσύνολο του X. Επιπλέον, αν



Διαγραμμα 6. Το C διαχωρίζει το A από το B

$x \in F_1$, τότε $x \notin F_2$ και επειδή το F_2 είναι κλειστό έχουμε $d(x, F_2) > 0 = d(x, F_1)$. Αυτό δείχνει ότι $F_1 \subseteq U$. Αν υπήρχε $x \in F_2 \cap U$, τότε $d(x, F_1) < d(x, F_2) = 0$ που είναι άτοπο, άρα $F_2 \cap U = \varnothing$.

Στην περίπτωση των μηδενοδιάστατων Πολωνικών χώρων $\mathcal{X}$, τα προηγούμενα ξένα κλειστά F_1, F_2 μπορούν να διαχωριστούν από ένα κλειστό-ανοικτό σύνολο (Άσκηση 3.8.9).

Το επόμενο αποτέλεσμα μας επιτρέπει να επεκτείνουμε αυτόν τον διαχωρισμό από την κλάση $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_1$ των κλειστών συνόλων στις κλάσεις $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$ για $n \geqslant 2$, και μάλιστα με το ισχυρότερο συμπέρασμα όπου το σύνολο διαχωρισμού ανήκει στην $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^0_n$ χωρίς την υπόθεση ο χώρος να είναι μηδενοδιάστατος.

Πρόταση 3.8.6. *Θεωρούμε μια κλάση Γ, έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και δύο ξένα $A, B \subseteq \mathcal{X}$ που ανήκουν στη Γ. Αν το ζεύγος των συμπληρωμάτων $(\mathrm{c}_{\mathcal{X}}A, \mathrm{c}_{\mathcal{X}}B)$ έχει αναγωγή από ζεύγος υποσυνόλων του $\mathcal{X}$ που ανήκουν στη $\mathrm{c}\Gamma$, τότε υπάρχει $C \subseteq \mathcal{X}$ που διαχωρίζει το A από το B, το οποίο ανήκει στην κλάση $\Gamma \cap \mathrm{c}\Gamma$.*

Ειδικότερα για κάθε $n \geqslant 2$ αν έχουμε δύο ξένα $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$ σύνολα $A, B \subseteq \mathcal{X}$ τότε υπάρχει ένα $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^0_n$ σύνολο $C \subseteq \mathcal{X}$ που διαχωρίζει το A από το B.

Απόδειξη. Θεωρούμε μια αναγωγή (A^*_c, B^*_c) του $(\mathrm{c}_{\mathcal{X}}A, \mathrm{c}_{\mathcal{X}}B)$ από σύνολα της $\mathrm{c}\Gamma$ και θέτουμε $C = \mathrm{c}_{\mathcal{X}}A^*_c$. Αφού $A^*_c \subseteq \mathrm{c}_{\mathcal{X}}A$, έχουμε ότι $A \subseteq \mathrm{c}_{\mathcal{X}}A^*_c = C$. Δείχνουμε ότι $C \cap B = \varnothing$. Σε διαφορετική περίπτωση, θα υπήρχε $x \in C \cap B$, ειδικότερα θα είχαμε $x \notin A$, δηλαδή $x \in \mathrm{c}_{\mathcal{X}}A \subseteq \mathrm{c}_{\mathcal{X}}A \cup \mathrm{c}_{\mathcal{X}}B = A^*_c \cup B^*_c$. Αν $x \in A^*_c$, τότε έχουμε άτοπο γιατί $x \in C = \mathrm{c}_{\mathcal{X}}A^*_c$. Αν $x \in B^*_c$, τότε έχουμε πάλι άτοπο γιατί $B^*_c \subseteq \mathrm{c}_{\mathcal{X}}B$ και $x \in B$. Επομένως $C \cap B = \varnothing$.

Απομένει να δείξουμε ότι το C ανήκει στις κλάσεις Γ και $\mathrm{c}\Gamma$. Εφόσον το A^*_c ανήκει στη $\mathrm{c}\Gamma$, είναι σαφές ότι το $C = \mathrm{c}_{\mathcal{X}}A^*_c$ ανήκει στη Γ. Στη συνέχεια δείχνουμε ότι $C = B^*_c$ απ' όπου προκύπτει ότι το C ανήκει στη $\mathrm{c}\Gamma$. Αν το $x \in C$, εφόσον $C \cap B = \varnothing$, έχουμε

$$x \in \mathrm{c}_{\mathcal{X}}B \subseteq \mathrm{c}_{\mathcal{X}}A \cup \mathrm{c}_{\mathcal{X}}B = A^*_c \cup B^*_c.$$

Επειδή $x \in C = \mathrm{c}_{\mathcal{X}}A^*_c$, έχουμε ότι $x \in B^*_c$. Δηλαδή έχουμε ότι $C \subseteq B^*_c$. Αντίστροφα, θεωρούμε $x \in B^*_c$, εφόσον $A^*_c \cap B^*_c = \varnothing$, έχουμε $x \notin A^*_c$, δηλαδή $x \in \mathrm{c}_{\mathcal{X}}A^*_c = C$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του πρώτου ισχυρισμού της πρότασης.

Για τον δεύτερο ισχυρισμό θεωρούμε ότι τα A, B είναι ξένα $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$ υποσύνολα του $\mathcal{X}$ για κάποιο $n \geqslant 2$. Εφαρμόζουμε τον πρώτο ισχυρισμό παίρνοντας για κλάση την $\Gamma = \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$. Από την Πρόταση 3.8.4, το ζεύγος $(\mathrm{c}_{\mathcal{X}}A, \mathrm{c}_{\mathcal{X}}B)$ από $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ υποσύνολα του $\mathcal{X}$ έχει μια αναγωγή από σύνολα που ανήκουν στη $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n = \mathrm{c}\Gamma$. Επομένως υπάρχει ένα C που διαχωρίζει το A από το B, το οποίο ανήκει στην κλάση $\Gamma \cap \mathrm{c}\Gamma = \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n \cap \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n = \underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^0_n$. □

Παρατήρηση 3.8.7. Στην περίπτωση των μηδενοδιάστατων Πολωνικών χώρων ισχύουν όλα τα προηγούμενα συμπεράσματα για $n = 1$ (Άσκηση 3.8.8).

Αυτό δίνει ειδικότερα μια δεύτερη απόδειξη του αποτελέσματος ότι δύο ξένα κλειστά υποσύνολα ενός μηδενοδιάστατου Πολωνικού χώρου διαχωρίζονται από ένα κλειστό-ανοικτό σύνολο.

Ασκήσεις

Άσκηση 3.8.8. Δίνεται ένας μηδενοδιάστατος Πολωνικός χώρος $\mathcal{X}$. Τότε για κάθε ανοικτό σύνολο $U \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ υπάρχει ανοικτό σύνολο $U^* \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ που είναι ενοποίηση του U.

Συμπεράνετε ότι κάθε ζεύγος (U, W) ανοικτών υποσυνόλων του $\mathcal{X}$ έχει μια αναγωγή (U^*, W^*) από ανοικτά υποσύνολα του $\mathcal{X}$ και πως για κάθε ζεύγος (F_1, F_2) κλειστών και ξένων υποσυνόλων του $\mathcal{X}$ υπάρχει ένα κλειστό-ανοικτό σύνολο C που διαχωρίζει το F_1 από το F_2.

Άσκηση 3.8.9. Δίνεται ένας μηδενοδιάστατος Πολωνικός χώρος $\mathcal{X}$ και δύο ξένα κλειστά $F_1, F_2 \subseteq \mathcal{X}$. Δείξτε ότι υπάρχει ένα κλειστό-ανοικτό $C \subseteq \mathcal{X}$ που διαχωρίζει το F_1 από το F_2 χωρίς την επίκληση της Πρότασης 3.8.6.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Borel σύνολα

Σύνοψη:
- Borel σύνολα - ορισμός και θεμελιώδεις ιδιότητες.
- Το Θεώρημα του Borel-ισομορφισμού.
- Μονομορφισμοί και Borel σύνολα.
- Οι κλάσεις Borel συνόλων υπερπεπερασμένης τάξης.

Προαπαιτούμενη γνώση:
- Πολωνικοί χώροι με έμφαση στις ιδιότητες των χώρων του Baire και Cantor από το Κεφάλαιο 2.
- Οι τελεστές από το Κεφάλαιο 3.
- Υπερπεπερασμένη Επαγωγή (μόνο για την τελευταία ενότητα).
- Επιθυμητή η εξοικείωση με την έννοια της σ-άλγεβρας.

4.1. Θεμελιώδεις ιδιότητες

Η έννοια του Borel συνόλου ορίστηκε από τον Lebesgue [**14**] σε βήματα με χρήση της υπερπεπερασμένης αναδρομής. Όπως παρατηρήθηκε τα Borel σύνολα μπορούν να χαρακτηριστούν με την έννοια της σ-άλγεβρας. Ο τελευταίος είναι ένας ευρέως διαδεδομένος ορισμός και μπορεί κανείς να τον βρει σε ένα καλό σύγγραμμα θεωρίας μέτρου. Ένα άλλο σύγγραμμα αναφοράς που επικεντρώνεται στην περιγραφική θεωρία συνόλων και στα Borel σύνολα είναι το [**41**].

Ορισμός 4.1.1. Θεωρούμε ένα μη κενό σύνολο X και μια οικογένεια $\mathcal{A}$ υποσυνόλων του X. Η $\mathcal{A}$ είναι σ-**άλγεβρα** στο X αν ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) Τα σύνολα $\varnothing$, X ανήκουν στην $\mathcal{A}$.
(ii) Αν $A \in \mathcal{A}$, τότε $X \setminus A \in \mathcal{A}$.
(iii) Αν $A_n \in \mathcal{A}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Επεκτείνουμε κατά τον προφανή τρόπο την έννοια της κλειστότητας ως προς συνολοθεωρητικό τελεστή στις οικογένειες υποσυνόλων συγκεκριμένου X, δηλαδή σε οικογένειες που δεν είναι απαραίτητα κλάσεις. Για παράδειγμα, η ιδιότητα (ii) σημαίνει ότι η $\mathcal{A}$ **είναι κλειστή ως προς τα συμπληρώματα** στον X και η (iii) ότι η $\mathcal{A}$ **είναι κλειστή ως προς τις αριθμήσιμες ενώσεις** υποσυνόλων του X.

Επομένως, μια οικογένεια $\mathcal{A}$ υποσυνόλων του X είναι σ-άλγεβρα στο X, όταν περιέχει τα σύνολα $\varnothing, X$ και είναι κλειστή ως προς τα συμπληρώματα στο X, καθώς και ως προς τις αριθμήσιμες ενώσεις υποσυνόλων του X.

Μερικά τετριμμένα παραδείγματα σ-αλγεβρών στο X είναι το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(X)$ και το $\{\varnothing, X\}$.

Όπως είναι γνωστό, αν έχουμε ένα μη κενό σύνολο $\mathcal{F}$ από σ-άλγεβρες στο ίδιο σύνολο X, τότε η τομή

$$\bigcap \mathcal{F} = \{A \subseteq X \mid \forall \mathcal{A} \in \mathcal{F} \ A \in \mathcal{A}\}$$

είναι επίσης σ-άλγεβρα στο X.

Ορισμός 4.1.2. Θεωρούμε έναν μετρικό χώρο X και το σύνολο $\mathcal{F}$ όλων των σ-αλγεβρών στο X που περιέχουν τα ανοικτά υποσύνολα του X, δηλαδή

$$\mathcal{F} = \{\mathcal{A} \mid \text{η } \mathcal{A} \text{ είναι } \sigma\text{-άλγεβρα στο } X \text{ και για κάθε ανοικτό } V \subseteq X \text{ έχουμε } V \in \mathcal{A}\}$$

Παρατηρούμε ότι $\mathcal{P}(X) \in \mathcal{F}$ και συνεπώς $\mathcal{F} \neq \varnothing$. Η σ-άλγεβρα $\mathcal{B}(X)$ των **Borel υποσυνόλων του** X είναι η οικογένεια

$$\mathcal{B}(X) = \bigcap \mathcal{F}.$$

Ένα υποσύνολο του X ονομάζεται **Borel** αν ανήκει στη σ-άλγεβρα $\mathcal{B}(X)$.

Είναι σαφές από τα προηγούμενα ότι η οικογένεια $\mathcal{B}(X)$ έχει τις εξής ιδιότητες:

(1) Η $\mathcal{B}(X)$ είναι σ-άλγεβρα και κάθε ανοικτό υποσύνολο του X περιέχεται στην $\mathcal{B}(X)$, δηλαδή η $\mathcal{B}(X)$ είναι στοιχείο της πιο πάνω $\mathcal{F}$.
(2) Αν $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα στο $\mathcal{X}$ που περιέχει όλα τα ανοικτά υποσύνολα του X, τότε $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{A}$.

Με άλλα λόγια, η $\mathcal{B}(X)$ είναι *η ελάχιστη σ-άλγεβρα στο X που περιέχει τα ανοικτά σύνολα*. Συμβολίζουμε με $\mathcal{B}$ την **κλάση** όλων των Borel συνόλων σε *μετρικούς* χώρους.

Μερικά *παραδείγματα Borel συνόλων* είναι όλα τα ανοικτά σύνολα και τα συμπληρώματά τους, δηλαδή τα κλειστά σύνολα. Τα F_σ σύνολα είναι επίσης Borel ως αριθμήσιμη ένωση Borel συνόλων και τα G_δ είναι ως συμπληρώματα F_σ συνόλων, τα οποία είναι Borel.

Πρόταση 4.1.3. *Για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και κάθε $n \geqslant 1$ ισχύει*

$$\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{X}),$$

δηλαδή κάθε $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ υποσύνολο του $\mathcal{X}$ είναι και Borel υποσύνολο του $\mathcal{X}$.

Απόδειξη. Με επαγωγή στο $n \geqslant 1$. □

Ο ορισμός των Borel συνόλων μας υπαγορεύει μια **θεμελιώδη μέθοδο** για να αποδεικνύουμε ιδιότητες των Borel συνόλων. Συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να δείξουμε μια πρόταση της μορφής

για κάθε Borel σύνολο $B \subseteq \mathcal{X}$ ισχύει η ιδιότητα Q.

Τότε θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathcal{X} \mid \text{το } A \text{ έχει την ιδιότητα } Q\}.$$

Αν δείξουμε ότι το $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα που περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathcal{X}$, τότε θα έχουμε $\mathcal{B}(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{A}$, και επομένως θα έχουμε αποδείξει την πιο πάνω πρόταση. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα εφαρμογής αυτής της μεθόδου είναι το επόμενο αποτέλεσμα.

Λήμμα 4.1.4. *Η κλάση των Borel συνόλων είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση.*

Απόδειξη. Θεωρούμε μετρικούς χώρους X, Y, και μια συνεχή συνάρτηση $f : X \to Y$. Θα δείξουμε ότι για κάθε Borel $A \subseteq Y$ το σύνολο $f^{-1}[A]$ είναι Borel υποσύνολο του X. Θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq Y \mid f^{-1}[A] \in \mathcal{B}(X)\}$$

και δείχνουμε ότι είναι σ-άλγεβρα που περιέχει όλα τα ανοικτά υποσύνολα του Y. Εφόσον η $\mathcal{B}(X)$ είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα που περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του Y, προκύπτει από το προηγούμενο ότι $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{A}$, που είναι και το ζητούμενο.

Θεωρούμε ένα ανοικτό $V \subseteq Y$. Αφού η f είναι συνεχής συνάρτηση, η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}[V]$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X, και συνεπώς είναι Borel σύνολο. Άρα $V \in \mathcal{A}$ και η $\mathcal{A}$ περιέχει όλα τα ανοικτά υποσύνολα του X.

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι $\varnothing, Y \in \mathcal{A}$ γιατί τα σύνολα $\varnothing, Y$ είναι ανοικτά. Αν $A \in \mathcal{A}$, τότε

$$f^{-1}[Y \setminus A] = X \setminus f^{-1}[A] \in \mathcal{B}(X)$$

όπου πιο πάνω χρησιμοποιήσαμε ότι $f^{-1}[A] \in \mathcal{B}(X)$ και ότι η οικογένεια των Borel υποσυνόλων του X είναι κλειστή ως προς τα συμπληρώματα στο X. ◻

Η κλάση των Borel συνόλων ικανοποιεί και αυτή την ιδιότητα (3.3) της Πρότασης 3.2.8.

Λήμμα 4.1.5 ([**34**] - 1F.7). *Θεωρούμε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$, έναν φυσικό $n \geqslant 1$ και μια ακολουθία $(B_s)_{s\in\mathbb{N}}$ από Borel υποσύνολα του $\mathcal{X}$. Τότε το σύνολο*

$$B = \{(x, s) \in \mathcal{X} \times \mathbb{N} \mid x \in B_s\}$$

είναι Borel.

Αντίστροφα, για κάθε Borel $C \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ και κάθε $s \in \mathbb{N}$ το σύνολο

$$C_s = \{x \in \mathcal{X} \mid (x, s) \in C\}$$

είναι επίσης Borel.

Απόδειξη. Όμοια με την απόδειξη του Λήμματος 3.3.6 και της Παρατήρησης 3.3.5. Εδώ χρησιμοποιούμε ότι η κλάση των Borel συνόλων είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες ενώσεις και αριθμήσιμες (ειδικότερα πεπερασμένες) τομές υποσυνόλων του ίδιου χώρου και ως προς συνεχή αντικατάσταση. ◻

Θεώρημα 4.1.6 (Οι Θεμελιώδεις Ιδιότητες Κλειστότητας της κλάσης των Borel συνόλων). *Η κλάση $\mathcal{B}$ των Borel συνόλων είναι κλειστή*

(i) *ως προς συνεχή αντικατάσταση,*

(ii) *ως προς τους τελεστές $\vee$, &, $\exists^{\leqslant}$, $\forall^{\leqslant}$, $\bigvee_{\leqslant}$, $\bigwedge_{\leqslant}$, c_X, όπου X είναι μετρικός χώρος, και*

(iii) *ως προς τους τελεστές $\bigvee_{\mathbb{N}}$, $\exists^{\mathbb{N}}$, $\exists^{Y}$, $\bigwedge_{\mathbb{N}}$, $\forall^{\mathbb{N}}$, $\forall^{Y}$, όπου Y είναι **αριθμήσιμος** Πολωνικός χώρος.*

Απόδειξη. Η κλειστότητα ως προς συνεχή αντικατάσταση είναι το Λήμμα 4.1.4. Η κλειστότητα ως προς $\vee$ και $\bigvee_{\leqslant}$ είναι άμεση από την κλειστότητα ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$. Ομοίως η κλειστότητα ως προς & και $\bigwedge_{\leqslant}$ είναι άμεση από την κλειστότητα ως προς $\bigwedge_{\mathbb{N}}$.

Οι κλειστότητες ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$ και c_X είναι σαφείς γιατί για κάθε μετρικό χώρο X η $\mathcal{B}(X)$ είναι σ-άλγεβρα. Για την κλειστότητα ως προς $\bigwedge_{\mathbb{N}}$ θεωρούμε έναν μετρικό χώρο X και μια ακολουθία $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Borel υποσυνόλων του X. Παρατηρούμε ότι

$$X \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X \setminus A_n \in \mathcal{B}(X)$$

όπου πιο πάνω χρησιμοποιήσαμε ότι $A_n \in \mathcal{B}(X)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και ότι η $\mathcal{B}(X)$ είναι σ-άλγεβρα. Αφού $X \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B}(X)$, έχουμε και ότι $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B}(X)$.

Αφού η $\mathcal{B}$ είναι κλειστή ως προς τους τελεστές $\bigvee_{\mathbb{N}}$, $\bigvee_{\leqslant}$, $\bigwedge_{\mathbb{N}}$, και $\bigwedge_{\leqslant}$, προκύπτει από το Λήμμα 4.4.5, το Πόρισμα 3.2.9 και την Πρόταση 3.2.10 ότι η $\mathcal{B}$ είναι επίσης κλειστή ως προς τους τελεστές $\exists^{\mathbb{N}}$, $\exists^{\leqslant}$, $\forall^{\mathbb{N}}$, και $\forall^{\leqslant}$, (αντίστοιχο της Άσκησης 3.4.12).

Τέλος, θεωρούμε έναν αριθμήσιμο Πολωνικό χώρο Y, μια απαρίθμηση $f : \mathbb{N} \twoheadrightarrow Y$ και ένα Borel $B \subseteq \mathcal{X} \times Y$, όπου $\mathcal{X}$ Πολωνικός χώρος. Τότε για κάθε $x \in \mathcal{X}$,

$$\begin{aligned} x \in \exists^Y B &\iff \exists y \in Y \ (x, y) \in B \\ &\iff \exists n \ (x, f(n)) \in B \end{aligned}$$

και ομοίως

$$x \in \forall^Y B \iff \forall n \ (x, f(n)) \in B.$$

Αφού η f είναι συνεχής και η $\mathcal{B}$ είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση και τους τελεστές $\exists^{\mathbb{N}}$, $\forall^{\mathbb{N}}$, προκύπτει από τις προηγούμενες ισοδυναμίες ότι τα σύνολοα $\exists^Y B, \forall^Y B$ ανήκουν στη $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. ▫

Πόρισμα 4.1.7. *Για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ έχουμε*

$$\mathcal{B}(\mathcal{X}) \subseteq \underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}{}^1_1(\mathcal{X}).$$

Επομένως, κάθε Borel σύνολο είναι προβολικό σύνολο.

Όπως θα δούμε στη συνέχεια (Θεώρημα του Suslin 5.2.2), ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή ότι $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}{}^1_1(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{X})$. Επομένως, *τα Borel υποσύνολα του $\mathcal{X}$ είναι ακριβώς τα αναλυτικά σύνολα με αναλυτικό συμπλήρωμα.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 3.4.6 (και την απόδειξη της Πρότασης 3.3.3) η οικογένεια $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}{}^1_1(\mathcal{X})$ είναι σ-άλγεβρα που περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathcal{X}$. ▫

Πρόταση 4.1.8. *Αν X είναι μετρικός χώρος και το Y είναι ένα μη κενό υποσύνολο του X, τότε ένα $A \subseteq Y$ είναι Borel στον μετρικό χώρο Y αν και μόνο αν είναι της μορφής $B \cap Y$, όπου το B είναι Borel στον X. Δηλαδή*

$$\mathcal{B}(Y) = \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}(X)\}.$$

Ειδικότερα, αν το Y είναι Borel υποσύνολο του X και το $A \subseteq Y$ είναι Borel στον Y, τότε το A είναι Borel στον X.

Απόδειξη. Για ευκολία θέτουμε προσωρινά

$$\mathcal{B}^*(Y) = \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}(X)\}.$$

Δείχνουμε αρχικά ότι $\mathcal{B}(Y) \subseteq \mathcal{B}^*(Y)$. Αρκεί να δείξουμε ότι η οικογένεια $\mathcal{B}^*(Y)$ είναι σ-άλγεβρα στο Y που περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του Y.

Έστω $V \subseteq Y$ ανοικτό στο Y. Τότε, όπως είναι γνωστό, υπάρχει $U \subseteq X$ που είναι ανοικτό στο X, ώστε $V = U \cap Y$. Τότε, $U \in \mathcal{B}(X)$ και άρα $V \in \mathcal{B}^*(Y)$, δηλαδή η τελευταία οικογένεια περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του Y.

Ειδικότερα, έχουμε $\varnothing, Y \in \mathcal{B}^*(Y)$, γιατί τα σύνολα $\varnothing, Y$ είναι ανοικτά. Για τις άλλες δύο ιδιότητες παρατηρούμε ότι

$$Y \setminus (B \cap Y) = (X \setminus B) \cap Y \tag{4.1}$$

$$\textstyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (B_n \cap Y) = \Big(\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\Big) \cap Y. \tag{4.2}$$

Επομένως, αν $A = B \cap Y \in \mathcal{B}^*(Y)$, όπου $B \in \mathcal{B}(X)$, τότε $X \setminus B \in \mathcal{B}(X)$ και με χρήση της (4.1)

$$Y \setminus A = Y \setminus (B \cap Y) = (X \setminus B) \cap Y \in \mathcal{B}(Y).$$

Με χρήση της (4.2) δείχνει όμοια κανείς ότι η $\mathcal{B}^*(Y)$ είναι κλειστή ως προς τις αριθμήσιμες ενώσεις υποσυνόλων του Y. Προκύπτει ότι η $\mathcal{B}^*(Y)$ είναι σ-άλγεβρα στο Y που περιέχει όλα τα ανοικτά υποσύνολα του Y.

Για να δείξουμε τον εγκλεισμό $\mathcal{B}^*(Y) \subseteq \mathcal{B}(Y)$ θεωρούμε την οικογένεια υποσυνόλων του $\mathcal{X}$,

$$\mathcal{A} = \{B \subseteq X \mid B \cap Y \in \mathcal{B}(Y)\}.$$

Αν δείξουμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα στο X που περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του X, τότε θα έχουμε $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{A}$ και συνεπώς για κάθε $B \in \mathcal{B}(X)$ θα ισχύει $B \cap Y \mathcal{B}(Y)$, δηλαδή $\mathcal{B}^*(Y) \subseteq \mathcal{B}(Y)$.

Για να δείξουμε ότι η πιο πάνω $\mathcal{A}$ περιέχει τα ανοικτά σύνολα, θεωρούμε $V \subseteq X$ ανοικτό. Τότε το $V \cap Y$ είναι ανοικτό στο Y και ειδικότερα $V \cap Y \in \mathcal{B}(Y)$. Προκύπτει ότι $V \in \mathcal{A}$.

Όπως προηγουμένως, προκύπτει επίσης ότι $\emptyset, X \in \mathcal{A}$. Αν $B \in \mathcal{A}$, τότε από την (4.1),

$$(X \setminus B) \cap Y = Y \setminus (B \cap Y) \in \mathcal{B}(Y),$$

όπου πιο πάνω χρησιμοποιήσαμε ότι $B \cap Y \in \mathcal{B}(Y)$. Προκύπτει ότι $X \setminus B \in \mathcal{A}$.

Ομοίως με χρήση της (4.2) δείχνει κανείς ότι η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή ως προς τις αριθμήσιμες ενώσεις υποσυνόλων του X.

Καταλήγουμε ότι $\mathcal{B}(Y) = \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}(X)\}$. Τέλος, αν το Y είναι Borel υποσύνολο του X και το A είναι Borel υποσύνολο του Y, τότε $A = B \cap Y$ για κάποιο $B \in \mathcal{B}(X)$. Άρα, το A είναι Borel υποσύνολο του X από την κλειστότητα της $\mathcal{B}(X)$ ως προς &. □

Ασκήσεις

Η έννοια της σ-άλγεβρας επιδέχεται διάφορους χαρακτηρισμούς. Δίνουμε έναν από τους πιο χρήσιμους.

Άσκηση 4.1.9. Για κάθε μη κενό σύνολο X και κάθε οικογένεια $\mathcal{A}$ υποσυνόλων του X τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(1) Η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα.
(2) Η $\mathcal{A}$ περιέχει τα σύνολα $\emptyset, X$, είναι κλειστή ως προς το συμπλήρωμα στο X και ως προς τις αριθμήσιμες τομές.

Άσκηση 4.1.10 (Χαρακτηρισμοί οικογένειας Borel συνόλων). Για κάθε μετρικό χώρο X και κάθε οικογένεια $\mathcal{A}$ από υποσύνολα του X τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(1) Η $\mathcal{A}$ είναι η οικογένεια των Borel υποσυνόλων του X.
(2) Η $\mathcal{A}$ είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα στο X, που περιέχει τα κλειστά υποσύνολα του X.
(3) Η $\mathcal{A}$ είναι η ελάχιστη οικογένεια από υποσύνολα του X που περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του X και είναι κλειστή ως προς τις αριθμήσιμες ενώσεις, καθώς και τις αριθμήσιμες τομές.
(4) Η $\mathcal{A}$ είναι η ελάχιστη οικογένεια από υποσύνολα του X που περιέχει τα κλειστά υποσύνολα του X και είναι κλειστή ως προς τις αριθμήσιμες ενώσεις, καθώς και τις αριθμήσιμες τομές.

Άσκηση 4.1.11 (Αντίστοιχη της Άσκησης 3.6.13 για τις κλάσεις $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$). Για κάθε $n \geqslant 1$ θεωρούμε ένα σύνολο $G^n \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ που είναι $\mathcal{N}$-καθολικό για την $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n(\mathcal{N})$, το οποίο υπάρχει από την Πρόταση 3.6.5. Τότε το σύνολο $P \subseteq \mathcal{N}$, που ορίζεται ως εξής:

$$\alpha \in P \iff \forall n \; ((\alpha)_n, \alpha) \in G^n,$$

είναι Borel υποσύνολο του $\mathcal{N}$ αλλά δεν ανήκει στη $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n(\mathcal{N})$ για κάθε $n \geqslant 1$.

4.2. Το Θεώρημα του Borel-ισομορφισμού

Σκοπός μας εδώ είναι να δείξουμε ότι κάθε υπεραριθμήσιμος Πολωνικός χώρος έχει την ίδια Borel δομή με τον χώρο του Baire.

Ορισμός 4.2.1. Θεωρούμε μετρικούς χώρους X και Y. Μια συνάρτηση $f : X \to Y$ είναι **Borel-μετρήσιμη** αν αντιστρέφει τα ανοικτά υποσύνολα του Y σε Borel υποσύνολα του X, δηλαδή για κάθε ανοικτό $U \subseteq Y$ έχουμε $f^{-1}[U] \in \mathcal{B}(X)$.

Με άλλα λόγια, η Borel-μετρησιμότητα είναι Γ-μετρησιμότητα του Ορισμού 3.5.1, όπου $\Gamma = \mathcal{B} =$ η κλάση των Borel συνόλων. Απλά εδώ έχουμε μετρικούς χώρους αντί για Πολωνικούς.

Προφανώς κάθε συνεχής συνάρτηση $f : X \to Y$ είναι Borel-μετρήσιμη, γιατί για κάθε ανοικτό $U \subseteq Y$ το σύνολο $f^{-1}[U]$ είναι ανοικτό και συνεπώς Borel.

Θα λέμε ότι μια κλάση Γ είναι **κλειστή ως προς Borel αντικατάσταση** αν για κάθε Borel-μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, όπου $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ είναι Πολωνικοί χώροι, και για κάθε $A \in \Gamma(\mathcal{Y})$ το σύνολο $f^{-1}[A]$ ανήκει στην $\Gamma(\mathcal{X})$. Με άλλα λόγια, η κλειστότητα μιας κλάσης Γ ως προς Borel αντικατάσταση σημαίνει την κλειστότητά της ως προς Γ′-αντικατάσταση (Ορισμός 3.5.1) όπου $\Gamma' =$ η κλάση όλων των Borel-μετρησίμων συναρτήσεων.

Ένας ισομορφισμός $f : X \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow Y$ είναι **Borel ισομορφισμός** αν οι συναρτήσεις $f : X \to Y$ και $f^{-1} : Y \to X$ είναι Borel-μετρήσιμες.

Οι μετρικοί χώροι X και Y είναι **Borel ισομορφικοί** αν υπάρχει Borel ισομορφισμός $f : X \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow Y$. Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι κάθε δύο υπεραριθμήσιμοι Πολωνικοί χώροι είναι Borel-ισομορφικοί.

Οι Borel-μετρήσιμες συναρτήσεις χαρακτηρίζονται ως εξής:

Πρόταση 4.2.2. *Θεωρούμε μετρικούς χώρους X, Y και μια συνάρτηση $f : X \to Y$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

(1) *Η f **αντιστρέφει τα ανοικτά** υποσύνολα του Y σε Borel υποσύνολα του X, δηλαδή η f είναι Borel-μετρήσιμη.*
(2) *Η f **αντιστρέφει τα Borel** υποσύνολα του Y σε Borel υποσύνολα του X, δηλαδή για κάθε Borel σύνολο $B \subseteq Y$ το σύνολο $f^{-1}[B]$. (Μερικές φορές ο ορισμός των Borel-μετρήσιμων συναρτήσεων δίνεται με αυτή τη συνθήκη.)*

Απόδειξη. Η κατεύθυνση (2) $\Longrightarrow$ (1) είναι άμεση γιατί κάθε ανοικτό υποσύνολο του Y είναι Borel υποσύνολο του Y. Για την κατεύθυνση (1) $\Longrightarrow$ (2) θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq Y \mid f^{-1}[A] \in \mathcal{B}(X)\}.$$

Από την υπόθεση κάθε ανοικτό υποσύνολο του Y ανήκει στην $\mathcal{A}$. Δείχνουμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα στο X. Πράγματι, έχουμε $\varnothing = f^{-1}[\varnothing]$, $X = f^{-1}[Y]$, έτσι που $\varnothing, Y \in \mathcal{A}$. Επιπλέον ισχύει

$$f^{-1}[Y \setminus A] = X \setminus f^{-1}[A] \quad \text{και} \quad f^{-1}[\textstyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n] = \textstyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}[A_n],$$

για κάθε ακολουθία $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ υποσυνόλων του Y και κάθε $A \subseteq Y$. Επειδή η $\mathcal{B}(X)$ είναι σ-άλγεβρα στον X, προκύπτει από τις προηγούμενες δύο ισότητες ότι η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή ως προς το συμπλήρωμα στο Y και ως προς την αριθμήσιμη ένωση υποσυνόλων του Y. Καταλήγουμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα.

Εφόσον η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα στο Y, η οποία περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του Y, έχουμε ότι $\mathcal{B}(\mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{A}$, που είναι ακριβώς το ζητούμενο. □

Θέλουμε να δείξουμε ότι κάθε υπεραριθμήσιμος Πολωνικός χώρος $\mathcal{X}$ είναι Borel ισομορφικός με τον $\mathcal{N}$. Αυτό γίνεται σε μια σειρά βημάτων. Το πρώτο ορόσημο είναι να δειχθεί ότι η Borel δομή του $\mathcal{N}$ "εμφυτεύεται" στην Borel δομή του $\mathcal{X}$ (Λήμμα 4.2.8) και το επόμενο είναι να δείξουμε το αντίστροφο του προηγούμενου: η Borel δομή ενός υπεραριθμήσιμου Πολωνικού χώρου $\mathcal{X}$ «εμφυτεύεται» στην Borel δομή του $\mathcal{X}$ (Λήμμα 4.2.10). Η απόδειξη του γνωστού Θεωρήματος Schröder-Bernstein μας επιτρέπει να συμπεράνουμε ότι οι χώροι $\mathcal{X}$ και $\mathcal{N}$ είναι Borel ισομορφικοί (Θεώρημα 4.2.11). Στη συνέχεια, εξηγούμε την έννοια της εμφύτευσης στην οποία αναφερόμαστε.

Ορισμός 4.2.3 ([**34**] - 1G). Θεωρούμε δύο Πολωνικούς χώρους $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ και έναν μονομορφισμό $f : \mathcal{X} \rightarrowtail \mathcal{Y}$. Η f λέγεται **καλός Borel μονομορφισμός** αν

(i) είναι Borel-μετρήσιμη,

(ii) η εικόνα $f[\mathcal{X}]$ είναι Borel υποσύνολο του $\mathcal{Y}$, και

(iii) η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : f[\mathcal{X}] \to \mathcal{X}$ είναι Borel μετρήσιμη. (Θεωρούμε το $f[\mathcal{X}]$ ως μετρικό υπόχωρο του $\mathcal{Y}$.)

Σχόλιο. Όπως θα δούμε αργότερα, κάθε ένα-προς-ένα Borel-μετρήσιμη συνάρτηση ικανοποιεί όλες τις πιο πάνω ιδιότητες, δηλαδή είναι καλός Borel μονομορφισμός (Άσκηση 5.2.6).

Παρατήρηση 4.2.4. Για κάθε καλό Borel-μονομορφισμό $f : \mathcal{X} \rightarrowtail \mathcal{Y}$ και κάθε Borel σύνολο $B \subseteq \mathcal{X}$, το σύνολο $f[B]$ είναι Borel υποσύνολο του $\mathcal{Y}$.

Απόδειξη. Έχουμε

$$f[B] = g^{-1}[B] \quad \text{όπου } g = f^{-1} : f[\mathcal{X}] \rightarrowtail \mathcal{X}.$$

Επειδή η g είναι Borel-μετρήσιμη από την Πρόταση 4.2.2 το σύνολο $g^{-1}[B] = f[B]$ είναι Borel υποσύνολο του χώρου $f[\mathcal{X}]$. Επειδή η f είναι καλός Borel-ισομορφισμός το $f[\mathcal{X}]$ είναι Borel υποσύνολο του $\mathcal{Y}$ και από την Πρόταση 4.1.8 το $f[B]$ είναι Borel υποσύνολο του $\mathcal{Y}$. □

Παρατήρηση 4.2.5. Η σύνθεση καλών Borel-μονομορφισμών είναι Borel μονομορφισμός.

Απόδειξη. Θεωρούμε καλούς Borel μονομορφισμούς $f : \mathcal{X} \rightarrowtail \mathcal{Y}$ και $g : \mathcal{Y} \rightarrowtail \mathcal{Z}$. Οι συναρτήσεις $g \circ f$ και $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ είναι Borel-μετρήσιμες από την Άσκηση 4.2.15.

Αφού το $\mathcal{X}$ είναι προφανώς Borel υποσύνολο του $\mathcal{X}$ και η f είναι καλός Borel μονομορφισμός έχουμε ότι το σύνολο $f[\mathcal{X}]$ είναι Borel υποσύνολο του $\mathcal{Y}$. Εφόσον η g είναι επίσης καλός Borel μονορφισμός προκύπτει από την Παρατήρηση ότι η εικόνα

$$(g \circ f)[\mathcal{X}] = g[f[\mathcal{X}]]$$

είναι Borel υποσύνολο του $\mathcal{Z}$. □

Λήμμα 4.2.6. *Για κάθε υπεραριθμήσιμο Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ υπάρχει ένας καλός Borel μονομορφισμός $\tau : 2^{\mathbb{N}} \rightarrowtail \mathcal{X}$.*

Απόδειξη. Από το Πόρισμα 2.4.3 υπάρχει συνεχής μονομορφισμός $\tau : 2^{\mathbb{N}} \rightarrowtail \mathcal{X}$. Δείχνουμε ότι η τ είναι επίσης καλός Borel-μονομορφισμός. Επειδή η τ είναι συνεχής, είναι τότε και Borel-μετρήσιμη συνάρτηση.

Επιπλέον, το σύνολο $\tau[2^{\mathbb{N}}]$ είναι συμπαγές (ως συνεχής εικόνα συμπαγούς) και άρα είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{X}$. Ειδικότερα το $\tau[2^{\mathbb{N}}]$ είναι Borel υποσύνολο του $\mathcal{X}$. Τέλος η αντίστροφη συνάρτηση $\tau^{-1} : \tau[2^{\mathbb{N}}] \to 2^{\mathbb{N}}$ είναι συνεχής και άρα Borel-μετρήσιμη. (Συνάρτηση συνεχής και ένα-προς-ένα σε συμπαγές έχει συνεχή αντίστροφη - δείτε την απόδειξη του Πορίσματος 2.4.4.) $\square$

Λήμμα 4.2.7. *Υπάρχει συνεχής μονομορφισμός $\rho : \mathcal{N} \rightarrowtail 2^{\mathbb{N}}$ έτσι ώστε η συνάρτηση $\rho^{-1} : \rho[\mathcal{N}] \rightarrowtail 2^{\mathbb{N}}$ είναι συνεχής και το σύνολο $\rho[\mathcal{N}]$ είναι $\undertilde{\mathbf{\Pi}}^0_2$ υποσύνολο του $2^{\mathbb{N}}$.*

Απόδειξη. Ορίζουμε $\rho : \mathcal{N} \to 2^{\mathbb{N}}$ ως εξής

$$\rho(\alpha) = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{\alpha(0)\text{-φορές}}, 1, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{\alpha(1)\text{-φορές}}, 1, \dots, 1, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{\alpha(n)\text{-φορές}}, 1, \dots).$$

Τότε η ρ είναι ένα-προς-ένα. Αν $\alpha(i) = \beta(i)$ για κάθε $i = 0, \dots, n$ τότε $\rho(\alpha)(k) = \rho(\beta)(k)$ για κάθε $k = 0, \dots, \alpha(0) + \dots + \alpha(n) + n$. Επομένως $d_{2^{\mathbb{N}}}(\rho(\alpha), \rho(\beta))) \leqslant d_{\mathcal{N}}(\alpha, \beta)$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathcal{N}$ και η ρ είναι συνεχής.

Επιπλέον αν $\alpha \in \mathcal{N}_u$, δηλαδή αν $u(0) = \alpha(0)$, ..., $u(n-1) = \alpha(n-1)$, όπου $n = |u|$ και αν $\rho(\alpha)(k) = \rho(\beta)(k)$ για κάθε $k = 0$, 1, ..., $u(0) + \dots + u(n-1) + n$ τότε $\beta \in \mathcal{N}_u$. Αυτό δείχνει ότι η ρ^{-1} είναι συνεχής.

Τέλος παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \gamma \in \rho[\mathcal{N}] &\iff \text{το } \gamma \text{ παίρνει άπειρες φορές την τιμή } 1 \\ &\iff \forall n\ \exists m \geqslant n\ \gamma(m) = 1 \\ &\iff \forall n\ \exists m\ (m \geqslant n\ \&\ \gamma(m) = 1). \end{aligned}$$

Επομένως το $\rho[\mathcal{N}]$ είναι $\undertilde{\mathbf{\Pi}}^0_2$ υποσύνολο του $2^{\mathbb{N}}$. $\square$

Λήμμα 4.2.8. *Για κάθε υπεραριθμήσιμο Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ υπάρχει ένας καλός Borel μονομορφισμός $f : \mathcal{N} \rightarrowtail \mathcal{X}$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\rho : \mathcal{N} \rightarrowtail 2^{\mathbb{N}}$ όπως στο Λήμμα 4.2.7. Επειδή κάθε συνεχής συνάρτηση είναι Borel-μετρήσιμη και τα $\undertilde{\mathbf{\Pi}}^0_2$ σύνολα είναι Borel προκύπτει ότι η ρ είναι καλός Borel μονομορφισμός.

Από το Λήμμα 4.2.7 υπάρχει καλός Borel μονομορφισμός $\tau : 2^{\mathbb{N}} \rightarrowtail \mathcal{X}$ και από την Παρατήρηση 4.2.5 η σύνθεση

$$f = \tau \circ \rho : \mathcal{N} \rightarrowtail \mathcal{X}$$

είναι καλός Borel μονομορφισμός. $\square$

Λήμμα 4.2.9. *Για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ υπάρχει ένας συνεχής επιμορφισμός $\pi : \mathcal{N} \twoheadrightarrow \mathcal{X}$ και ένα G_δ σύνολο $P \subseteq \mathcal{N}$, έτσι ώστε $\pi[P] = \mathcal{X}$ και ο περιορισμός $\pi|P$ είναι ένα-προς-ένα. Επιπλέον, η αντίστροφη συνάρτηση $(\pi|P)^{-1} : \mathcal{X} \to \mathcal{N}$ είναι Borel-μετρήσιμη.*

Ειδικότερα κάθε Πολωνικός χώρος είναι η συνεχής ένα-προς-ένα εικόνα ενός G_δ υποσυνόλου του χώρου του Baire.

Σχόλιο. Σε μεταγενέστερο σημείο θα δούμε ότι η Borel-μετρησιμότητα της $(\pi|P)^{-1}$ προκύπτει από τις πιο πάνω ιδιότητες της π (Πόρισμα 5.2.4) και επίσης ότι το P αντί για G_δ μπορεί να ληφθεί να είναι κλειστό σύνολο (Λήμμα 4.3.1).

Απόδειξη. Θεωρούμε μια κατάλληλη μετρική d στον $\mathcal{X}$ και ένα αριθμήσιμο $D = \{r_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ που είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathcal{X}$. Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση

$$u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \setminus \{\Lambda\} \mapsto x_u \in \mathcal{X}$$

που ορίζεται ως εξής:

$$x_{(k)} = r_k \quad \text{και} \quad x_{u*(k)} = \begin{cases} r_k, \text{ αν } d(r_k, x_u) < 2^{-(|u|+1)} \\ x_u, \text{ αν } d(r_k, x_u) \geqslant 2^{-(|u|+1)} \end{cases}$$

Όπως έχουμε δει στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.7 καθώς και στην επακόλουθη Παρατήρηση 2.3.8, η συνάρτηση

$$\pi : \mathcal{N} \to \mathcal{X} : \pi(\alpha) = \lim_{n\to\infty} x_{\alpha|n}$$

είναι συνεχής επιμορφισμός και η συνάρτηση

$$\tau : \mathcal{X} \to \mathcal{N} : \tau(x)(n) = \text{ο ελάχιστος } k \text{ με } d(r_k, x) < 2^{-(n+2)}$$

είναι μονομορφισμός που ικανοποιεί

$$\pi(\tau(x)) = x,\ x \in \mathcal{X} \quad \text{και} \quad \tau(\pi(\alpha)) = \alpha,\ \alpha \in \tau[\mathcal{X}].$$

Θέτουμε $P = \tau[\mathcal{X}]$ και δείχνουμε τα ζητούμενα για αυτές τις επιλογές π και P. Αναφέραμε πιο πάνω ότι η π είναι συνεχής. Επιπλέον αν $x \in \mathcal{X}$ τότε το $\alpha = \tau(x)$ ανήκει στο P και σύμφωνα με τα προηγούμενα $\pi(\alpha) = \pi(\tau(x)) = x$. Άρα $\pi[P] = \mathcal{X}$. Για να δούμε ότι ο περιορισμός $\pi|P$ είναι ένα-προς-ένα υποθέτουμε ότι $\pi(\alpha_1) = \pi(\alpha_2)$, όπου $\alpha_1, \alpha_2 \in P$. Τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ με $\alpha_1 = \tau(x_1)$ και $\alpha_2 = \tau(x_2)$, οπότε $\pi(\tau(x_1)) = \pi(\tau(x_2))$. Από τα προηγούμενα έχουμε $x_1 = x_2$.

Για να δείξουμε ότι η $(\pi|P)^{-1} : \mathcal{X} \to \mathcal{N}$ είναι Borel-μετρήσιμη παρατηρούμε αρχικά ότι $(\pi|P)^{-1} = \tau$: πράγματι για κάθε $x \in \mathcal{X}$ έχουμε $(\pi|P)^{-1}(x) =$ το μοναδικό $\alpha \in P = \tau[\mathcal{X}]$ με $\pi(\alpha) = x$, άρα $\tau(x) = \tau(\pi(\alpha)) = \alpha = (\pi|P)^{-1}(x)$.

Επομένως πρέπει να δείξουμε ότι η τ είναι Borel-μετρήσιμη. Δείχνουμε ότι η τ αντιστρέφει τα ανοικτά σύνολα του $\mathcal{N}$ σε $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_2$. Αφού τα $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_2$ σύνολα είναι Borel προκύπτει από αυτό ότι η τ είναι Borel-μετρήσιμη. Για κάθε $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \tau(x) \in \mathcal{N}_u &\iff u \sqsubseteq \tau(x) \\ &\iff \forall n < |u|\ u(n) = \tau(x)(n) \\ &\iff \forall n < |u|\ u(n) = \text{ ο ελάχιστος } k \text{ με } d(r_k, x) < 2^{-(n+2)} \\ &\iff \forall n < |u|\ (d(r_{u(n)}, x) < 2^{-(n+2)}\ \&\ \forall t < u(n)\ d(r_t, x) \geqslant 2^{-(n+2)}). \end{aligned}$$

Προκύπτει ότι το σύνολο $\tau^{-1}[\mathcal{N}_u]$ είναι $\utilde{\mathbf{\Delta}}^0_2$ επομένως και $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_2$ υποσύνολο του $\mathcal{X}$. Επειδή κάθε ανοικτό υποσύνολο του $\mathcal{N}$ είναι ένωση συνόλων της μορφής $\mathcal{N}_u$ για κάποια $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, έχουμε από την κλειστότητα της $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_2$ ως προς τον τελεστή της αριθμήσιμης ένωσης ότι η τ αντιστρέφει τα ανοικτά σύνολα σε $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_2$.

Απομένει να δείξουμε ότι το $P = \tau[\mathcal{X}]$ είναι G_δ υποσύνολο του $\mathcal{N}$. Η βασική παρατήρηση είναι η ιδιότητα που αναφέραμε πιο πάνω: για κάθε $\alpha = \tau(x) \in \tau[\mathcal{X}]$ ισχύει $\tau(\pi(\alpha)) = \alpha$. Από αυτό και τον ορισμό της τ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \alpha \in \tau[\mathcal{X}] &\iff \alpha = \tau(\pi(\alpha)) \\ &\iff \forall n\ \alpha(n) = \tau(\pi(\alpha))(n) \\ &\iff \forall n\ \alpha(n) = \text{ ο ελάχιστος } k \text{ με } d(r_k, \pi(\alpha)) < 2^{-(n+2)} \\ &\iff \forall n\ (d(\pi(\alpha), r_{\alpha(n)}) < 2^{-(n+2)} \&\ \forall t < \alpha(n)\ d(\pi(\alpha), r_t) \geqslant 2^{-(n+2)} \end{aligned}$$

για κάθε $\alpha \in \mathcal{N}$. Αυτό δείχνει ότι το $\tau[\mathcal{X}]$ είναι $\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_2$ υποσύνολο του $\mathcal{N}$. ▫

Λήμμα 4.2.10. *Για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ υπάρχει ένας καλός Borel μονομορφισμός $\tau : \mathcal{X} \rightarrowtail \mathcal{N}$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε $\pi : \mathcal{N} \twoheadrightarrow \mathcal{X}$ και $P \subseteq \mathcal{N}$ όπως στο Λήμμα 4.2.9 και θέτουμε $\tau = (\pi|P)^{-1} : \mathcal{X} \to \mathcal{N}$. Δείχνουμε ότι η τ είναι καλός Borel-μονομορφισμός.

Αρχικά η τ είναι ένα-προς-ένα και $P = \tau[\mathcal{X}]$ γιατί η τ είναι η αντίστροφη της αντιστοιχίας $\pi|P : P \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow \mathcal{X}$. Επιπλέον η τ είναι Borel-μετρήσιμη και το σύνολο $\tau[\mathcal{X}] = P$ είναι G_δ, ειδικότερα Borel. Τέλος η αντίστροφη συνάρτηση της τ είναι ακριβώς ο περιορισμός $\pi|P$ που είναι συνεχής συνάρτηση. ▫

Θεώρημα 4.2.11 (Schröder-Bernstein για καλούς Borel μονομορφισμούς, [**34**] - 1G.3, [**8**] - 15.7). *Για κάθε δύο Πολωνικούς χώρους $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$ αν υπάρχουν καλοί Borel μονομορφισμοί*

$$f : \mathcal{X} \rightarrowtail \mathcal{Y}, \quad g : \mathcal{Y} \rightarrowtail \mathcal{X}$$

τότε υπάρχει Borel ισομορφισμός $h : \mathcal{X} \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow \mathcal{Y}$.

Απόδειξη. Από την Παρατήρηση 4.2.5 η σύνθεση

$$\varphi : \mathcal{Y} \rightarrowtail f[\mathcal{X}] : \varphi(y) = f(g(y))$$

είναι καλός Borel μονομορφισμός.

Ορίζουμε την ακολουθία υποσυνόλων $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του $\mathcal{Y}$ ως εξής:

$$\begin{aligned} C_0 &= \mathcal{Y} \setminus f[\mathcal{X}] \\ C_{n+1} &= \varphi[C_n]. \end{aligned}$$

Εφόσον οι συναρτήσεις f και φ είναι καλοί Borel μονομορφισμοί, με εφαρμογή της Παρατήρησης 4.2.4 προκύπτει επαγωγικά ότι κάθε C_n είναι Borel υποσύνολο του $\mathcal{Y}$.

Ορίζουμε επίσης $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$. Τότε το D είναι αριθμήσιμη ένωση Borel συνόλων και συνεπώς είναι Borel υποσύνολο του $\mathcal{Y}$. Παρατηρούμε ακόμα ότι

$$\varphi[D] = \varphi[\textstyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \varphi[C_n] = \bigcup_{n\geqslant 1} C_n \subseteq D.$$

Τέλος ορίζουμε

$$\tau : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y} : \tau(y) = \begin{cases} \varphi(y), & y \in D \\ y, & y \notin D. \end{cases}$$

Από την Άσκηση 4.2.14, η τ είναι Borel-μετρήσιμη συνάρτηση.

Δείχνουμε ότι η τ παίρνει τιμές στο $f[\mathcal{X}]$. Θεωρούμε $y \in \mathcal{Y}$: αν $y \notin D$, τότε $y \notin C_0 = \mathcal{Y} \setminus f[\mathcal{X}]$, άρα $y \in f[\mathcal{X}]$. Επιπλέον, αφού $y \notin D$ έχουμε $\tau(y) = y \in f[\mathcal{X}]$. Αν $y \in D$, τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $y \in C_n$ και $\tau(y) = \varphi(y) \in \varphi[C_n] \subseteq f[\mathcal{X}]$, όπου στον τελευταίο εγκλεισμό χρησιμοποιήσαμε ότι η φ παίρνει τιμές στο $f[\mathcal{X}]$.

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι η τ είναι επί του $f[\mathcal{X}]$. Θεωρούμε $y \in f[\mathcal{X}]$: αν $y \notin D$, τότε $\tau(y) = y$. Αν $y \in D$, τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $y \in C_n$, και επειδή $y \in f[\mathcal{X}]$ δεν γίνεται να έχουμε $n = 0$. Άρα $n \geqslant 1$ και $y \in C_n = \varphi[C_{n-1}]$. Επομένως υπάρχει $y' \in C_{n-1}$ με $y = \varphi(y')$. Τότε έχουμε $\tau(y') = \varphi(y') = y$, όπου στην πρώτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι $y' \in C_{n-1} \subseteq D$. Σε κάθε περίπτωση, υπάρχει $y' \in \mathcal{Y}$ με $\tau(y') = y$.

Έπειτα δείχνουμε ότι η τ είναι μονομορφισμός. Θεωρούμε $y_1, y_2 \in \mathcal{Y}$ με $\tau(y_1) = \tau(y_2)$. Αν κάποιο από τα y_1, y_2 ανήκει στο D (ας πούμε το y_1) και το άλλο (το y_2) δεν ανήκει στο D, τότε $\tau(y_1) \in \varphi[D] \subseteq D$ ενώ $\tau(y_2) = y_2 \notin D$. Επομένως έχουμε $\tau(y_1) \neq \tau(y_2)$ άτοπο. Άρα, είτε $y_1, y_2 \notin D$, οπότε $y_1 = \tau(y_1) = \tau(y_2) = y_2$, είτε $y_1, y_2 \in D$. Στην τελευταία περίπτωση, $\varphi(y_1) = \tau(y_1) = \tau(y_2) = \varphi(y_2)$, και επειδή η φ είναι μονομορφισμός έχουμε $y_1 = y_2$.

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι η αντίστροφη $\tau^{-1} : f[\mathcal{X}] \to \mathcal{X}$ είναι Borel-μετρήσιμη. Σύμφωνα με τα προηγούμενα, η τ^{-1} δίνεται από τον τύπο

$$\tau^{-1}(y) = \begin{cases} y, & y \notin D \\ \varphi^{-1}(y), & y \in D. \end{cases}$$

Επειδή η $\varphi : \mathcal{Y} \rightarrowtail f[\mathcal{X}]$ είναι καλός Borel μονομορφισμός, η αντίστροφη συνάρτηση $\varphi^{-1} : f[\mathcal{X}] \to \mathcal{Y}$ είναι Borel-μετρήσιμη. Από την Άσκηση 4.2.14, η τ^{-1} είναι Borel-μετρήσιμη.

Προκύπτει από τα προηγούμενα ότι η τ είναι καλός Borel μονομορφισμός. Τέλος ορίζουμε

$$h : \mathcal{Y} \to \mathcal{X} : h(y) = f^{-1}(\tau(y)).$$

Η συνάρτηση h είναι καλά ορισμένη γιατί η τ παίρνει τιμές στο $f[\mathcal{X}]$ και είναι Borel-μετρήσιμη ως σύνθεση Borel-μετρήσιμων συναρτήσεων. Επιπλέον, είναι μονομορφισμός ως σύνθεση μονομορφισμών και επιμορφισμός γιατί η $f^{-1} : f[\mathcal{X}] \to \mathcal{X}$ είναι επί του $\mathcal{X}$ και η τ είναι επί του $f[\mathcal{X}]$.

Τέλος η αντίστροφη συνάρτηση $h^{-1} = \tau^{-1} \circ f$ είναι Borel-μετρήσιμη ως σύνθεση Borel-μετρήσιμων συναρτήσεων. □

Θεώρημα 4.2.12 (Το Θεώρημα Borel του ισομορφισμού, [**34**] - 1G.4). *Κάθε υπεραριθμήσιμος Πολωνικός χώρος είναι Borel-ισομορφικός με τον χώρο του Baire.*

Απόδειξη. Θεωρούμε έναν υπεραριθμήσιμο Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$. Από τα Λήμματα 4.2.10 και 4.2.10 υπάρχουν καλοί Borel μονομορφισμοί $f : \mathcal{N} \rightarrowtail \mathcal{X}$ και $\tau : \mathcal{X} \rightarrowtail \mathcal{N}$. Επομένως, από το Θεώρημα 4.2.11 υπάρχει Borel ισομορφισμός $h : \mathcal{N} \rightarrowtail\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathcal{X}$. □

Πόρισμα 4.2.13 ([**8**] - 15.6). *Κάθε δύο υπεραριθμήσιμοι Πολωνικοί χώροι, είναι Borel ισομορφικοί.*

Απόδειξη. Αν $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ είναι υπεραριθμήσιμοι Πολωνικοί χώροι τότε από το Θεώρημα 4.2.12 υπάρχουν Borel ισομορφισμοί

$$f : \mathcal{X} \rightarrowtail\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathcal{N} \quad \text{και} \quad g : \mathcal{N} \rightarrowtail\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathcal{Y}.$$

Προκύπτει άμεσα από την Άσκηση 4.2.15 ότι η σύνθεση $g \circ f : \mathcal{X} \rightarrowtail\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathcal{Y}$ είναι Borel ισομορφισμός. □

Ισχύει το αντίστοιχο με το Πόρισμα 4.2.13 αποτέλεσμα για τους άπειρους *αριθμήσιμους* Πολωνικούς χώρους, (βλ. την Άσκηση 4.2.21).

Ασκήσεις

Άσκηση 4.2.14. Θεωρούμε μετρικούς χώρους X, Y, Borel-μετρήσιμες συναρτήσεις $f_1, f_2 : X \to Y$ και ένα Borel σύνολο $B \subseteq X$. Τότε η συνάρτηση $f : X \to Y$ με

$$\begin{cases} f_1(x), & x \in B, \\ f_2(x), & x \notin B, \end{cases}$$

είναι Borel-μετρήσιμη.

Άσκηση 4.2.15. Η σύνθεση Borel-μετρησίμων συναρτήσεων είναι Borel-μετρήσιμη συνάρτηση. Ειδικότερα, η σύνθεση μιας Borel-μετρήσιμης συνάρτησης με μία συνεχή είναι Borel-μετρήσιμη συνάρτηση.

Άσκηση 4.2.16. Για κάθε ακολουθία $((X_n, d_n))_{n\in\mathbb{N}}$ από μετρικούς χώρους και για κάθε ακολουθία $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $B_n \in \mathcal{B}(X_n)$, το γινόμενο $\prod_{n\in\mathbb{N}} B_n$ είναι Borel υποσύνολο του $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$.

Ομοίως για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $B_0, \dots, B_n$ με $B_i \in \mathcal{B}(X_i)$ για $i = 0, \dots, n$ το γινόμενο $B_0 \times \cdots \times B_n$ είναι Borel υποσύνολο του $X_0 \times \cdots \times X_n$.

Άσκηση 4.2.17. Θεωρούμε μετρικούς χώρους (X, d), (Y_n, ρ_n), $n \in \mathbb{N}$. Τότε για κάθε συνάρτηση

$$f : X \to \prod_{n\in\mathbb{N}} Y_n : f(x) = (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$$

η f είναι Borel-μετρήσιμη αν και μόνο αν κάθε συνάρτηση f_n είναι Borel-μετρήσιμη.

Ομοίως για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε συνάρτηση

$$f : X \to Y_0 \times \cdots \times Y_n : f(x) = (f_0(x), \dots, f_n(x))$$

η f είναι Borel-μετρήσιμη αν και μόνο αν οι $f_0, \dots, f_n$ είναι Borel-μετρήσιμες.

Άσκηση 4.2.18. Για κάθε μετρικό χώρο X και κάθε Borel-μετρήσιμες συναρτήσεις $f, g : X \to \mathbb{R}$, οι συναρτήσεις

$$f + g,\ f \cdot g,\ |f|,\ \lambda \cdot f,\ (\lambda \in \mathbb{R}),\ \max\{f + g\},\ \min\{f + g\},$$

είναι Borel-μετρήσιμες.

Άσκηση 4.2.19. Το γράφημα μιας Borel-μετρήσιμης συνάρτησης μεταξύ Πολωνικών χώρων είναι Borel σύνολο.

Σχόλιο. Όπως θα δούμε στο Πόρισμα 5.2.3, ισχύει (μεταξύ άλλων) και το αντίστροφο του πιο πάνω.

Άσκηση 4.2.20. Κάθε μία από τις προβολικές κλάσεις είναι κλειστή ως προς Borel αντικατάσταση, δηλαδή αν Γ είναι μία από τις κλάσεις $\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^1_n$, $\utilde{\boldsymbol{\Pi}}^1_n$, $\utilde{\boldsymbol{\Delta}}^1_n$, όπου $n \geqslant 1$, τότε για κάθε Borel-μετρήσιμη $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, όπου $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ είναι Πολωνικοί χώροι, και κάθε $A \in \Gamma(\mathcal{Y})$, ισχύει $f^{-1}[A] \in \Gamma(\mathcal{X})$.

Άσκηση 4.2.21. Κάθε άπειρος *αριθμήσιμος* Πολωνικός χώρος είναι Borel-ισομορφικός με τον $\mathbb{N}$. Προκύπτει ότι κάθε δύο άπειροι αριθμήσιμοι Πολωνικοί χώροι είναι Borel-ισομορφικοί.

4.3. Μονομορφισμοί και Borel σύνολα

Ένας στόχος μας εδώ είναι να δείξουμε ότι κάθε Borel υποσύνολο ενός Πολωνικού χώρου είναι η συνεχής ένα-προς-ένα εικόνα ενός κλειστού υποσυνόλου του χώρου του Baire (Θεώρημα 4.3.2). Διευκρινίζουμε ότι η προηγούμενη συνεχής συνάρτηση ορίζεται σε όλο τον χώρο του Baire.

Το προηγούμενο γίνεται σε διαδοχικά βήματα. Όπως είδαμε στο Λήμμα 4.2.9, κάθε Πολωνικός χώρος $\mathcal{X}$ είναι η συνεχής ένα-προς-ένα ενός G_δ υποσυνόλου του $\mathcal{N}$. Στο επόμενο βήμα δείχνουμε ότι μπορούμε να αντικαταστήσουμε το G_δ υποσύνολο με ένα κλειστό.

Λήμμα 4.3.1. *Για κάθε G_δ σύνολο $P \subseteq \mathcal{N}$ υπάρχει κλειστό $C \subseteq \mathcal{N}$ και συνεχής συνάρτηση $f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$, έτσι ώστε $f[C] = P$, ο περιορισμός $f|C$ είναι ένα-προς-ένα, και η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : P \to C$ να είναι συνεχής.*

Ειδικότερα, κάθε G_δ υποσύνολο του $\mathcal{N}$ είναι τοπολογικά ισομορφικό με ένα κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{N}$.

Απόδειξη. Εφόσον το $P \subseteq \mathcal{N}$ είναι G_δ, υπάρχει ακολουθία $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από ανοικτά υποσύνολα του $\mathcal{N}$ με $P = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$. Κάθε ανοικτό σύνολο είναι αριθμήσιμη ένωση από βασικές περιοχές $\mathcal{N}_u$, $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, οι οποίες είναι κλειστά-ανοικτά σύνολα. Συνεπώς, μπορούμε να βρούμε μια διπλή ακολουθία $(Q_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}}$ από κλειστά-ανοικτά υποσύνολα του $\mathcal{N}$ έτσι ώστε

$$\alpha \in P \iff \forall n\ \exists m\ \alpha \in Q_{n,m}. \tag{4.3}$$

Η ιδέα είναι για κάθε $\alpha \in P$ να ορίσουμε τη συνάρτηση η οποία απεικονίζει το $n \in \mathbb{N}$ στο ελάχιστο m, όπως πιο πάνω. Αυτή η συνάρτηση είναι αντικείμενο του $\mathcal{N}$.

Ορίζουμε το σύνολο $F \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$,

$$(\alpha, \gamma) \in F \iff \forall n\ (\alpha \in Q_{n,\gamma(n)}\ \&\ \forall k < \gamma(n)\ \alpha \notin Q_{n,k}),$$

δηλαδή ο $\gamma(n)$ είναι ο ελάχιστος φυσικός αριθμός m με $\alpha \in Q_{n,m}$. Επειδή όλα τα σύνολα $Q_{n,m}$ είναι κλειστά-ανοικτά προκύπτει ότι το F είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση της προβολής $\mathsf{pr}_1 : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \to \mathcal{N} : (\alpha, \gamma) \mapsto \alpha$, η οποία είναι προφανώς συνεχής.

Δείχνουμε ότι $\mathsf{pr}_1[F] = P$. Πράγματι, αν $(\alpha, \gamma) \in F$ έχουμε ειδικότερα ότι για κάθε n υπάρχει m (το $\gamma(n)$) έτσι ώστε $\alpha \in Q_{n,m}$. Από την (4.3) έχουμε ότι $\alpha = \mathsf{pr}_1(\alpha, \gamma) \in P$. Αντίστροφα, αν $\alpha \in P$, τότε πάλι από την (4.3) για κάθε n υπάρχει m με $\alpha \in Q_{n,m}$, οπότε μπορούμε να ορίσουμε $\gamma(n) =$ ο ελάχιστος $m \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα $\alpha \in Q_{n,m}$, έτσι που $(\alpha, \gamma) \in F$. Αυτό δείχνει ότι $\alpha = \mathsf{pr}_1(\alpha, \gamma) \in \pi[F]$.

Η pr_1 δεν είναι φυσικά ένα-προς-ένα, ο περιορισμός της όμως στο F είναι: αν έχουμε (α_1, γ_1), $(\alpha_2, \gamma_2) \in F$ και $\mathsf{pr}_1(\alpha_1, \gamma_1) = \mathsf{pr}_1(\alpha_2, \gamma_2)$, τότε $\alpha_1 = \alpha_2$ και άρα για κάθε n,

$$\begin{aligned}
\gamma_1(n) &= \text{ο ελάχιστος } m \text{ με } \ \alpha_1 \in Q_{n,m} \\
&= \text{ο ελάχιστος } m \text{ με } \ \alpha_2 \in Q_{n,m} \\
&= \gamma_2(n).
\end{aligned}$$

Άρα $\gamma_1 = \gamma_2$ και επομένως $(\alpha_1, \gamma_1) = (\alpha_2, \gamma_2)$.

Η αντίστροφη συνάρτηση $\pi : P \to F : \pi(\alpha) = (\alpha, \gamma)$ είναι επίσης συνεχής. Για να το δούμε αυτό, αρκεί να δείξουμε ότι η $\alpha \in P \mapsto \gamma$, όπου $\gamma(n) =$ ο ελάχιστος m με $\alpha \in Q_{n,m}$, είναι συνεχής. Πράγματι, για κάθε n, m έχουμε

$$\gamma(n) = m \iff \alpha \in Q_{n,m}\ \&\ \forall k < m\ \alpha \notin Q_{n,m}.$$

Αν συμβολίσουμε με f τη συνάρτηση $\alpha \in P \mapsto \gamma$ και με $V_{n,m}$ το σύνολο $\{\gamma \in \mathcal{N} \mid \gamma(n) = m\}$, τότε η τελευταία ισοδυναμία λέει ότι

$$f^{-1}[V_{n,m}] = \{\alpha \in P \mid \alpha \in Q_{n,m}\ \&\ \forall k < m\ \alpha \notin Q_{n,m}\}.$$

Προκύπτει άμεσα ότι το $f^{-1}[V_{n,m}]$ είναι κλειστό-ανοικτό υποσύνολο του P. Επειδή κάθε βασική ανοικτή περιοχή $\mathcal{N}_u$ είναι πεπερασμένη τομή συνόλων της μορφής $V_{n,m}$, προκύπτει ότι κάθε σύνολο $f^{-1}[\mathcal{N}_u]$ είναι κλειστό-ανοικτό υποσύνολο του P. Επομένως, η f είναι συνεχής.

Άρα βρήκαμε ένα κλειστό $F \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ και μια συνεχή συνάρτηση $g : \mathcal{N} \to \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ (την pr_1) έτσι ώστε $g[F] = P$, ο περιορισμός $g|F$ είναι ένα-προς-ένα, και η αντίστροφη $g^{-1} : P \to F$ είναι συνεχής. Το συμπέρασμα προκύπτει από το γεγονός ότι ο $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ είναι τοπολογικά ισομορφικός με τον $\mathcal{N}$.

Σχόλιο. Η τεχνική που ακολουθήσαμε στον ορισμό του F είναι γνωστή ως **«ξεδίπλωμα» (unfolding)**. Η ιδέα είναι ότι ξεδιπλώνουμε τον ορισμό του P στα πιο απλά σύνολα $Q_{n,m}$, με τη βοήθεια των οποίων ορίζουμε το επίσης πιο απλό σύνολο F.

$\square$

Θεώρημα 4.3.2 (Lusin - Suslin, [**15, 20**]). *Κάθε Borel υποσύνολο ενός Πολωνικού χώρου είναι συνεχής ένα-προς-ένα εικόνα ενός κλειστού υποσυνόλου του χώρου του Baire.*

Δηλαδή για Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ κάθε Borel $P \subseteq \mathcal{X}$ υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $\pi : \mathcal{N} \to \mathcal{X}$ και ένα $C \subseteq \mathcal{N}$ κλειστό, ώστε $P = \pi[C]$ και ο περιορισμός $\pi|C$ είναι ένα-προς-ένα.

Απόδειξη. Αρχικά δείχνουμε τον ισχυρισμό για τα G_δ σύνολα P. Το σύνολο P με τη σχετική τοπολογία είναι Πολωνικός χώρος (Θεώρημα 2.1.8). Από το Λήμμα 4.2.9 εφαρμοσμένο στον Πολωνικό χώρο P υπάρχει ένας συνεχής επιμορφισμός $\pi : \mathcal{N} \twoheadrightarrow P$ και ένα G_δ σύνολο $P' \subseteq \mathcal{N}$, έτσι ώστε $\pi[P'] = P$ και ο περιορισμός $\pi|P'$ είναι ένα-προς-ένα. Εφαρμόζουμε το Λήμμα 4.3.1 στο P' και παίρνουμε μια συνεχή συνάρτηση $f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$, όπως και ένα κλειστό σύνολο $C \subseteq \mathcal{N}$, έτσι ώστε $f[C] = P'$ και ο περιορισμός $f|C$ είναι ένα-προς-ένα. Θεωρούμε τη σύνθεση $\pi \circ f : \mathcal{N} \to P$, η οποία είναι συνεχής συνάρτηση. Έχουμε

$$P = \pi[P'] = \pi[f[C]] = (\pi \circ f)[C]$$

και ο περιορισμός $(\pi \circ f)|C$ είναι εύκολα ένα-προς-ένα, (δεδομένου ότι $f[C] = P'$ και η π είναι ένα-προς-ένα στο P'). Έτσι, έχουμε εξασφαλίσει τον ισχυρισμό για τα G_δ σύνολα $P \subseteq \mathcal{X}$.

Στη συνέχεια ορίζουμε τις οικογένειες υποσυνόλων του $\mathcal{X}$,

$$\mathcal{A}_0 = \{P \subseteq \mathcal{X} \mid \text{το } P \text{ είναι η συνεχής ένα-προς-ένα εικόνα ενός κλειστού } C \subseteq \mathcal{N}\}$$
$$\mathcal{A} = \{P \subseteq \mathcal{X} \mid P \in \mathcal{A}_0 \quad \& \quad \mathcal{X} \setminus P \in \mathcal{A}_0\}.$$

Θα δείξουμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα στον $\mathcal{X}$ που περιέχει όλα τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathcal{X}$. Πιο πάνω δείξαμε ότι κάθε G_δ σύνολο ανήκει στην $\mathcal{A}_0$. Επομένως, για κάθε ανοικτό $V \subseteq \mathcal{X}$, τα $P_1 = V$ και $P_2 = \mathcal{X} \setminus V$ είναι και τα δύο G_δ σύνολα, και άρα ανήκουν στην $\mathcal{A}_0$. Αυτό δείχνει ότι $V \in \mathcal{A}$, δηλαδή η $\mathcal{A}$ περιέχει όλα τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathcal{X}$

Προφανώς $\emptyset, \mathcal{X} \in \mathcal{A}$ και η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή ως προς τα συμπληρώματα στον $\mathcal{X}$. Από την Άσκηση 4.1.9, αν δείξουμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή ως προς την αριθμήσιμη τομή υποσυνόλων του $\mathcal{X}$, τότε θα έχουμε πως η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα.

Θεωρούμε λοιπόν μια ακολουθία $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ από υποσύνολα του $\mathcal{X}$ που ανήκουν στη $\mathcal{A}$. Πρέπει να δείξουμε ότι το σύνολο $P = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} P_n$ ανήκει στην $\mathcal{A}$.

1ο *Βήμα*. Δείχνουμε ότι το P ανήκει στην $\mathcal{A}_0$. Για κάθε n, αφού $P_n \in \mathcal{A}_0$ υπάρχει κλειστό σύνολο $C_n \subseteq \mathcal{N}$ και συνεχής συνάρτηση $f_n : \mathcal{N} \to \mathcal{X}$ με $f_n[C_n] = P_n$, και η $f_n|C_n$ είναι ένα-προς-ένα.

Θεωρούμε τον Πολωνικό χώρο $\mathcal{N}^{\mathbb{N}}$, και ορίζουμε το σύνολο $C \subseteq \mathcal{N}^{\mathbb{N}}$ ως εξής:

$$\begin{aligned}(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C &\iff \forall n \; \forall m \; [\; \alpha_n \in C_n \;\&\; f_n(\alpha_n) = f_m(\alpha_m) \;] \\ &\iff \forall n \; \forall m \; [\; \alpha_n \in C_n \;\&\; d_{\mathcal{X}}(f_n(\alpha_n), f_m(\alpha_m)) = 0 \;],\end{aligned}$$

όπου $d_{\mathcal{X}}$ είναι μια συμβατή μετρική στον $\mathcal{X}$. Το C είναι εύκολα αριθμήσιμη τομή κλειστών υποσύνολων του $\mathcal{N}^{\mathbb{N}}$ και επομένως είναι και αυτό κλειστό σύνολο.

Έπειτα θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f : \mathcal{N}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{X} : f((\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}) = f_0(\alpha_0),$$

η οποία είναι εύκολα συνεχής.

Δείχνουμε ότι $f[C] = P$ και ότι ο περιορισμός $f|C$ είναι ένα-προς-ένα. Από αυτό προκύπτει ότι $P \in \mathcal{A}_0$, γιατί ο $\mathcal{N}^{\mathbb{N}}$ είναι τοπολογικά ισομορφικός με τον $\mathcal{N}$ (Άσκηση 2.6.13).

Σχετικά με την ισότητα $f[C] = P$, για την ευθεία συμπερίληψη θεωρούμε $\overline{\alpha} = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C$. Τότε για κάθε n ισχύει $\alpha_n \in C_n$ και άρα $f_n(\alpha_n) \in f_n[C_n] = P_n$. Επιπλέον, από τον ορισμό του C ισχύει $f_0(\alpha_0) = f_n(\alpha_n)$ για κάθε n. Επομένως

$$f(\overline{\alpha}) = f_0(\alpha_0) = f_n(\alpha_n) \in P_n \qquad \text{για κάθε } n,$$

οπότε $f(\overline{\alpha}) \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} P_n = P$. Αντίστροφα, αν $x \in P = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} P_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f_n[C_n]$, τότε για κάθε n υπάρχει $\alpha_n \in C_n$ με $f_n(\alpha_n) = x$. Επομένως, το $\overline{\alpha} = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι στοιχείο του C και επιπλέον $x = f_0(\alpha_0) = f(\overline{\alpha}) \in f[C]$. Άρα δείξαμε ότι $f[C] = P$.

Σχετικά με τον περιορισμό $f|C$, αν έχουμε $\overline{\alpha} = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}, \overline{\beta} = (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C$ και $f(\overline{\alpha}) = f(\overline{\beta})$, τότε $f_0(\alpha_0) = f_0(\beta_0)$ και από τον ορισμό του C προκύπτει ότι $f_n(\alpha_n) = f_n(\beta_n)$ για κάθε n. Επιπλέον, $\alpha_n, \beta_n \in C$ για κάθε n. Αφού ο περιορισμός $f_n|C_n$ είναι ένα-προς-ένα, συμπεραίνουμε ότι $\alpha_n = \beta_n$ για κάθε n, άρα $\overline{\alpha} = \overline{\beta}$.

2ο *Βήμα.* Δείχνουμε ότι $\mathcal{X} \setminus P \in \mathcal{A}_0$.

Θέτουμε $Q_n = \mathcal{X} \setminus P_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Κάθε Q_n ανήκει στην $\mathcal{A}$ γιατί το P_n ανήκει στην $\mathcal{A}$. Παρατηρούμε ότι

$$\mathcal{X} \setminus P = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\mathcal{X} \setminus P_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (Q_n \setminus \bigcup_{i<n} Q_i)\,.$$

Θέτουμε $R_n = Q_n \setminus \bigcup_{i<n} Q_n$, έτσι που τα R_n είναι ξένα ανά δύο και $\mathcal{X} \setminus P = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n$. Έπειτα παρατηρούμε ότι

$$R_n = Q_n \bigcap (\mathcal{X} \setminus \cup_{i<n} Q_i) = Q_n \bigcap \cap_{i<n}(\mathcal{X} \setminus Q_i) = Q_n \bigcap \cap_{i<n} P_i.$$

Τα σύνολα $Q_n, P_0, \dots, P_{n-1}$ ανήκουν στην $\mathcal{A}$. Συνεπώς από το 1ο Βήμα, η τομή τους ανήκει στην $\mathcal{A}_0$. Άρα κάθε R_n ανήκει στη $\mathcal{A}_0$.

Υπάρχει λοιπόν για κάθε n κλειστό σύνολο $B_n \subseteq \mathcal{N}$ και συνεχής συνάρτηση $g_n : \mathcal{N} \to \mathcal{X}$, έτσι ώστε $g_n[B_n] = R_n$ και ο περιορισμός $g_n|B_n$ είναι ένα-προς-ένα. Ορίζουμε το σύνολο $B \subseteq \mathbb{N} \times \mathcal{N}$ με

$$(n, \alpha) \in B \iff \alpha \in B_n.$$

και τη συνάρτηση

$$g : \mathbb{N} \times \mathcal{N} \to \mathcal{X} : g(n, \alpha) = g_n(\alpha).$$

Τότε το B είναι προφανώς κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{N} \times \mathcal{N}$ και g συνεχής.

Δείχνουμε ότι $g[B] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n$ και πως ο περιορισμός $g|B$ είναι ένα-προς-ένα. Αν το δείξουμε αυτό, τότε το 2ο Βήμα ολοκληρώνεται με τον παρακάτω τρόπο. Όπως είδαμε, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n = \mathcal{X} \setminus P$. Άρα το $\mathcal{X} \setminus P$ είναι η συνεχής ένα-προς-ένα εικόνα ενός κλειστού υποσυνόλου του $\mathbb{N} \times \mathcal{N}$. Ο τελευταίος χώρος είναι τετριμμένα τοπολογικά ισομορφικός με τον $\mathcal{N}$ μέσω της $(n, \alpha) \mapsto (n, \alpha(0), \alpha(1), \dots)$. Θα έχουμε επομένως ότι $\mathcal{X} \setminus P \in \mathcal{A}_0$.

Από τα Βήματα 1 και 2 προκύπτει άμεσα ότι $P \in \mathcal{A}$, που είναι και το ζητούμενο. Απομένει λοιπόν να δείξουμε τους πιο πάνω ισχυρισμούς για την g και το B.

Σχετικά με την ισότητα $g[B] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n$, για την ευθεία συμπερίληψη θεωρούμε $(n, \alpha) \in B$. Τότε $\alpha \in B_n$ και άρα $g(n, \alpha) = g_n(\alpha) \in g_n[B_n] = R_n$. Αντίστροφα, αν $x \in R_n = g_n[B_n]$ για κάποιο n, τότε υπάρχει $\alpha \in B_n$ με $g_n(\alpha) = x$. Επομένως ισχύει $(n, \alpha) \in B$ και $x = g_n(\alpha) = g(n, \alpha) \in g[B]$.

Σχετικά με τον περιορισμό $g|B$, θεωρούμε $(n, \alpha), (m, \beta) \in B$ με $g(n, \alpha) = g(m, \beta)$. Τότε $\alpha \in B_n$, $\beta \in B_m$ και $g_n(\alpha) = g_m(\beta)$. Επειδή $g_n(\alpha) \in g_n[B_n] = R_n$, $g_m(\beta) \in g_m[B_m] = R_m$ και τα R_i είναι ξένα ανά δύο, έχουμε αναγκαστικά ότι

$n = m$. Επομένως έχουμε $\alpha, \beta \in B_n$ και $g_n(\alpha) = g_n(\beta)$. Αφού ο περιορισμός $g|B_n$ είναι ένα-προς-ένα, προκύπτει ότι $\alpha = \beta$, επομένως $(n, \alpha) = (m, \beta)$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Ισχύει και το αντίστροφο του προηγούμενου θεωρήματος. Δίνουμε τη διατύπωση εδώ χωρίς απόδειξη (προς το παρόν), καθώς το ουσιαστικό επιχείρημα γι' αυτή είναι το Θεώρημα Διαχωρισμού του Lusin (Θεώρημα 5.2.1), το οποίο είναι ένα θεμελιώδες αποτέλεσμα που θα μελετήσουμε στο Κεφάλαιο 5.

Θεώρημα 4.3.3 (Luzin-Suslin [**15, 20**] - Στηρίζεται στο Θεώρημα Διαχωρισμού του Lusin 5.2.1). *Θεωρούμε Πολωνικούς χώρους $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, μια Borel-μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ και ένα Borel σύνολο $B \subseteq \mathcal{X}$. Αν ο περιορισμός $f|B$ είναι ένα-προς-ένα, τότε η εικόνα $f[B]$ είναι Borel υποσύνολο του $\mathcal{Y}$.*

Απόδειξη. Δείτε την απόδειξη που ακολουθεί το Πόρισμα 5.2.3. □

Στη συνέχεια, δίνουμε κάποια πορίσματα του Θεωρήματος 4.3.3. Επειδή δεν έχουμε αποδείξει ακόμα το τελευταίο, δίνουμε μια προειδοποίηση στους αναγνώστες ότι το πόρισμα που συζητάμε στηρίζεται στο Θεώρημα Διαχωρισμού του Lusin, το οποίο, όπως αναφέραμε πιο πάνω, είναι το αποτέλεσμα που δίνει ουσιαστικά το Θεώρημα 4.3.3.

Τα Θεωρήματα 4.3.2 και 4.3.3 δίνουν τον ακόλουθο χρήσιμο χαρακτηρισμό των Borel συνόλων.

Πρόταση 4.3.4 (Στηρίζεται στο Θεώρημα Διαχωρισμού του Lusin 5.2.1). *Δίνεται ένας Πολωνικός χώρος $\mathcal{X}$ και $P \subseteq \mathcal{X}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Το P είναι Borel σύνολο.*

(ii) *Το P είναι η συνεχής ένα-προς-ένα εικόνα ενός κλειστού υποσυνόλου του $\mathcal{N}$.*

(iii) *Το P είναι η συνεχής ένα-προς-ένα εικόνα ενός κλειστού υποσυνόλου κάποιου Πολωνικού χώρου $\mathcal{Y}$.*

(iv) *Το P είναι η ένα-προς-ένα εικόνα ενός Borel υποσυνόλου κάποιου Πολωνικού χώρου $\mathcal{Y}$ μέσω μιας Borel-μετρήσιμης συνάρτησης.*

Απόδειξη. Η κατεύθυνση (i) $\Longrightarrow$ (ii) είναι το Θεώρημα 4.3.2. Οι κατευθύνσεις (ii) $\Longrightarrow$ (iii) και (iii) $\Longrightarrow$ (iv) είναι προφανείς. Τέλος, η κατεύθυνση (iii) $\Longrightarrow$ (iv) είναι το Θεώρημα 4.3.3. □

Τέλος αναφέρουμε ένα ακόμα σχετιζόμενο αποτέλεσμα: σε όλες τις περιπτώσεις όπου έχουμε Borel-μετρήσιμες συναρτήσεις $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ που είναι ένα-προς-ένα σε ένα Borel σύνολο $B \subseteq \mathcal{X}$, η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : f[B] \to \mathcal{X}$ είναι επίσης Borel-μετρήσιμη. Ειδικότερα, με τον συμβολισμό του Θεωρήματος 4.3.2 η αντίστροφη συνάρτηση $(\pi|C)^{-1} : \pi[C] \to \mathcal{N}$ είναι Borel-μετρήσιμη. Αυτό προκύπτει από το Πόρισμα 5.2.4, το οποίο στηρίζεται επίσης στο Θεώρημα Διαχωρισμού του Lusin (5.2.1).

Ασκήσεις

Άσκηση 4.3.5. Κάθε υπεραριθμήσιμο Borel υποσύνολο Πολωνικού χώρου περιέχει ένα τοπολογικά ισομορφικό αντίτυπο του $2^{\mathbb{N}}$. Ειδικότερα, τα Borel υποσύνολα Πολωνικών χώρων περιέχουν μη κενά τέλεια υποσύνολα και ικανοποιούν την Υπόθεση του Συνεχούς.

Άσκηση 4.3.6. Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Τότε είτε η f είναι παραγωγίσιμη μόνο σε αριθμήσιμο πλήθος σημείων είτε υπάρχει ένα μη κενό τέλειο $P \subseteq [0, 1]$, έτσι ώστε η f να είναι παραρωγίσιμη σε κάθε $x \in P$.

Άσκηση 4.3.7 (Στηρίζεται στο Θεώρημα Διαχωρισμού του Lusin 5.2.1). Θεωρούμε δύο Πολωνικούς χώρους $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$, $(\mathcal{X}, \mathcal{T}')$ στο ίδιο σύνολο $\mathcal{X}$. Αν $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$, τότε $\mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{T}) = \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{T}')$, δηλαδή ένα σύνολο $B \subseteq \mathcal{X}$ είναι $\mathcal{T}$-Borel αν και μόνο αν είναι $\mathcal{T}'$-Borel.

Το Λήμμα 4.3.1 επεκτείνεται σε μηδενοδιάστατους Πολωνικούς χώρους:

Άσκηση 4.3.8. Κάθε G_δ υποσύνολο P ενός μηδενοδιάστατου Πολωνικού χώρου είναι η συνεχής ένα-προς-ένα εικόνα ενός κλειστού $C \subseteq \mathcal{N}$ (η συνάρτηση είναι ορισμένη σε όλο τον χώρο του $\mathcal{N}$) και η αντίστροφη συνάρτηση από P στο C είναι συνεχής.

Η υπόθεση το P να είναι G_δ στην προηγούμενη άσκηση είναι απαραίτητη:

Άσκηση 4.3.9. Δίνονται δύο υποσύνολα Πολωνικών χώρων P και C με το C κλειστό. Αν το P είναι συνεχής ένα-προς-ένα εικόνα του C και η αντίστροφη συνάρτηση από το P στο C είναι συνεχής, τότε το P είναι G_δ στον Πολωνικό χώρο που λαμβάνει τιμές η συνάρτηση.

4.4. Οι κλάσεις Borel συνόλων υπερπεπερασμένης τάξης

Η κλάση των Borel συνόλων ταξινομείται σε επιμέρους κλάσεις ξεκινώντας από τα ανοικτά σύνολα και εφαρμόζοντας τους τελεστές της αριθμήσιμης ένωσης και του συμπληρώματος. Τα πρώτα βήματα αυτής της ταξινόμησης είναι οι κλάσεις των $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ συνόλων. Όπως είδαμε όμως αυτά δεν εξαντλούν όλα τα Borel σύνολα (Άσκηση 4.1.11). Για να γίνει αυτό χρειάζεται να προχωρήσουμε στους *διατακτικούς αριθμούς* ξ και να ορίσουμε τις αντίστοιχες κλάσεις $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_\xi$.

Για να δούμε καλύτερα την ιδέα, ας επιχειρήσουμε να ορίσουμε τη $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_\omega$, δηλαδή την κλάση που έρχεται αμέσως μετά από όλες τις $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$. Ο ω δεν είναι ο αμέσως επόμενος οποιουδήποτε φυσικού αριθμού, άρα δεν έχουμε μια συγκεκριμένη δυϊκή κλάση $\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_n$, οι αριθμήσιμες ενώσεις της οποίας θα μας δώσουν την $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_\omega$, όπως ορίζουμε την $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+1}$ από την $\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_n$. Από την άλλη όμως, σύμφωνα με την Άσκηση 3.3.12, τα $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+1}$ σύνολα είναι οι αριθμήσιμες ενώσεις υποσυνόλων B_i, $i \in \mathbb{N}$, του ίδιου χώρου όπου κάθε B_i είναι $\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_{n_i}$ σύνολα για κάποιο $n_i \leqslant n$. Δηλαδή η $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+1}$ ορίζεται μέσα από αριθμήσιμες ενώσεις συνόλων από τις δυϊκές κλάσεις με δείκτη μικρότερο του $n+1$.

Με βάση αυτή την παρατήρηση, θα πούμε ότι ένα $A \subseteq \mathcal{X}$ ανήκει στην $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_\omega$ αν και μόνο αν $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$, όπου κάθε B_i είναι $\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_{n_i}$ σύνολο για κάποιο $n_i < \omega$. Στο βήμα $\omega + 1$ μπορούμε να κινηθούμε όπως και στο $n+1$, δηλαδή να ορίσουμε $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_{\omega+1} = \bigvee_{\mathbb{N}} \utilde{\mathbf{\Pi}}^0_\omega$, όπου φυσικά $\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_\omega = \neg\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_\omega$. Μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε τον ίδιο τρόπο με την $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_\omega$: να πούμε δηλαδή ότι ένα $A \subseteq \mathcal{X}$ ανήκει στην $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_{\omega+1}$ αν και μόνο αν $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$, όπου κάθε B_i είναι $\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_{\xi_i}$ σύνολο για κάποιο $\xi_i < \omega + 1$. Όπως και με την περίπτωση του $n+1$, προκύπτει ότι αυτοί οι δύο τρόποι στο βήμα $\omega + 1$ δίνουν την ίδια κλάση συνόλων $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_{\omega+1}$ (Άσκηση 4.4.11). Με βάση όλα αυτά, επεκτείνουμε τον ορισμό των κλάσεων Borel πεπερασμένης τάξης ως ακολούθως:

Ορισμός 4.4.1 ([**6, 8, 34, 14**]). Ορίζουμε με αναδρομή στον διατακτικό αριθμό ξ την κλάση $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_\xi$ με τον εξής τρόπο:

$$\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_1 = \text{η κλάση όλων των ανοικτών συνόλων}$$

$$\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_1 = \mathrm{c}\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_1 = \text{η κλάση όλων των κλειστών συνόλων}$$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & \boldsymbol{\Sigma}^0_1(\mathcal{X}) & & \boldsymbol{\Sigma}^0_n(\mathcal{X}) & & & & \boldsymbol{\Sigma}^0_\omega(\mathcal{X}) & & \boldsymbol{\Sigma}^0_\xi(\mathcal{X}) & \\
 \rotatebox{45}{$\subseteq$} & & & & & & \rotatebox{45}{$\subseteq$} & & & & \\
\boldsymbol{\Delta}^0_1(\mathcal{X}) & & \overset{\subseteq}{\cdots} & & \overset{\subseteq}{\cdots} & \boldsymbol{\Delta}^0_\omega(\mathcal{X}) & & & \overset{\subseteq}{\cdots} & & \overset{\subseteq}{\cdots} \\
 \rotatebox{-45}{$\subseteq$} & & & & & & \rotatebox{-45}{$\subseteq$} & & & & \\
 & \boldsymbol{\Pi}^0_1(\mathcal{X}) & & \boldsymbol{\Pi}^0_n(\mathcal{X}) & & & & \boldsymbol{\Pi}^0_\omega(\mathcal{X}) & & \boldsymbol{\Pi}^0_\xi(\mathcal{X}) &
\end{array}
$$

Διαγραμμα 1. Η ιεραρχία των Borel υποσυνόλων του $\mathcal{X}$.

και για $\xi > 1$,

$$\boldsymbol{\Sigma}^0_\xi = \bigvee\nolimits_{\mathbb{N}} \bigcup\nolimits_{\zeta<\xi} \boldsymbol{\Pi}^0_\zeta$$

$$\boldsymbol{\Pi}^0_\xi = \mathrm{c}\boldsymbol{\Sigma}^0_\xi.$$

Με άλλα λόγια, ένα $A \subseteq \mathcal{X}$ ανήκει στην $\boldsymbol{\Sigma}^0_\xi$, όπου $\xi > 1$ αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ υποσυνόλων του $\mathcal{X}$ με $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$ και κάθε B_i ανήκει στην $\boldsymbol{\Pi}^0_{\xi_i}$ για κάποιο $\xi_i < \xi$. Επιπλέον, έχουμε ότι το $A \subseteq \mathcal{X}$ ανήκει στην $\boldsymbol{\Pi}^0_\xi$ αν και μόνο αν το συμπλήρωμα $\mathcal{X} \setminus A$ ανήκει στην $\boldsymbol{\Sigma}^0_\xi$.

Ως συνήθως, ορίζουμε

$$\boldsymbol{\Delta}^0_\xi = \boldsymbol{\Sigma}^0_\xi \cap \boldsymbol{\Pi}^0_\xi.$$

Δηλαδή ένα $P \subseteq \mathcal{X}$ ανήκει στη $\boldsymbol{\Delta}^0_\xi$ αν και μόνο αν τα σύνολα P και $\mathcal{X} \setminus P$ ανήκουν στη $\boldsymbol{\Pi}^0_\xi$. Όπως προηγουμένως, μπορεί να δει κανείς (Άσκηση 4.4.10) ότι

$$\boldsymbol{\Sigma}^0_\xi = \bigwedge\nolimits_{\mathbb{N}} \left(\bigcup\nolimits_{\zeta<\xi} \boldsymbol{\Sigma}^0_\zeta\right).$$

Οι κλάσεις $\boldsymbol{\Sigma}^0_\xi$ είναι οι **κλάσεις των Borel συνόλων** (υπερπεπερασμένης τάξης για $\xi \geqslant \omega$), ενώ οι $\boldsymbol{\Pi}^0_\xi$ και $\boldsymbol{\Pi}^0_\xi$ είναι οι **δυϊκές** (dual) και **αμφίσημες** (ambiguous) αντίστοιχα κλάσεις Borel συνόλων.

Η συλλογή όλων αυτών των κλάσεων είναι η **ιεραρχία των Borel συνόλων** και όπως πριν με τον όρο **ιεραρχία των Borel υποσυνόλων του** $\mathcal{X}$, όπου $\mathcal{X}$ είναι Πολωνικός χώρος $\mathcal{X}$, εννοούμε τη συλλογή όλων των οικογενειών υποσυνόλων του $\mathcal{X}$ που προκύπτουν από τις προηγούμενες κλάσεις.

Σύμφωνα με την Άσκηση 3.3.12, όταν $\xi < \omega$ ο πιο πάνω ορισμός δίνει τις γνωστές κλάσεις $\boldsymbol{\Sigma}^0_n$ του Ορισμού 3.3.1, εξού και ο ίδιος συμβολισμός.

Ισχύουν οι αντίστοιχοι εγκλεισμοί με την Πρόταση 3.3.3.

Πρόταση 4.4.2. *Για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και κάθε $1 \leqslant \eta < \xi$ έχουμε*

$$\boldsymbol{\Delta}^0_\eta(\mathcal{X}) \subseteq \boldsymbol{\Sigma}^0_\eta(\mathcal{X}) \subseteq \boldsymbol{\Delta}^0_\xi(\mathcal{X}).$$

Δείτε το Διάγραμμα 1.

Απόδειξη. Ο εγκλεισμός $\boldsymbol{\Delta}^0_\eta(\mathcal{X}) \subseteq \boldsymbol{\Sigma}^0_\eta(\mathcal{X})$ είναι προφανής, γι' αυτό δείχνουμε τον δεύτερο με επαγωγή στον $\xi \geqslant 2$. Για $\xi = 2$ έχουμε για κάθε $1 \leqslant \eta < \xi$ ότι $\eta = 1$ και, όπως έχουμε ήδη δείξει, $\boldsymbol{\Sigma}^0_1(\mathcal{X}) \subseteq \boldsymbol{\Delta}^0_2(\mathcal{X})$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $\xi > 2$ ισχύει

$$1 \leqslant \eta < \xi' < \xi \implies \boldsymbol{\Sigma}^0_\eta(\mathcal{X}) \subseteq \boldsymbol{\Delta}^0_{\xi'}(\mathcal{X})$$

και παίρνουμε $\eta < \xi$. Θα δείξουμε ότι $\boldsymbol{\Sigma}^0_\eta(\mathcal{X}) \subseteq \boldsymbol{\Delta}^0_\xi(\mathcal{X})$.

Παίρνουμε $A \subseteq \mathcal{X}$ που είναι $\boldsymbol{\Sigma}^0_\eta$. Τότε υπάρχουν $\eta_i < \eta$, $i \in \mathbb{N}$ και $B_i \in \boldsymbol{\Pi}^0_{\eta_i}(\mathcal{X})$ με $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$. Από την Επαγωγική Υπόθεση εφαρμοσμένη στα $\eta_i < \eta$

έχουμε $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_{\eta_i}(\mathcal{X}) \subseteq \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_{\eta}(\mathcal{X})$, άρα κάθε B_i είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_{\eta}$ υποσύνολο του $\mathcal{X}$. Από τον ορισμό της $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{\xi}$ παίρνοντας $\xi_i = \eta < \xi$, $i \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι το σύνολο $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$ είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{\xi}$ υποσύνολο του $\mathcal{X}$.

Για να δείξουμε ότι το A είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_{\xi}$ υποσύνολο του $\mathcal{X}$, παίρνουμε απλά $C_i = A$ και $\zeta_i = \eta < \xi$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Τότε $A = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} C_i$ και το A είναι αριθμήσιμη τομή $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{\eta_i}$ υποσυνόλων του $\mathcal{X}$ με $\eta_i < \xi$. Από την Άσκηση 4.4.10 το A είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_{\xi}$ υποσύνολο του $\mathcal{X}$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Η επόμενη πρόταση μας λέει ότι οι κλάσεις $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{\xi}$ αποτελούνται από Borel σύνολα και πως κάθε Borel σύνολο ανήκει σε μία $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{\xi}$ για κάποιον *αριθμήσιμο* διατακτικό αριθμό ξ.

Πρόταση 4.4.3. *Θεωρούμε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$. Τότε για κάθε διατακτικό αριθμό $\xi \geqslant 1$ έχουμε $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{\xi}(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{X})$. Επιπλέον ισχύει*

$$\mathcal{B}(\mathcal{X}) = \bigcup_{1\leqslant\xi<\omega_1} \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{\xi}(\mathcal{X}) = \bigcup_{1\leqslant\xi<\omega_1} \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_{\xi}(\mathcal{X}).$$

Ειδικότερα, η ιεραρχία των $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{\xi}$ συνόλων εξαντλείται στο ω_1-βήμα.

Απόδειξη. Ο πρώτος ισχυρισμός αποδεικνύεται με επαγωγή στο ξ. Για $\xi = 1$ προφανώς κάθε $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{1}$ υποσύνολο του $\mathcal{X}$ είναι Borel. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $\xi > 1$ έχουμε ότι για κάθε $1 \leqslant \eta < \xi$ ισχύει $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{\eta}(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{X})$. Δείχνουμε την ίδια συμπερίληψη για το ξ στη θέση του η. Παίρνουμε $A \in \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{\xi}(\mathcal{X})$, τότε υπάρχει ακολουθία $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ από $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_{\xi_i}$, όπου $\xi_i < \xi$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$, με $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$. Κάθε σύνολο $\mathcal{X} \setminus B_i$ ανήκει στην $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{\xi}(\mathcal{X})$. Επομένως από την Επαγωγική Υπόθεση έχουμε ότι το $\mathcal{X} \setminus B_i$ είναι Borel υποσύνολο του $\mathcal{X}$. Προκύπτει τότε άμεσα ότι κάθε B_i είναι Borel υποσύνολο του $\mathcal{X}$, όπως επίσης και το $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$. Αυτό ολοκληρώνει το Επαγωγικό Βήμα.

Σχετικά με τον δεύτερο ισχυρισμό παρατηρούμε αρχικά ότι

$$\bigcup_{1\leqslant\xi<\omega_1} \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{\xi}(\mathcal{X}) = \bigcup_{1\leqslant\xi<\omega_1} \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_{\xi}(\mathcal{X}).$$

Το πιο πάνω είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 4.4.2 (αν $\xi < \omega_1$ τότε προφανώς $\xi + 1 < \omega_1$).

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι η οικογένεια $\mathcal{A} = \bigcup_{1\leqslant\xi<\omega_1} \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{\xi}(\mathcal{X})$ είναι σ-άλγεβρα που περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathcal{X}$. Από αυτό προκύπτει ότι $\mathcal{B}(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{A}$ και από τον πρώτο ισχυρισμό προκύπτει ότι $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{X})$.

Προφανώς, η $\mathcal{A}$ περιέχει τα ανοικτά σύνολα, οπότε αρκεί να δείξουμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή ως προς το συμπλήρωμα στο $\mathcal{X}$ και την αριθμήσιμη ένωση υποσυνόλων του $\mathcal{X}$. Θεωρούμε $A \in \mathcal{A}$ και $\xi < \omega_1$ με $A \in \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{\xi}(\mathcal{X})$. Τότε

$$\mathcal{X} \setminus A \in \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_{\xi}(\mathcal{X}) \subseteq \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{\xi+1}(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{A},$$

όπου πιο πάνω χρησιμοποιήσαμε την Πρόταση 4.4.2 και ότι $\xi + 1 < \omega_1$.

Για την αριθμήσιμη ένωση θεωρούμε μια ακολουθία $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ υποσυνόλων του $\mathcal{X}$ με $A_i \in \mathcal{A}$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Τότε για κάθε i υπάρχει $\xi_i < \omega_1$ με $A_i \in \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{\xi_i}(\mathcal{X})$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε $\xi = \sup_{i\in\mathbb{N}} \xi_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \xi_i$ έτσι που από την Πρόταση 4.4.2 έχουμε $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{\xi}(\mathcal{X})$. Η κρίσιμη παρατήρηση είναι ότι ο ξ είναι αριθμήσιμος διατακτικός ως αριθμήσιμη ένωση διατακτικών αριθμών. Έχουμε δηλαδή ότι $\xi < \omega_1$, και άρα $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{\xi}(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{A}$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Αν συνδυάσουμε τις τελευταίες δύο προτάσεις με το Πόρισμα 4.1.7 (κάθε Borel σύνολο είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^1_1$) προκύπτει η εικόνα συμπεριλήψεων του Διαγράμματος 2. (Υπενθυμίζουμε ότι τα Borel σύνολα είναι ακριβώς τα $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^1_1$, την απόδειξη του οποίου θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο.)

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}^0_1(\mathcal{X}) \arrow[dr, phantom, "\subseteq"] & & \underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}^0_\xi(\mathcal{X}) \arrow[dr, phantom, "\subseteq"] & & & \underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}^1_1(\mathcal{X}) \arrow[dr, phantom, "\subseteq"] & & \underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}^1_m(\mathcal{X}) \arrow[dr, phantom, "\subseteq"] & \\
\underset{\sim}{\boldsymbol{\Delta}}^0_1(\mathcal{X}) \arrow[ur, phantom, "\subseteq"] \arrow[dr, phantom, "\subseteq"] & & \cdots & & \cdots & \underset{\sim}{\boldsymbol{\Delta}}^1_1(\mathcal{X}) \arrow[ur, phantom, "\subseteq"] \arrow[dr, phantom, "\subseteq"] & & \cdots & & \cdots \\
 & \underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}^0_1(\mathcal{X}) \arrow[ur, phantom, "\subseteq"] & & \underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}^0_\xi(\mathcal{X}) \arrow[ur, phantom, "\subseteq"] & & & \underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}^1_1(\mathcal{X}) \arrow[ur, phantom, "\subseteq"] & & \underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}^1_m(\mathcal{X}) \arrow[ur, phantom, "\subseteq"] &
\end{tikzcd}$$

Διαγραμμα 2. Οι ιεραρχίες των Borel και των προβολικών υποσυνόλων του $\mathcal{X}$.

Οι ιδιότητες κλειστότητας των κλάσεων Borel συνόλων υπερπεπερασμένης τάξης είναι οι ίδιες με αυτών της πεπερασμένης.

Λήμμα 4.4.4. *Οι κλάσεις $\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}^0_\xi$, $\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}^0_\xi$ και $\underset{\sim}{\boldsymbol{\Delta}}^0_\xi$, όπου το ξ είναι διατακτικός αριθμός, είναι κλειστές ως προς $\vee$, &, και συνεχή αντικατάσταση.*

Απόδειξη. Ομοίως με την απόδειξη του Λήμματος 3.3.4 με τη διαφορά ότι εδώ εφαρμόζουμε υπερπεπερασμένη επαγωγή στο ξ.

Οι ιδιότητες κλειστότητας των κλάσεων $\underset{\sim}{\boldsymbol{\Delta}}^0_\xi$ είναι άμεσες από τις αντίστοιχες των κλάσεων $\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}^0_\xi$ και $\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}^0_\xi$ και οι ιδιότητες κλειστότητας των $\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}^0_\xi$ είναι άμεσες από τις αντίστοιχες των $\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}^0_\xi$. Επομένως, ασχολούμαστε μόνο με τις τελευταίες.

Όσον αφορά την κλειστότητα ως προς συνεχή αντικατάσταση, υποθέτουμε ότι για κάποιο ξ έχουμε ότι για κάθε $1 \leqslant \eta < \xi$ η κλάση $\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}^0_\eta$ είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση και δείχνουμε το ίδιο για την $\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}^0_\xi$. Θεωρούμε λοιπόν μια συνεχή $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ και $A \subseteq \mathcal{Y}$ που ανήκει στην κλάση $\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}^0_\xi$. Τότε έχουμε $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$, όπου κάθε A_i είναι $\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}^0_{\eta_i}$ υποσύνολο του $\mathcal{Y}$, και από την Επαγωγική Υπόθεση (στην ισοδύναμή της μορφή για τις κλάσεις $\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}^0_\eta$ για $1 \leqslant \eta < \xi$) κάθε σύνολο $f^{-1}[A_i]$ είναι $\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}^0_{\eta_i}$ υποσύνολο του $\mathcal{X}$. Συνεπώς

$$f^{-1}[A] = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f^{-1}[A_i] \in \underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}^0_\xi(\mathcal{X}).$$

Όσον αφορά την κλειστότητα της $\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}^0_\xi$ ως προς $\vee$ και ως προς &: αν έχουμε $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$, $B = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$ και $A_i \in \underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}^0_{\eta_i}(\mathcal{X})$, $B_i \in \underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}^0_{\eta'_i}(\mathcal{X})$, όπου $\eta_i, \eta'_i < \xi$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$ και $\mathcal{X}$ Πολωνικός χώρος, τότε

$$A \cup B = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}(A_i \cup B_i) \tag{4.4}$$

$$A \cap B = \bigcup_{i,j\in\mathbb{N}}(A_i \cap B_j). \tag{4.5}$$

Θέτουμε $\zeta_i = \max\{\eta_i, \eta'_i\} < \xi$ και $\xi_{i,j} = \max\{\eta_i, \eta'_j\} < \xi$ για κάθε i, j. Από τις συμπεριλήψεις των κλάσεων (Πρόταση 4.4.2) έχουμε ότι τα $A_i, B_i \in \underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}^0_{\zeta_i}$ και $A_i, B_j \in \underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}^0_{\xi_{i,j}}$ για κάθε i, j. Από την Επαγωγική Υπόθεση παίρνουμε ότι

$$A_i \cup B_i \in \underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}^0_{\zeta_i}(\mathcal{X}) \quad \text{και} \quad A_i \cap B_j \in \underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}^0_{\xi_{i,j}}(\mathcal{X})$$

για κάθε i, j. Από τις (4.4) και (4.5) έχουμε ότι τα σύνολα $A \cup B$ και $A \cap B$ είναι αριθμήσιμες ενώσεις στοιχείων της οικογένειας $\bigcup_{\zeta<\xi} \underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}^0_\zeta(\mathcal{X})$ και είναι συνεπώς $\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}^0_\xi$ υποσύνολα του $\mathcal{X}$. ▫

Όπως με όλες τις προηγούμενες κλάσεις συνόλων που μελετήσαμε, έτσι και οι κλάσεις $\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}^0_\xi$, όπου ξ διατακτικός αριθμός, ικανοποιούν την ιδιότητα (3.3) της Πρότασης 3.2.8.

Λήμμα 4.4.5. *Θεωρούμε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$, έναν διατακτικό αριθμό ξ και μια ακολουθία $(A_s)_{s\in\mathbb{N}}$ από $\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}^0_\xi$ υποσύνολα του $\mathcal{X}$. Τότε το σύνολο*

$$A = \{(x, s) \in \mathcal{X} \times \mathbb{N} \mid x \in A_s\}$$

είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_\xi$.

Αντίστροφα, για κάθε $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_\xi$ *σύνολο* $B \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ *και κάθε* $s \in \mathbb{N}$ *το σύνολο*

$$B_s = \{x \in \mathcal{X} \mid (x, s) \in B\}$$

είναι επίσης $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_\xi$.

Απόδειξη. Όμοια με την απόδειξη του Λήμματος 3.3.6 και της Παρατήρησης 3.3.5. Πέρα από τον ορισμό της $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_\xi$ χρησιμοποιούμε ότι η τελευταία κλάση είναι κλειστή ως προς & και ως προς συνεχή αντικατάσταση. ◻

Θεώρημα 4.4.6 (Οι Θεμελιώδεις Ιδιότητες Κλειστότητας των κλάσεων Borel συνόλων). *Για κάθε διατακτικό αριθμό* ξ *οι κλάσεις* $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_\xi$, $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_\xi$ *και* $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^0_\xi$ *είναι κλειστές ως προς συνεχή αντικατάσταση, καθώς και ως προς τους τελεστές* $\vee$, &, $\exists^{\leqslant}$, $\forall^{\leqslant}$, $\bigvee_{\leqslant}$ *και* $\bigwedge_{\leqslant}$.

Οι κλάσεις $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_\xi$ *είναι επιπλέον κλειστές ως προς τους τελεστές*

$\bigvee_{\mathbb{N}}$, $\exists^{\mathbb{N}}$ *και γενικότερα* $\exists^Y$, *όπου* Y *είναι* ***αριθμήσιμος*** *Πολωνικός χώρος.*

Οι κλάσεις $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_\xi$ *είναι επιπλέον κλειστές ως προς τους τελεστές*

$\bigwedge_{\mathbb{N}}$, $\forall^{\mathbb{N}}$ *και γενικότερα* $\forall^Y$, *όπου* Y *είναι* ***αριθμήσιμος*** *Πολωνικός χώρος.*

Οι κλάσεις $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^0_\xi$ *είναι επιπλέον κλειστές ως προς τον τελεστή του συμπληρώματος* c.

Απόδειξη. Όπως η απόδειξη του Θεωρήματος 3.3.8. Διευκρινίζουμε ότι ισχύει το αντίστοιχο της Άσκησης 3.4.12: αν Γ είναι μία από τις κλάσεις $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_\xi$, $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_\xi$, ο ισχυρισμός πως η Γ είναι κλειστή ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$ και $\bigvee_{\leqslant}$ είναι ισοδύναμος με τον ισχυρισμό ότι η Γ είναι κλειστή ως προς $\exists^{\mathbb{N}}$ και $\exists^{\leqslant}$ αντίστοιχα. Ομοίως ο ισχυρισμός πως η Γ είναι κλειστή ως προς $\bigwedge_{\mathbb{N}}$ και $\bigwedge_{\leqslant}$ είναι ισοδύναμος με τον ισχυρισμό ότι η Γ είναι κλειστή ως προς $\forall^{\mathbb{N}}$ και $\forall^{\leqslant}$ αντίστοιχα. Η απόδειξη είναι άμεση από το Λήμμα 4.4.5, το Πόρισμα 3.2.9 και την Πρόταση 3.2.10.

◻

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι η ιεραρχία $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_\xi$, $\xi < \omega_1$, δεν καταρρέει στους υπεραριθμήσιμους Πολωνικούς χώρους. Όπως με την περίπτωση των κλάσεων Borel συνόλων πεπερασμένης τάξης, θα χρησιμοποιήσουμε καθολικά σύνολα.

Πρόταση 4.4.7. *Για κάθε αριθμήσιμο διατακτικό* ξ *οι κλάσεις* $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_\xi$ *και* $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_\xi$ *είναι* $2^{\mathbb{N}}$*-παραμετρικοποιήσιμες.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με το Λήμμα 3.6.3, η $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_\xi$ είναι $2^{\mathbb{N}}$-παραμετρικοποιήσιμη αν και μόνο αν η $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_\xi$ είναι $2^{\mathbb{N}}$-παραμετρικοποιήσιμη.

Δείχνουμε το ζητούμενο με επαγωγή στο ξ. Για $\xi = 1$ το ζητούμενο έχει αποδειχθεί στην Πρόταση 3.6.4. Υποθέτουμε ότι για κάποιο μη μηδενικό $\xi < \omega_1$ έχουμε ότι για κάθε $1 \leqslant \zeta < \xi$ η κλάση $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_\zeta$ είναι $2^{\mathbb{N}}$-παραμετρικοποιήσιμη. Παίρνουμε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και κατασκευάζουμε ένα $G \subseteq 2^{\mathbb{N}} \times \mathcal{X}$ που είναι $2^{\mathbb{N}}$-καθολικό για την $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_\xi(\mathcal{X})$.

Αρχικά απαριθμούμε

$$\xi = \{\zeta_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

και έπειτα με εφαρμογή της Επαγωγικής Υπόθεσης θεωρούμε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ένα $G^n \subseteq 2^{\mathbb{N}} \times \mathcal{X}$ που είναι $2^{\mathbb{N}}$-καθολικό για την $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{\zeta_n}(\mathcal{X})$. Ορίζουμε $G \subseteq 2^{\mathbb{N}} \times \mathcal{X}$ ως εξής:

$$(\alpha, x) \in G \iff \exists n \; ((\alpha)_n, x) \notin G^n.$$

Για κάθε n το σύνολο $H_n \subseteq 2^{\mathbb{N}} \times \mathcal{X}$ με

$$(\alpha, x) \in H_n \iff ((\alpha)_n, x) \notin G^n$$

είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_{\zeta_n}$ από την κλειστότητα της τελευταίας κλάσης ως προς συνεχή αντικατάσταση. Προφανώς ισχύει $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n$ και επειδή $\zeta_n < \xi$ για κάθε n, έχουμε ότι το G είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_\xi$ υποσύνολο του $\mathcal{X}$.

Επειδή η κλάση $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_\xi$ είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση έχουμε ότι για κάθε $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$ η τομή G_α είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_\xi$ υποσύνολο του $\mathcal{X}$. Μένει να δείξουμε ότι για κάθε $P \in \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_\xi(\mathcal{X})$ υπάρχει $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$ με $P = G_\alpha$.

Θεωρούμε επομένως ένα $P \subseteq \mathcal{X}$ που ανήκει στην $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_\xi$. Τότε υπάρχει ακολουθία $(P_i)_{i\in\mathbb{N}}$ με $P_i \in \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_{\xi_i}(\mathcal{X})$, όπου $\xi_i < \xi$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$ και $P = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} P_i$. Για κάθε $i \in \mathbb{N}$, εφόσον $\xi_i < \xi$ υπάρχει n_i με $\xi_i = \zeta_{n_i}$ και επειδή το P_i είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_{\zeta_i}$ σύνολο υπάρχει $\alpha_{n_i} \in 2^{\mathbb{N}}$ με $\mathcal{X} \setminus P_i = G^{n_i}_{\alpha_{n_i}}$. Αν $n \notin \{n_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ επιλέγουμε ένα $\alpha_n \in 2^{\mathbb{N}}$ με $G^n_{\alpha_n} = \mathcal{X}$. Αυτό είναι εφικτό γιατί ο $\mathcal{X}$ είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{\zeta_n}$ υποσύνολο του $\mathcal{X}$. Επομένως έχουμε μια ακολουθία $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με την ιδιότητα

$$\begin{cases} P_i = \mathcal{X} \setminus G^{n_i}_{\alpha_{n_i}}, & \text{αν } n = n_i \text{ για κάποιο } i \in \mathbb{N}, \\ \varnothing = \mathcal{X} \setminus G^{n_i}_{\alpha_{n_i}}, & \text{αν } n \notin \{n_i \mid i \in \mathbb{N}\}. \end{cases}$$

Τέλος, θεωρούμε ένα $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$ με $(\alpha)_n = \alpha_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και έχουμε

$$\begin{aligned} x \in P &\iff \exists i\ x \in P_i \\ &\iff \exists i\ x \notin G^{n_i}_{\alpha_{n_i}} \\ &\iff \exists n\ x \notin G^n_{\alpha_n} \\ &\iff \exists n\ ((\alpha)_n, x) \notin G^n \\ &\iff (\alpha, x) \in G \end{aligned}$$

για κάθε $x \in \mathcal{X}$. Επομένως έχουμε $P = G_\alpha$ και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. ▫

Όπως με τις κλάσεις Borel συνόλων πεπερασμένης τάξης, μπορούμε με τη βοήθεια της προηγούμενης πρότασης να βρούμε $\mathcal{Y}$-καθολικά σύνολα για τις κλάσεις Borel συνόλων υπερπεπερασμένης τάξης, όπου $\mathcal{Y}$ είναι υπεραριθμήσιμος Πολωνικός χώρος.

Πρόταση 4.4.8. *Για κάθε υπεραριθμήσιμο Πολωνικό χώρο $\mathcal{Y}$ οι κλάσεις $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_\xi$, $1 \leqslant \xi < \omega_1$, είναι $\mathcal{Y}$-παραμετρικοποιήσιμες.*

Απόδειξη. Από την Πρόταση 3.6.5 αρκεί να υποθέσουμε ότι $\xi \geqslant \omega$, έτσι που κάθε κλειστό σύνολο είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_\xi$. Η απόδειξη είναι η ίδια με αυτήν της Πρότασης 3.6.5 για τις $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$, όπου $n \geqslant 2$. Δίνουμε μερικές λεπτομέρειες.

Θεωρούμε έναν συνεχή μονομορφισμό $\tau : 2^{\mathbb{N}} \rightarrowtail \mathcal{Y}$ και για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ από την Πρόταση 4.4.7 υπάρχει ένα $G^\xi \subseteq 2^{\mathbb{N}} \times \mathcal{X}$ που είναι $2^{\mathbb{N}}$-καθολικό για την $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_\xi(\mathcal{X})$. Ορίζουμε $H \subseteq \mathcal{Y} \times \mathcal{X}$,

$$(y, x) \in H \iff y \in \tau[2^{\mathbb{N}}] \ \& \ (\tau^{-1}(y), x) \in G^\xi.$$

Τότε το H είναι $\mathcal{Y}$-καθολικό για την $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_\xi(\mathcal{X})$. ▫

Θεώρημα 4.4.9. *Για κάθε υπεραριθμήσιμο Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και κάθε αριθμήσιμο διατακτικό ξ έχουμε*

$$\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_\xi(\mathcal{X}) \neq \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_\xi(\mathcal{X}).$$

Επομένως, οι εγκλεισμοί της Πρότασης 4.4.2 είναι γνήσιοι,

$$\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^0_\xi(\mathcal{X}) \subsetneq \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_\xi(\mathcal{X}) \subsetneq \underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^0_{\xi+1}(\mathcal{X})$$

και

$$\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^0_\xi(\mathcal{X}) \subsetneq \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_\xi(\mathcal{X}) \subsetneq \underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^0_{\xi+1}(\mathcal{X}).$$

Δείτε το Διάγραμμα 3.

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_1(\mathcal{X}) & & \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n(\mathcal{X}) & & & \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_\omega(\mathcal{X}) & & \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_\xi(\mathcal{X}) & \\
 \subsetneq & & & & & \subsetneq & & & & \\
 \underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^0_1(\mathcal{X}) & & \overset{\subsetneq}{\cdots} & & \overset{\subsetneq}{\cdots} & \underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^0_\omega(\mathcal{X}) & & \overset{\subsetneq}{\cdots} & & \overset{\subsetneq}{\cdots} \\
 \subsetneq & & & & & \subsetneq & & & & \\
 & \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_1(\mathcal{X}) & & \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n(\mathcal{X}) & & & \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_\omega(\mathcal{X}) & & \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_\xi(\mathcal{X}) &
\end{array}$$

Διαγραμμα 3. Οι γνήσιοι εγκλεισμοί της ιεραρχίας των Borel συνόλων για υπεραριθμήσιμο $\mathcal{X}$.

Απόδειξη. Όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.6.7 εφαρμόζοντας την Πρόταση 4.4.8 για να βρούμε ένα $G \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ που είναι $\mathcal{X}$-καθολικό για την $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_\xi(\mathcal{X})$ και το Λήμμα 3.6.6. ▫

Ασκήσεις

Άσκηση 4.4.10. Για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και κάθε διατακτικό αριθμό ξ έχουμε ότι ένα σύνολο B ανήκει στην $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_\xi$ αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ υποσυνόλων του $\mathcal{X}$ με $A_i \in \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{\xi_i}$ για κάποια $\xi_i < \xi$, $i \in \mathbb{N}$ και $B = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i$.

Άσκηση 4.4.11. Για κάθε διατακτικό αριθμό ξ ισχύει

$$\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{\xi+1} = \bigvee\nolimits_{\mathbb{N}} \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_\xi = \exists^{\mathbb{N}}\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_\xi$$

και

$$\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_{\xi+1} = \bigwedge\nolimits_{\mathbb{N}} \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_\xi = \forall^{\mathbb{N}}\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_\xi \ .$$

Άσκηση 4.4.12. Δώστε το παράδειγμα ενός $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_\omega$ υποσυνόλου του $\mathcal{N}$ που δεν ανήκει στην κλάση $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n(\mathcal{N})$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Αναλυτικά σύνολα

Σύνοψη:
- Μελέτη της κλάσης των αναλυτικών συνόλων σε Πολωνικούς χώρους.
- Το Θεώρημα Διαχωρισμού του Lusin και το Θεώρημα του Suslin.
- Το Θεώρημα Τέλειου Συνόλου.
- Δένδρα και Διάταξη.
- Το Θεώρημα Kunen-Martin.
- Καθολική μετρησιμότητα των αναλυτικών συνόλων.

Προαπαιτούμενη γνώση:
- Πολωνικοί χώροι και δένδρα.
- Αναλυτικά σύνολα και οι τελεστές από το Κεφάλαιο 3.
- Borel σύνολα.
- Διατακτικοί αριθμοί (μόνο στο Θεώρημα Kunen-Martin).
- Στοιχειώδης θεωρία μέτρου (μόνο στη μετρησιμότητα των αναλυτικών συνόλων).
- Επιθυμητή η γνώση στοιχείων της θεμελιωμένης αναδρομής από τη θεωρία συνόλων.

5.1. Ιδιότητες και χαρακτηρισμοί

Υπενθυμίζουμε ότι ένα σύνολο $P \subseteq \mathcal{X}$ είναι **αναλυτικό (analytic)** αν είναι $\underset{\sim}{\Sigma}^1_1$, δηλαδή υπάρχει ένα κλειστό σύνολο $F \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$, έτσι ώστε για κάθε $x \in \mathcal{X}$,

$$x \in P \iff \exists \alpha \ (x, \alpha) \in F.$$

Πρόταση 5.1.1 (Θεμελιώδεις ιδιότητες της κλάσης των αναλυτικών συνόλων). *Η κλάση $\underset{\sim}{\Sigma}^1_1$ των αναλυτικών συνόλων περιέχει τα Borel σύνολα και είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση, Borel αντικατάσταση, τον τελεστή της προβολής $\exists^{\mathcal{Y}}$, τις συνεχείς και γενικότερα τις Borel εικόνες, τους τελεστές $\exists^{\mathbb{N}}$, $\forall^{\mathbb{N}}$, $\vee$, &, όπως επίσης τον τελεστή της αριθμήσιμης διάζευξης $\bigvee_{\mathbb{N}}$ και τον τελεστή της αριθμήσιμης σύζευξης $\bigwedge_{\mathbb{N}}$.*

Απόδειξη. Οι ιδιότητες κλειστότητας, πλην αυτών που αναφέρονται στα Borel σύνολα, είναι άμεσες από το Θεώρημα 3.4.6 και την Άσκηση 3.4.11 (κλειστότητα ως προς συνεχείς εικόνες). Επίσης, από το Πόρισμα 4.1.7 κάθε Borel σύνολο είναι αναλυτικό.

Για την κλειστότητα ως προς Borel αντικατάσταση θεωρούμε Πολωνικούς χώρους $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, μια Borel-μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ και ένα αναλυτικό σύνολο $A \subseteq \mathcal{Y}$. Παίρνουμε ένα κλειστό $F \subseteq \mathcal{Y} \times \mathcal{N}$ με $A = \exists^{\mathcal{N}} F$. Τότε για κάθε

$x \in \mathcal{X}$ έχουμε

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}[A] &\iff f(x) \in A \\ &\iff \exists \alpha \ (f(x), \alpha) \in F. \end{aligned}$$

Η συνάρτηση $(x, \alpha) \mapsto (f(x), \alpha)$ είναι Borel-μετρήσιμη (Άσκηση 4.2.17) και επομένως το σύνολο $B = \{(x, \alpha) \mid (f(x), \alpha) \in F\}$ είναι Borel υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathcal{N}$ ως αντίστροφη εικόνα κλειστού συνόλου μέσω Borel-μετρήσιμης συνάρτησης. Το B είναι και αναλυτικό ως Borel και επομένως το σύνολο $f^{-1}[A] = \exists^{\mathcal{N}} B$ είναι επίσης αναλυτικό από την κλειστότητα της κλάσης $\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^1_1$ ως προς $\exists^{\mathcal{N}}$.

Τέλος, η κλειστότητα ως προς Borel εικόνες προκύπτει από την Άσκηση 5.1.7. ▫

Προχωράμε στους βασικότερους χαρακτηρισμούς της κλάσης των αναλυτικών συνόλων.

Πρόταση 5.1.2. *Δίνεται ένας Πολωνικός χώρος $\mathcal{X}$ και $P \subseteq \mathcal{X}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Το P είναι αναλυτικό σύνολο.*

(ii) *Υπάρχει Πολωνικός χώρος $\mathcal{Y}$ και $F \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ κλειστό με $P = \exists^{\mathcal{Y}} F$.*

(iii) *Υπάρχει Πολωνικός χώρος $\mathcal{Y}$ και $B \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ Borel με $P = \exists^{\mathcal{Y}} B$.*

Απόδειξη. Οι συνεπαγωγές (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) είναι άμεσες θεωρώντας $\mathcal{Y} = \mathcal{N}$ και $B = F$. Η συνεπαγωγή (iii) $\Longrightarrow$ (i) είναι επίσης άμεση, επειδή κάθε Borel σύνολο είναι αναλυτικό (Πρόταση 5.1.1) και η κλάση των αναλυτικών συνόλων είναι κλειστή ως προς τον τελεστή $\exists^{\mathcal{Y}}$ για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{Y}$. ▫

Πρόταση 5.1.3 ([**34**], [**8**]). *Δίνεται ένας Πολωνικός χώρος $\mathcal{X}$ και $P \subseteq \mathcal{X}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Το P είναι αναλυτικό σύνολο.*

(ii) *Υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : \mathcal{N} \to \mathcal{X}$ με $P = f[\mathcal{N}]$ είτε $P = \varnothing$.*

(iii) *Υπάρχει συνεχής συνάρτηση $g : \mathcal{N} \to \mathcal{X}$ και Borel $B \subseteq \mathcal{N}$ με $P = g[B]$.*

(iv) *Υπάρχει Borel-μετρήσιμη συνάρτηση $h : \mathcal{N} \to \mathcal{X}$ και Borel $B \subseteq \mathcal{N}$ με $P = h[B]$.*

(v) *Υπάρχει Πολωνικός χώρος $\mathcal{Y}$, Borel-μετρήσιμη συνάρτηση $\pi : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ και Borel σύνολο $B \subseteq \mathcal{Y}$ με $P = \pi[B]$.*

Απόδειξη. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Υποθέτουμε ότι $P = \exists^{\mathcal{N}} F$, όπου $F \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ κλειστό. Αν $F = \varnothing$, τότε $P = \varnothing$. Επομένως, υποθέτουμε στη συνέχεια ότι $F \neq \varnothing$. Το F με τον περιορισμό της τοπολογίας του $\mathcal{X} \times \mathcal{N}$ είναι Πολωνικός χώρος και επομένως από το Θεώρημα 2.3.7 υπάρχει συνεχής επιμορφισμός $\pi : \mathcal{N} \twoheadrightarrow F$. Τότε για κάθε $x \in \mathcal{X}$,

$$\begin{aligned} x \in P &\iff \exists \alpha \ (x, \alpha) \in F \\ &\iff \exists \beta \ (\pi(\beta) \in F \ \& \ (\mathrm{pr}_1 \circ \pi)(\beta) = x) \\ &\iff \exists \beta \ (\mathrm{pr}_1 \circ \pi)(\beta) = x. \end{aligned}$$

Στις πιο πάνω ισοδυναμίες χρησιμοποιήσαμε ότι η π είναι επί και ότι παίρνει τιμές στο σύνολο F. Με $\mathrm{pr}_1 \equiv \mathrm{pr}_1^{\mathcal{X},\mathcal{N}} : \mathcal{X} \times \mathcal{N} \to \mathcal{X}$ εννοούμε τη συνάρτηση προβολής στην πρώτη συντεταγμένη. Παίρνουμε τη συνάρτηση $f = \mathrm{pr}_1 \circ \pi : \mathcal{N} \to \mathcal{X}$. Η f είναι συνεχής και είναι σαφές από τις πιο πάνω ισοδυναμίες ότι $P = f[\mathcal{N}]$.

Οι συνεπαγωγές (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (v) είναι προφανείς – στην περίπτωση όπου $P = \varnothing$ παίρνουμε $B = \varnothing$.

(v) $\Longrightarrow$ (i). Υποθέτουμε ότι $P = \pi[B]$, για κάποιο Borel $B \subseteq \mathcal{Y}$ και Borel-μετρήσιμη συνάρτηση $\pi : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$. Θεωρούμε μια αριθμήσιμη βάση $(N_s)_{s\in\mathbb{N}}$ του $\mathcal{X}$. Τότε για κάθε $x \in \mathcal{X}$,

$$
\begin{aligned}
x \in P &\iff \exists y\ (y \in B\ \&\ x = \pi(\beta))\\
&\iff \exists y\ (y \in B\ \&\ \forall s\ (x \in N_s \ \longrightarrow\ \pi(\beta) \in N_s))\\
&\iff \exists y\ (y \in B\ \&\ \forall s\ (x \notin N_s\ \vee\ \pi(\beta) \in N_s)).
\end{aligned}
$$

Από την Πρόταση 5.1.1 (ιδιότητες κλειστότητας αναλυτικών συνόλων), το δεξιό σκέλος της τελευταίας ισοδυναμίας ορίζει ένα αναλυτικό υποσύνολο του $\mathcal{X}$ (Άσκηση 5.1.9). ▫

Παρατήρηση 5.1.4. Οι Προτάσεις 5.1.3 (χαρακτηρισμών των αναλυτικών συνόλων) και 4.3.4 (χαρακτηρισμών των Borel συνόλων) μας δίνουν την απόσταση ανάμεσα στα Borel και τα αναλυτικά σύνολα: και τα δύο είδη συνόλων είναι συνεχείς εικόνες κλειστών υποσυνόλων του $\mathcal{N}$ – στα Borel σύνολα έχουμε την επιπλέον ιδιότητα του ένα-προς-ένα πάνω στο κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{N}$.

Πρόταση 5.1.5. *Το σύνολο* IF *των μη θεμελιωμένων δένδρων είναι αναλυτικό υποσύνολο του* Tr.

Απόδειξη. Για κάθε $T \in \mathrm{Tr}$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
T \in \mathrm{IF} &\iff \exists\alpha\ \alpha \in [T]\\
&\iff \exists\alpha\forall t\ \alpha|t \in T.
\end{aligned}
$$

Το σύνολο $F = \{(T,\alpha) \in \mathrm{Tr} \times \mathcal{N} \mid \forall t\ \alpha|t \in T\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathrm{Tr} \times \mathcal{N}$ και από τις πιο πάνω ισοδυναμίες $\mathrm{IF} = \exists^{\mathcal{N}} F$. ▫

Το IF θεωρείται το πιο «πρωτογενές» αναλυτικό σύνολο κυρίως λόγω του επόμενου αποτελέσματος.

Θεώρημα 5.1.6 (Το Βασικό Θεώρημα Αναπαράστασης των Αναλυτικών Συνόλων, Lusin-Sierpinski [**23**]). *Για κάθε αναλυτικό υποσύνολο P ενός Πολωνικού χώρου $\mathcal{X}$ υπάρχει μια $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_2$-μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathcal{X} \to \mathrm{Tr}$ με την ιδιότητα*

$$x \in P \iff f(x) \in \mathrm{IF}$$

όπου $x \in \mathcal{X}$.

Μάλιστα, αν ο $\mathcal{X}$ είναι μηδενοδιάστατος, τότε η f μπορεί να επιλεγεί ώστε να είναι ***συνεχής*** *συνάρτηση, και άρα το* IF *είναι $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_1$-πλήρες αναλυτικό σύνολο.*

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα κλειστό σύνολο F με $P = \exists^{\mathcal{N}} F$. Από το Βασικό Λήμμα Αναπαράστασης Κλειστών Συνόλων 2.5.14 υπάρχει ένα κλειστό σύνολο $T \subseteq \mathcal{X} \times \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με

$$(x,\alpha) \in F \iff \alpha \in [T(x)]$$

για κάθε x, α, όπου το σύνολο $T(x) = \{u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \mid (x,u) \in T\}$ είναι δένδρο. Ορίζουμε

$$f : \mathcal{X} \to \mathrm{Tr} : f(x) = T(x).$$

Από την Άσκηση 2.5.26, η f είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_2$-μετρήσιμη, και αν ο $\mathcal{X}$ είναι μηδενοδιάστατος, η f είναι συνεχής. Τέλος, για κάθε $x \in \mathcal{X}$ έχουμε,

$$\begin{aligned} x \in P &\iff \exists \alpha\ (x, \alpha) \in F \\ &\iff \exists \alpha\ (\alpha \in [T(x)]) \\ &\iff f(x) = T(x) \in \mathrm{IF}\ . \end{aligned}$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Ασκήσεις

Άσκηση 5.1.7. Για κάθε Borel-μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, όπου $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ Πολωνικοί χώροι και κάθε $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ σύνολο $A \subseteq \mathcal{X}$, η εικόνα $f[B]$ είναι επίσης $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ υποσύνολο του $\mathcal{Y}$.

Ειδικότερα, η εικόνα ενός αναλυτικού συνόλου μέσω μιας Borel-μετρήσιμης συνάρτησης είναι αναλυτικό σύνολο.

Άσκηση 5.1.8. Για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{Y}$ ένα μη κενό σύνολο $A \subseteq \mathcal{Y}$ είναι αναλυτικό αν και μόνο αν υπάρχει Πολωνικός χώρος $\mathcal{X}$ και συνεχής συνάρτηση $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, έτσι ώστε $A = f[\mathcal{X}]$.

Άσκηση 5.1.9. Θεωρούμε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$, μια Borel-μετρήσιμη συνάρτηση $h : \mathcal{N} \to \mathcal{X}$, και ένα Borel υποσύνολο $B \subseteq \mathcal{N}$. Εξηγήστε γιατί το σύνολο $P \subseteq \mathcal{X}$ με

$$x \in P \iff \exists \beta\ (\beta \in B\ \&\ \forall s\ (x \notin N_s\ \ \vee\ \ h(\beta) \in N_s))$$

είναι αναλυτικό σύνολο.

5.2. Το Θεώρημα Διαχωρισμού του Lusin και το Θεώρημα Suslin

Υπενθυμίζουμε την έννοια του Διαχωρισμού (Ορισμός 3.8.5): αν έχουμε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και δύο ξένα $A, B \subseteq \mathcal{X}$, λέμε ότι ένα σύνολο $C \subseteq X$ **διαχωρίζει** το A από το B αν $A \subseteq C$ και $C \cap B = \emptyset$.

Θεώρημα 5.2.1 (Το Θεώρημα Διαχωρισμού του Lusin, [**22**], [**23**], [**24**]). *Για κάθε δύο ξένα αναλυτικά υποσύνολα A, B ενός Πολωνικού χώρου $\mathcal{X}$ υπάρχει ένα Borel σύνολο C που διαχωρίζει το A από το B.*

Απόδειξη. Δίνουμε την απόδειξη όπως στο [**8**, 14.7]. Από την Πρόταση 5.1.3 υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις

$$f, g : \mathcal{N} \to \mathcal{X} \quad \text{με} \quad A = f[\mathcal{N}] \quad \text{και} \quad B = g[\mathcal{N}].$$

Για κάθε $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ θέτουμε

$$A_u = f[\mathcal{N}_u] \quad \text{και} \quad B_u = g[\mathcal{N}_u].$$

Παρατηρούμε ότι $A_\Lambda = f[\mathcal{N}_\Lambda] = f[\mathcal{N}] = A$ και όμοια $B_\Lambda = B$. Ακόμα είναι ξεκάθαρο από τον ορισμό ότι $A_u \subseteq A$ και $B_w \subseteq B$. Αφού τα A και B είναι ξένα, προκύπτει ότι $A_u \cap B_w = \emptyset$ για κάθε $u, w \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. Επιπλέον, έχουμε για κάθε $x \in \mathcal{X}$,

$$\begin{aligned} x \in A_u &\iff \exists \alpha \in \mathcal{N}_u\ x = f(\alpha) \\ &\iff \exists m\ \exists \alpha \in \mathcal{N}_{u*(m)}\ x = f(\alpha) \\ &\iff \exists m\ x \in f[\mathcal{N}_{u*(m)}] \\ &\iff \exists m\ x \in A_{u*(m)}, \end{aligned}$$

όπου στη δεύτερη από τις πιο πάνω ισοδυναμίες παίρνουμε $m = \alpha(|u|)$. Επομένως

$$A_u = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_{u*(m)} \quad \text{και όμοια} \quad B_w = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_{w*(n)} \tag{5.1}$$

για κάθε $u, w \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$.

Ισχυρισμός. Δοσμένων $u, w \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, αν για κάθε m, n υπάρχει Borel σύνολο $C^{u,w}_{m,n} \equiv C_{m,n}$ που διαχωρίζει το $A_{u*(m)}$ από το $B_{u*(n)}$, τότε υπάρχει Borel σύνολο C που διαχωρίζει το A από το B.

Απόδειξη ισχυρισμού. Θεωρούμε u, w και $C_{m,n}$, όπως στην εκφώνηση, και ορίζουμε

$$C = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_{m,n}.$$

Προφανώς, το C είναι Borel σύνολο. Δείχνουμε ότι $A_u \subseteq C$. Έστω $x \in A_u$, τότε από την (5.1) υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ με $x \in A_{u*(m)}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει από την υπόθεση

$$A_{u*(m)} \subseteq C_{m,n} \qquad \text{και} \qquad B_{w*(n)} \cap C_{m,n} = \varnothing. \tag{5.2}$$

Άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $x \in C_{m,n}$ δηλαδή $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_{m,n} \subseteq C$.

Έπειτα, δείχνουμε ότι $C \cap B_w = \varnothing$. Έστω $x \in C$, τότε υπάρχει m, έτσι ώστε $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_{m,n}$. Αν είχαμε $x \in B_w$, τότε από την (5.1) θα υπήρχε $n \in \mathbb{N}$ με $x \in B_{w*(n)}$. Συνεπώς, θα είχαμε $x \in C_{m,n} \cap B_{w*(n)}$ που αντιβαίνει στην (5.2). Άρα $x \notin B_w$ και κατά συνέπεια ισχύει $C \cap B_w = \varnothing$.

▫ (*τέλος απόδειξης ισχυρισμού*)

Υποθέτουμε προς άτοπο ότι δεν υπάρχει Borel σύνολο που διαχωρίζει το $A = A_\Lambda$ από το $B = B_\Lambda$. Εφαρμόζουμε τον προηγούμενο ισχυρισμό με $u = w = \Lambda$ και καταλήγουμε ότι υπάρχουν $m_0, n_0 \in \mathbb{N}$, έτσι ώστε δεν υπάρχει Borel σύνολο που να διαχωρίζει το $A_{u*(m_0)} = A_{(m_0)}$ από το $B_{w*(n_0)} = B_{(n_0)}$.

Εφαρμόζουμε ξανά τον πιο πάνω ισχυρισμό με $u = (m_0)$ και $v = (n_0)$ και παίρνουμε $m_1, n_1 \in \mathbb{N}$, έτσι ώστε δεν υπάρχει Borel σύνολο που να διαχωρίζει το $A_{u*(m_1)} = A_{(m_0,m_1)}$ από το $B_{w*(n_1)} = B_{(n_0,n_1)}$. Συνεχίζουμε αναδρομικά και βρίσκουμε στοιχεία του χώρου του Baire,

$$\gamma = (m_0, m_1, \dots) \quad \delta = (n_0, n_1, \dots)$$

έτσι ώστε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ δεν υπάρχει Borel σύνολο που να διαχωρίζει το $A_{(m_0,m_1,\dots,m_{k-1})} = A_{\gamma|k}$ από το $B_{(n_0,n_1,\dots,n_{k-1})} = B_{\delta|k}$.

Αφού $A = f[\mathcal{N}]$ και $B = g[\mathcal{N}]$, έχουμε ειδικότερα ότι $f(\gamma) \in A$ και $g(\delta) \in B$. Επειδή τα A και B είναι ξένα σύνολα, προκύπτει ότι $f(\gamma) \neq g(\delta)$. Θεωρούμε ανοικτές περιοχές U, $W \subseteq \mathcal{X}$ των $f(\gamma)$ και $g(\delta)$ αντίστοιχα με $U \cap W = \varnothing$.

Από τη συνέχεια των f και g υπάρχουν $u, w \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με $\gamma \in \mathcal{N}_u$, $f[\mathcal{N}_u] \subseteq U$, $\delta \in \mathcal{N}_w$ και $g[\mathcal{N}_w] \subseteq W$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα u, w έχουν το ίδιο μήκος. [Σε διαφορετική περίπτωση (ας πούμε $|u| < |w|$) προεκτείνουμε το u στο u' κατά μήκος του γ, ώστε να έχουμε $|u'| = |w|$. Τότε ισχύει $\gamma \in \mathcal{N}_{u'}$ και $f[\mathcal{N}_{u'}] \subseteq f[\mathcal{N}_u] \subseteq U$.]

Εφόσον $u \sqsubseteq \gamma$, $w \sqsubseteq \delta$ και $|u| = |w|$, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ με $u = \gamma|k$ και $w = \delta|k$. Προκύπτει από τα προηγούμενα ότι

$$A_u = f[\mathcal{N}_u] \subseteq U \quad \text{και} \quad B_w \cap U = f[\mathcal{N}_w] \cap U \subseteq W \cap U = \varnothing.$$

Δηλαδή το ανοικτό σύνολο U διαχωρίζει το $A_u = A_{\gamma|k}$ από το $B_w = B_{\delta|k}$, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την επιλογή των γ και δ. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. ▫

Πόρισμα 5.2.2 (Το Θεώρημα του Suslin, [**24**]). *Τα Borel σύνολα ενός Πολωνικού χώρου $\mathcal{X}$ είναι ακριβώς τα αμφι-αναλυτικά υποσύνολα του $\mathcal{X}$, δηλαδή*

$$\mathcal{B}(\mathcal{X}) = \underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}{}^1_1(\mathcal{X}).$$

Απόδειξη. Κάθε Borel σύνολο είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^1_1$ από το Πόρισμα 4.1.7. Για τον αντίστροφο εγκλεισμό θεωρούμε ένα $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^1_1$ σύνολο $A \subseteq \mathcal{X}$ και θεωρούμε το $B = \mathcal{X} \setminus A$. Τότε τα A, B είναι ξένα αναλυτικά σύνολα και από το Θεώρημα Διαχωρισμού του Lusin (Θεώρημα 5.2.1) υπάρχει ένα Borel $C \subseteq \mathcal{X}$ με $A \subseteq C$ και $B \cap C = \varnothing$.

Εφόσον $B = \mathcal{X} \setminus A$ προκύπτει άμεσα ότι $A = C$, και επομένως το A είναι Borel υποσύνολο του $\mathcal{X}$. ▫

Οι Borel-μετρήσιμες συναρτήσεις μπορούν να χαρακτηριστούν με βάση το γράφημά τους σε αντιστοιχία με την Πρόταση 3.5.4. Η κρίσιμη διαφορά είναι η μετάβαση από τα $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^1_1$ στα Borel σύνολα, η οποία είναι εφικτή λόγω του Θεωρήματος τους Suslin.

Πόρισμα 5.2.3 (Το γράφημα Borel-μετρήσιμης συνάρτησης). *Για κάθε συνάρτηση $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ μεταξύ Πολωνικών χώρων τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Η f είναι Borel-μετρήσιμη.*
(2) *Το γράφημα $Graph(f)$ της f είναι Borel σύνολο.*
(3) *Το γράφημα $Graph(f)$ της f είναι αναλυτικό σύνολο.*

Απόδειξη. *1ος τρόπος - με χρήση της Πρότασης 3.5.4.* Αν η f είναι Borel-μετρήσιμη, τότε είναι και $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_1$-μετρήσιμη, επομένως από την Πρόταση 3.5.4 το γράφημά της $Graph(f)$ είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^1_1$ σύνολο. Από το Θεώρημα του Suslin (Πόρισμα 5.2.2), το $Graph(f)$ είναι Borel, και επομένως και αναλυτικό σύνολο. Τέλος, αν το $Graph(f)$ είναι αναλυτικό σύνολο, τότε πάλι από την Πρόταση 3.5.4 η f είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_1$-μετρήσιμη, και από την Πρόταση 3.5.3 είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^1_1$-μετρήσιμη. Επομένως, για κάθε ανοικτό $U \subseteq \mathcal{Y}$, το σύνολο $f^{-1}[U]$ είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^1_1$ και από το Θεώρημα του Suslin είναι Borel.

2ος τρόπος. Δίνουμε μια πιο στοιχειώδη απόδειξη, η οποία δεν επικαλείται τις Προτάσεις 3.5.4 και 3.5.3. Από την άλλη όμως, διαφέρει σε μικρό βαθμό από την απόδειξη της Πρότασης 3.5.4. Η χρήση του Θεωρήματος του Suslin είναι και πάλι επιβεβλημένη.

Για την κατεύθυνση (1) $\Longrightarrow$ (2) θεωρούμε μια αριθμήσιμη βάση $(V_s)_{s\in\mathbb{N}}$ του $\mathcal{Y}$ και έχουμε

$$\begin{aligned}(x, y) \in Graph(f) &\iff \forall s \ (y \in V_s \ \longrightarrow \ f(x) \in V_s)\\ &\iff \forall s \ (y \notin V_s \ \vee \ f(x) \in V_s).\end{aligned}$$

Από τις ιδιότητες κλειστότητας της κλάσης των Borel συνόλων προκύπτει ότι το $Graph(f)$ είναι Borel υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.

Η κατεύθυνση (2) $\Longrightarrow$ (3) είναι προφανής, αφού κάθε Borel σύνολο είναι αναλυτικό.

Τέλος, για την κατεύθυνση (3) $\Longrightarrow$ (1) θεωρούμε ένα ανοικτό $U \subseteq \mathcal{Y}$. Πρέπει να δείξουμε ότι το $f^{-1}[U]$ είναι Borel υποσύνολο του $\mathcal{X}$. Για κάθε $x \in \mathcal{X}$ έχουμε

$$\begin{aligned}x \in f^{-1}[U] &\iff f(x) \in U\\ &\iff \exists y \ ((x, y) \in Graph(f) \ \& \ y \in U).\end{aligned}$$

Επειδή η κλάση των αναλυτικών συνόλων είναι κλειστή ως προς τον τελεστή $\exists^{\mathcal{Y}}$, έχουμε από την πιο πάνω ισοδυναμία ότι το σύνολο $f^{-1}[U]$ είναι αναλυτικό. Επιπλέον, για κάθε $x \in \mathcal{X}$ έχουμε

$$\begin{aligned}x \in f^{-1}[U] &\iff f(x) \in U\\ &\iff \forall y \ ((x, y) \in Graph(f) \ \longrightarrow \ y \in U)\\ &\iff \forall y \ ((x, y) \notin Graph(f) \ \vee \ y \in U).\end{aligned}$$

Προκύπτει από την τελευταία ισοδυναμία (και την κλειστότητα της κλάσης των συναναλυτικών συνόλων ως προς $\forall^{\mathcal{Y}}$) ότι το σύνολο $f^{-1}[U]$ είναι συναναλυτικό.

Από το Θεώρημα του Suslin (Πόρισμα 5.2.2) το σύνολο $f^{-1}[U]$ είναι Borel.

$\square$

Ένα ακόμα Πόρισμα του Θεωρήματος Διαχωρισμού του Lusin είναι το **Θεώρημα 4.3.3** [**15, 20**] (το οποίο δεν έχουμε αποδείξει ακόμα). Υπενθυμίζουμε την εκφώνηση του τελευταίου: για κάθε Πολωνικούς χώρους $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, κάθε Borel-μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ και κάθε Borel σύνολο $B \subseteq \mathcal{X}$, αν ο περιορισμός $f|B$ είναι ένα-προς-ένα, τότε η εικόνα $f[B]$ ειναι Borel υποσύνολο του $\mathcal{Y}$.

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.3. Αρχικά παίρνουμε την περίπτωση όπου η f είναι συνεχής συνάρτηση. Αφού τα Borel σύνολα είναι συνεχείς ένα-προς-ένα εικόνες κλειστών υποσυνόλων του $\mathcal{N}$ (Θεώρημα 4.3.2), μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mathcal{X} = \mathcal{N}$ και ότι το B είναι κλειστό.

Θεωρούμε τις βασικές περιοχές $\mathcal{N}_u$, $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ και σταθεροποιούμε προς το παρόν ένα $n \in \mathbb{N}$. Η οικογένεια $(\mathcal{N}_u \cap B)_{|u|=n}$ αποτελείται από ξένα ανά δύο σύνολα αφού $\mathcal{N}_u \cap \mathcal{N}_w = \varnothing$ για κάθε $u \neq w$ με $|u| = |w|$. Αφού η f είναι ένα-προς-ένα στο B, προκύπτει ότι και η οικογένεια των εικόνων $(f[\mathcal{N}_u \cap B])_{|u|=n}$ αποτελείται από ξένα ανά δύο σύνολα. Επιπλέον, κάθε σύνολο

$$A_u = f[\mathcal{N}_u \cap B]$$

είναι αναλυτικό ως συνεχής εικόνα Borel συνόλου (Πρόταση 5.1.3). Από την Άσκηση 5.2.5 υπάρχει μια οικογένεια $(P_u)_{|u|=n}$ από ξένα ανά δύο Borel σύνολα με $A_u \subseteq P_u$ για κάθε $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με $|n|$.

Η πιο πάνω διαδικασία δίνει μια οικογένεια $(P_u)_{u\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ από Borel σύνολα με

$$A_u \subseteq P_u \quad \text{και} \quad P_u \cap P_w = \varnothing \quad \text{για κάθε } u, w \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \text{ με } |u| = |w|.$$

Ορίζουμε με αναδρομή στο $|u|$ την οικογένεια $(P^\star_u)_{u\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ ως εξής:

$$\begin{aligned} P^\star_\Lambda &= P_\Lambda \\ P^\star_{u*(k)} &= P_{u*(k)} \cap \overline{A_{u*(k)}} \cap P^\star_u. \end{aligned}$$

Είναι προφανές ότι κάθε P^*_u, $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ είναι Borel σύνολο (απόδειξη με επαγωγή στο $|u|$) και πως $P^\star_w \subseteq P^\star_u$ για κάθε $u \sqsubseteq w \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. Επιπλέον, ισχυριζόμαστε ότι

$$A_u \subseteq P^\star_u \quad \text{για κάθε } u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}. \tag{5.3}$$

Για να δούμε το τελευταίο: για $|u| = 0$, έχουμε $A_\Lambda \subseteq P_\Lambda \subseteq P^\star_\Lambda$. Υποθέτοντας ότι $A_u \subseteq P^\star_u$ για κάθε u με $|u| = n$, έχουμε για κάθε u με $|u| = n$ και κάθε k,

$$\begin{aligned} A_{u*(k)} &\subseteq P_{u*(k)} \cap \overline{A_{u*(k)}} \cap A_u && (A_{u*(k)} = f[\mathcal{N}_{u*(k)} \cap B] \subseteq f[\mathcal{N}_u \cap B] = A_u) \\ &\subseteq P_{u*(k)} \cap \overline{A_{u*(k)}} \cap P^\star_u && (\text{Επαγωγική Υπόθεση}) \\ &= P^\star_{u*(k)}. \end{aligned}$$

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι

$$y \in f[B] \iff \forall n \; \exists u \; (|u| = n \;\&\; y \in P^\star_u) \tag{5.4}$$

για κάθε $y \in \mathcal{Y}$. Από αυτή την ισοδυναμία προκύπτει άμεσα ότι το $f[B]$ είναι Borel σύνολο. Για την ευθεία κατεύθυνση θεωρούμε $y = f(\alpha)$, όπου $\alpha \in B$. Τότε για κάθε n παίρνουμε $u = \alpha|n$ (που έχει μήκος n) και έχουμε

$$\alpha \in \mathcal{N}_u \cap B, \quad \text{επομένως} \quad y = f(\alpha) \in f[\mathcal{N}_u \cap B] = A_u \subseteq P^\star_u,$$

όπου στην τελευταία συμπερίληψη χρησιμοποιήσαμε την (5.3).

Για την αντίστροφη κατεύθυνση της (5.4) θεωρούμε ένα $y \in \mathcal{Y}$ που ικανοποιεί το δεξιό σκέλος της ισοδυναμίας. Τότε υπάρχει ακολουθία $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από στοιχεία του $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με $|u_n| = n$ και $y \in P^{\star}_{u_n}$ για κάθε n. Επειδή $|u_n| < |u_{n+1}|$, αν το u_n δεν ήταν αρχικό τμήμα του u_{n+1}, τότε θα υπήρχε $m < |u_n|$ με $u_{n+1}|m = u_n|m$ και $u_{n+1}(m) \neq u_m$. Από αυτό προκύπτει ότι $u_{n+1}|n \neq u_n$, και επειδή αυτές οι ακολουθίες έχουν ίσο μήκος θα είχαμε $P_{u_{n+1}|n} \cap P_{u_n} = \emptyset$. Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί $y \in P^{\star}_{u_{n+1}} \subseteq P^{\star}_{u_{n+1}|n} \subseteq P_{u_{n+1}|n}$ και $y \in P^{\star}_{u_n} \subseteq P_{u_n}$. Άρα $u_n \sqsubseteq u_{n+1}$ για κάθε n.

Επειδή $|u_n| = n \to \infty$, προκύπτει ένα $\alpha \in \mathcal{N}$ με $\alpha|n = u_n$ για κάθε n. Ισχυριζόμαστε ότι $\alpha \in B$ και $y = f(\alpha)$, απ' όπου προκύπτει ότι $y = f(\alpha)$. Για να τα δούμε αυτά, έχουμε αρχικά ότι $y \in P^{\star}_{u_n} \subseteq \overline{A_{u_n}}$. Επομένως υπάρχει $y_n \in A_{u_n} = f[\mathcal{N}_{u_n} \cap B]$ με $d_{\mathcal{Y}}(y, y_n) < 2^{-n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου $d_{\mathcal{Y}}$ είναι μια συμβατή μετρική στον $\mathcal{Y}$. Επιλέγουμε $\alpha_n \in \mathcal{N}_{u_n} \cap B = \mathcal{N}_{\alpha|n} \cap B$ με $f(\alpha_n) = y_n$ για κάθε n.

Τότε έχουμε $y_n \to y$, $\alpha_n \to \alpha$, και λόγω της συνέχειας της f: $y_n = f(\alpha_n) \to f(\alpha)$. Άρα $y = f(\alpha)$. Επιπλέον $\alpha_n \in B$ για κάθε n και επειδή το B είναι κλειστό προκύπτει ότι $\alpha \in B$.

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη στην περίπτωση όπου η f είναι συνεχής. Στη γενική περίπτωση που η f είναι Borel-μετρήσιμη θεωρούμε το γράφημα $Graph(f)$ της f, το οποίο, όπως δείξαμε, είναι Borel υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ (Πόρισμα 5.2.3). Για κάθε $y \in \mathcal{Y}$ έχουμε

$$y \in f[B] \iff \exists x\ (x \in B \ \&\ (x, y) \in Graph(f)) \iff y \in \mathrm{pr}_2[Graph(f) \cap (B \times \mathcal{Y})],$$

όπου $\mathrm{pr}_2 : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{Y} : \mathrm{pr}_2(x, y) = y$, η οποία είναι προφανώς συνεχής. Επομένως, $f[B] = \mathrm{pr}_2[Graph(f) \cap (B \times \mathcal{Y})]$. Το σύνολο $B \times \mathcal{Y}$ είναι Borel υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ (Άσκηση 4.2.16) και επομένως και το $Graph(f) \cap (B \times \mathcal{Y})$ είναι επίσης Borel.

Ο περιορισμός $\mathrm{pr}_2|(Graph(f) \cap (B \times \mathcal{Y}))$ είναι ένα-προς-ένα, γιατί αν (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in Graph(f)$, $x_1, x_2 \in B$ και $y_1 = y_2$, τότε $f(x_1) = f(x_2)$ και $x_1 = x_2$. Επειδή ο περιορισμός $f|B$ είναι ένα-προς-ένα, έχουμε $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.

Καταλήγουμε ότι το $f[B] = \mathrm{pr}_2[Graph(f) \cap (B \times \mathcal{Y})]$ είναι η συνεχής ένα-προς-ένα εικόνα ενός Borel υποσυνόλου του Πολωνικού χώρου $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Από αυτό που δείξαμε αρχικά (με τον $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ στη θέση του $\mathcal{X}$) προκύπτει ότι το $f[B]$ είναι Borel υποσύνολο του $\mathcal{Y}$. ▫

Πόρισμα 5.2.4. *Για κάθε Πολωνικούς χώρους $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, κάθε Borel-μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ και κάθε Borel σύνολο $B \subseteq \mathcal{X}$, για το οποίο ο περιορισμός $f|B$ είναι ένα-προς-ένα, το σύνολο $f[B]$ είναι Borel και η αντίστροφη συνάρτηση $(f|B)^{-1} : f[B] \to \mathcal{X}$ είναι Borel-μετρήσιμη.*

Μάλιστα υπάρχει Borel-μετρήσιμη συνάρτηση $g : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$, έτσι ώστε $g(y) = f^{-1}(y)$ για κάθε $y \in f[B]$, δηλαδή η $(f|B)^{-1}$ επιδέχεται Borel-μετρήσιμη επέκταση σε όλο το $\mathcal{Y}$.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 4.3.3, το σύνολο $f[B]$ είναι Borel. Επιπλέον, για κάθε Borel $C \subseteq \mathcal{X}$ έχουμε $[(f|B)^{-1}]^{-1}[C] = f[C \cap B]$, το οποίο είναι Borel στον $\mathcal{Y}$, γιατί η f είναι ένα-προς-ένα στο Borel σύνολο $C \cap B$. Από την Πρόταση 4.1.8 το $f[C \cap B] = f[C \cap B] \cap f[B]$ είναι Borel υποσύνολο του $f[B]$. Συνεπώς, η $(f|B)^{-1}$ είναι Borel μετρήσιμη συνάρτηση.

Όσον αφορά την g, επιλέγουμε ένα $x_0 \in \mathcal{X}$ και ορίζουμε $g : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$:

$$g(y) = \begin{cases} (f|B)^{-1}(y), & y \in f[B], \\ x_0, & y \notin f[B]. \end{cases}$$

Προφανώς, $g(y) = f^{-1}(y)$ για κάθε $y \in f[B]$. Επιπλέον, για κάθε Borel $C \subseteq \mathcal{X}$ και κάθε $y \in \mathcal{Y}$ έχουμε

$$\begin{aligned} g(y) \in C &\iff (y \in f[B] \ \& \ (f|B)^{-1}(y) \in C) \ \vee \ (y \notin f[B] \ \& \ x_0 \in C) \\ &\iff (y \in f[B \cap C]) \ \vee \ (y \notin f[B] \ \& \ x_0 \in C), \end{aligned}$$

δηλαδή

$$g^{-1}[C] = \begin{cases} f[B \cap C] \ \cup \ (\mathcal{Y} \setminus f[B]), & \text{αν } x_0 \in C, \\ f[B \cap C], & \text{αν } x_0 \notin C. \end{cases}$$

Αφού το $f[B]$ είναι Borel υποσύνολο του $\mathcal{Y}$, προκύπτει από τα πιο πάνω ότι το $g^{-1}[C]$ είναι Borel υποσύνολο του $\mathcal{X}$.

Υπάρχει και ένας *δεύτερος τρόπος* να επαληθεύσουμε την Borel-μετρησιμότητα των $(f|B)^{-1}$ και g με χρήση των γραφημάτων των συναρτήσεων: από το Πόρισμα 5.2.3 αρκεί να δείξουμε ότι τα γραφήματα είναι Borel σύνολα (στους αντίστοιχους χώρους).

Για την $(f|B)^{-1}$ έχουμε

$$(y, x) \in Graph((f|B)^{-1}) \iff y \in f[B] \ \& \ (x, y) \in Graph(f).$$

Χρησιμοποιώντας συνολοθεωρητικό συμβολισμό έχουμε

$$Graph((f|B)^{-1}) = (f[B] \times \mathcal{X}) \cap \overleftarrow{Graph(f)}$$

όπου $\overleftarrow{D} = \{(y, x) \in \mathcal{Y} \times \mathcal{X} \mid (x, y)\}$ για κάθε $D \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Προκύπτει ότι το $Graph((f|B)^{-1})$ είναι Borel υποσύνολο του $f[B] \times \mathcal{X}$.

Για την g έχουμε

$$(y, x) \in Graph(g) \iff (y \in f[B] \ \& \ (x, y) \in Graph(f)) \ \vee \ (y \notin f[B] \ \& \ x_0 \in C),$$

ή αλλιώς

$$Graph(g) = \begin{cases} \Big[\ (f[B] \times \mathcal{X}) \cap \overleftarrow{Graph(f)} \ \Big] \ \cup \ [(\mathcal{Y} \setminus f[B]) \times \mathcal{X}], & \text{αν } x_0 \in C, \\ (f[B] \times \mathcal{X}) \cap \overleftarrow{Graph(f)}, & \text{αν } x_0 \notin C. \end{cases}$$

Επειδή το $f[B]$ είναι Borel υποσύνολο του $\mathcal{Y}$, προκύπτει ότι το $Graph(g)$ είναι Borel υποσύνολο του $\mathcal{Y} \times \mathcal{X}$. □

Ασκήσεις

Άσκηση 5.2.5. Για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και κάθε ακολουθία $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από ξένα ανά δύο αναλυτικά υποσύνολα του $\mathcal{X}$ υπάρχει ακολουθία $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από ξένα ανά δύο Borel σύνολα με $A_n \subseteq B_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 5.2.6. Κάθε Borel μονομορφισμός είναι καλός Borel μονομορφισμός (Ορισμός 4.2.3).

Άσκηση 5.2.7. Δείξτε ότι μια συνάρτηση μεταξύ Πολωνικών χώρων είναι Borel-μετρήσιμη αν και μόνο αν είναι $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_1$-μετρήσιμη χωρίς να αναφερθείτε στο γράφημά της.

Άσκηση 5.2.8. Δίνονται Πολωνικοί χώροι $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$ και Borel-μετρήσιμη συνάρτηση $g : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$.

(i) Αν για κάθε $x \in \mathcal{X}$ υπάρχει *μοναδικό* $y \in \mathcal{Y}$ με $g(x, y) = 0$, τότε η συνάρτηση $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ που ικανοποιεί $g(x, f(x)) = 0$ για κάθε $x \in \mathcal{X}$, είναι Borel-μετρήσιμη.

(ii) Αν για κάθε $x \in \mathcal{X}$ υπάρχει *το πολύ ένα* $y \in \mathcal{Y}$ με $g(x,y) = 0$, τότε το σύνολο D όλων των $x \in \mathcal{X}$ για τα οποία υπάρχει $y \in \mathcal{Y}$, έτσι ώστε $g(x,y) = 0$, είναι Borel και υπάρχει Borel-μετρήσιμη συνάρτηση $h : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, έτσι ώστε $g(x, h(x)) = 0$ για κάθε $x \in D$.

Άσκηση 5.2.9 (Αναλυτικά σύνολα και Αναγωγή). Θεωρούμε ένα $G \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ που είναι $\mathcal{N}$-καθολικό για την $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_1(\mathcal{N})$. Ορίζουμε τα αναλυτικά σύνολα $P_0, P_1 \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ ως εξής:

$$(\alpha, \gamma) \in P_0 \iff ((\alpha)_0, \gamma) \in G$$
$$(\alpha, \gamma) \in P_1 \iff ((\alpha)_1, \gamma) \in G.$$

Τότε δεν υπάρχει ζεύγος αναλυτικών συνόλων (P_0^*, P_1^*) το οποίο ανάγει το ζεύγος (P, Q) (Ορισμός 3.8.3).

Συμπεράνετε ότι σε κάθε υπεραριθμήσιμο Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ υπάρχει ένα ζεύγος αναλυτικών συνόλων το οποίο δεν έχει αναγωγή από ζεύγος αναλυτικών συνόλων.

5.3. Το Θεώρημα Τέλειου Συνόλου

Είδαμε ότι κάθε υπεραριθμήσιμο Borel σύνολο περιέχει ένα μη κενό τέλειο υποσύνολο (Άσκηση 4.3.5). Εδώ αποδεικνύουμε ότι αυτό το αποτέλεσμα ισχύει και για τα υπεραριθμήσιμα αναλυτικά σύνολα. Για να το αποδείξουμε αυτό, θα χρειαστούμε μια ακόμα αναπαράσταση των αναλυτικών υποσυνόλων του $\mathcal{N}$.

Ορισμός 5.3.1. Δίνεται ένα μη κενό σύνολο X και ένα $T \subseteq (X \times X)^{<\mathbb{N}}$. Το T είναι **δένδρο ζευγών στο** X αν είναι δένδρο στο $X \times X$.

Συμβολισμοί. Υπάρχει μια προφανής ταύτιση μεταξύ των στοιχείων $w \in (X \times X)^{<\mathbb{N}}$ και των $(u, v) \in X^{<\mathbb{N}} \times X^{<\mathbb{N}}$ με $|u| = |v|$. Συγκεκριμένα, κάθε $w \in T$ έχει τη μορφή $((u_0, v_0), \dots, (u_{n-1}, v_{n-1}))$, όπου $u_i, v_i \in X$ για κάθε $i < n$. Επομένως, αν θέσουμε $u = (u_0, \dots, u_{n-1})$ και $v = (v_0, \dots, v_{n-1})$, μπορούμε να ταυτίσουμε το w με το (u, v). Αντίστροφα κάθε ζεύγος (u, v) με $u = (u_0, \dots, u_{n-1})$ και $v = (v_0, \dots, v_{n-1})$ μπορεί να ταυτιστεί με την πεπερασμένη ακολουθία $w = ((u_0, v_0), \dots, (u_{n-1}, v_{n-1}))$.

- *Συνεπώς, θα συμβολίζουμε τα στοιχεία ενός δένδρου ζευγών T με (u, v) όπου $u, v \in X^{<\mathbb{N}}$ με $|u| = |v|$. Η κενή ακολουθία Λ ταυτίζεται επομένως με το ζεύγος (Λ, Λ).*

Η προηγούμενη ταύτιση επεκτείνεται και στις άπειρες ακολουθίες. Υπάρχει ένας προφανής τοπολογικός ισομορφισμός μεταξύ του $(X \times X)^{\mathbb{N}}$ και του $X^{\mathbb{N}} \times X^{\mathbb{N}}$, συγκεκριμένα ο

$$(f, g) \in X^{\mathbb{N}} \times X^{\mathbb{N}} \mapsto ((f(0), g(0)), \dots, (f(n), g(n)), \dots) \in X^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}.$$

Άρα μπορούμε να ταυτίσουμε κάθε άπειρο κλαδί $h \in (X \times X)^{\mathbb{N}}$ με ένα ζεύγος άπειρων ακολουθιών του X, συγκεκριμένα με το (h_1, h_2), όπου $h = ((h_1(0), h_2(0)), \dots, (h_1(n), h_2(n)), \dots)$.

- *Συνεπώς, συμβολίζουμε τα άπειρα κλαδιά ενός δένδρου ζευγών με ζεύγη (f, g).*

Με αυτούς τους συμβολισμούς, ισχύει η προφανής σχέση

$$(f, g) \in [T] \iff \forall n \; ((f(0), \dots, f(n)), (g(0), \dots, g(n))) \in T$$

για κάθε δένδρο ζευγών T στο X, όπου $f, g \in X^{\mathbb{N}}$.

Τέλος, παρατηρούμε ότι η συγκεκριμένη ταύτιση σέβεται τη σχέση του αρχικού τμήματος, δηλαδή για κάθε $w = ((u_0, v_0), \ldots, (u_{n-1}, v_{n-1})) \equiv (u, v)$ και κάθε $w' = ((u'_0, v'_0), \ldots, (u'_{n-1}, v'_{n-1})) \equiv (u', v')$ έχουμε

$$w' \sqsubseteq w \iff u' \sqsubseteq u \ \& \ v' \sqsubseteq v.$$

- *Επομένως, τα δένδρα ζευγών στο X ταυτίζονται με τα μη κενά σύνολα $R \subseteq X^{<\mathbb{N}} \times X^{<\mathbb{N}}$ που ικανοποιούν*

$$(u, v) \in R \ \& \ u' \sqsubseteq u \ \& \ v' \sqsubseteq v \implies (u', v') \in R,$$

για κάθε $u, v, u', v' \in X^{<\mathbb{N}}$.

Θα μας απασχολήσει η περίπτωση όπου $X = \mathbb{N}$. Αν το T είναι δένδρο ζευγών στο $\mathbb{N}$, τα στοιχεία του σώματος $[T]$ είναι της μορφής (α, β), όπου $\alpha, \beta \in \mathcal{N}$. Το Βασικό Λήμμα Αναπαράστασης Κλειστών Συνόλων (Λήμμα 2.5.14) καθώς και η ειδική περίπτωσή του (Πόρισμα 2.5.3) έχουν την αντίστοιχη εκδοχή για δένδρα ζευγών στο $\mathbb{N}$.

Λήμμα 5.3.2. *Ένα $F \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ είναι κλειστό αν και μόνο αν υπάρχει δένδρο ζευγών T στο $\mathbb{N}$ με $F = [T]$, όπου το σώμα ενός δένδρου ζευγών το εννοούμε με την πιο πάνω ταύτιση.*

Απόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο

$$\tilde{F} = \{\gamma \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N})^{\mathbb{N}} \mid (\gamma_1, \gamma_2) \in F\}$$

όπου $\gamma = ((\gamma_1(0), \gamma_2(0)), \ldots, (\gamma_1(n), \gamma_2(n)), \ldots)$. Τα σύνολα F και $\tilde{F}$ είναι τοπολογικά ισομορφικά. Επομένως, το F είναι κλειστό αν και μόνο αν το $\tilde{F}$ είναι κλειστό.

Εφαρμόζουμε την Πρόταση 2.5.2 για $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ και έχουμε ότι το F είναι κλειστό αν και μόνο αν υπάρχει δένδρο ζευγών T στο $\mathbb{N}$ με

$$\gamma \in \tilde{F} \iff \forall n \ \gamma|n \in T.$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
(\alpha, \beta) \in F &\iff ((\alpha(0), \beta(0)), \ldots, (\alpha(n), \beta(n)), \ldots) \in \tilde{F} \\
&\iff \forall n \ ((\alpha(0), \beta(0)), \ldots, (\alpha(n), \beta(n))) \in T \\
&\iff \forall n \ (\alpha|n, \beta|n) \in T \quad \text{(με την προηγούμενη ταύτιση)} \\
&\iff (\alpha, \beta) \in [T],
\end{aligned}$$

για κάθε $\alpha \in \mathcal{N}$. ▫

Λήμμα 5.3.3. *Θεωρούμε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και ένα $F \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N} \times \mathcal{N}$. Τότε το σύνολο F είναι κλειστό ακριβώς όταν υπάρχει ένα κλειστό σύνολο $T \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με τις ιδιότητες το $T(x) = \{(u, v) \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \mid (x, u, v) \in T\}$ να είναι δένδρο ζευγών στο $\mathbb{N}$ για κάθε $x \in \mathcal{X}$ και*

$$F = \{(x, \alpha, \beta) \in \mathcal{X} \times \mathcal{N} \times \mathcal{N} \mid (\alpha, \beta) \in [T(x)]\}.$$

Απόδειξη. Ακολουθούμε την απόδειξη του Λήμματος 5.3.2. Στην απόδειξη του τελευταίου εφαρμόσαμε την αναπαράσταση των κλειστών υποσυνόλων του $X^{\mathbb{N}}$ ως τα σώματα δένδρων στο X παίρνοντας για X το $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Εδώ εφαρμόζουμε το Βασικό Λήμμα Αναπαράστασης Κλειστών συνόλων $= \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, (βλ. την Άσκηση 2.5.27). ▫

Τώρα είμαστε έτοιμοι να δώσουμε την αναπαράσταση των αναλυτικών συνόλων που αναφέραμε προηγουμένως.

Πρόταση 5.3.4. *Για κάθε $P \subseteq \mathcal{N}$ τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

(i) *Το P είναι αναλυτικό σύνολο.*

(ii) *Υπάρχει δένδρο ζευγών T με $P = \mathsf{pr}[[T]]$.*

Με pr *εννοούμε τη συνάρτηση της προβολής στην πρώτη συντεταγμένη* $(\alpha, \beta) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} \mapsto \alpha \in \mathcal{N}$.

Απόδειξη. (i) $\Longrightarrow$ (ii) Υπάρχει κλειστό $F \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ με $P = \exists^{\mathcal{N}} F$. Από το Λήμμα 5.3.2 υπάρχει δένδρο ζευγών T στο $\mathbb{N}$ με $F = [T]$. Επομένως, για κάθε $\alpha \in \mathcal{N}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \alpha \in P &\iff \exists \beta \ (\alpha, \beta) \in F \\ &\iff \exists \beta \ (\alpha, \beta) \in [T] \\ &\iff \alpha \in \mathsf{pr}[[T]]. \end{aligned}$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Προφανής καθώς το $[T]$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ (Λήμμα 5.3.2) και $P = \mathsf{pr}[[T]] = \exists^{\mathcal{N}}[T]$. ▫

Δίνουμε την αντίστοιχη εκδοχή του προηγούμενου λήμματος με παράμετρο $x \in \mathcal{X}$. Κάνουμε ιδιαίτερη μνεία στην περίπτωση που η τομή P_x είναι μη κενό σύνολο.

Πρόταση 5.3.5. *Για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

(i) *Το P είναι αναλυτικό σύνολο.*

(ii) *Υπάρχει κλειστό σύνολο $T \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, έτσι ώστε για κάθε $x \in \mathcal{X}$ το σύνολο $T(x) = \{(u, v) \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \mid (x, u, v) \in T\}$ είναι δένδρο ζευγών στο $\mathbb{N}$ και $P_x = \mathsf{pr}[[T(x)]]$.*

(iii) *Υπάρχει* ***αναλυτικό*** *σύνολο $R \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, έτσι ώστε για κάθε $x \in \mathcal{X}$ το σύνολο $R(x) = \{(u, v) \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \mid (x, u, v) \in R\}$ είναι δένδρο ζευγών στο $\mathbb{N}$, $P_x = \mathsf{pr}[[R(x)]]$, και αν $P_x \neq \emptyset$, τότε το $R(x)$ είναι κλαδεμένο.*

Με pr *εννοούμε τη συνάρτηση της προβολής στην πρώτη συντεταγμένη* $(\alpha, \beta) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} \mapsto \alpha \in \mathcal{N}$.

Απόδειξη. (i) $\Longrightarrow$ (ii) Υπάρχει ένα κλειστό σύνολο $F \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ με $P = \exists^{\mathcal{N}} F$. Εφαρμόζουμε το Λήμμα 5.3.3 σε αυτό το F και λαμβάνουμε ένα κλειστό σύνολο $T \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, έτσι ώστε για κάθε $x \in \mathcal{X}$ το σύνολο $T(x) = \{(u, v) \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \mid (x, u, v) \in T\}$ είναι δένδρο ζευγών στο $\mathbb{N}$ και επιπλέον

$$F = \{(x, \alpha, \beta) \in \mathcal{X} \times \mathcal{N} \times \mathcal{N} \mid (\alpha, \beta) \in [T(x)]\}.$$

Τότε για κάθε $(x, \alpha) \in \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \alpha \in P_x &\iff \exists \beta \ (x, \alpha, \beta) \in F \\ &\iff \exists \beta \ (\alpha, \beta) \in [T(x)] \\ &\iff \alpha \in \mathsf{pr}[[T(x)]]. \end{aligned}$$

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Παίρνουμε το T, όπως στην υπόθεση. Η ιδέα είναι να κλαδέψουμε το δένδρο $T(x)$ και να περάσουμε σε ένα υποδένδρο $R(x)$ με το ίδιο σώμα, όπως γίνεται στην Άσκηση 2.5.19. Το πρόσθετο σημείο εδώ είναι ότι αυτή η διαδικασία δίνει ένα αναλυτικό σύνολο R, το οποίο γενικά δεν είναι Borel (δείτε την Άσκηση 5.3.7).

Ορίζουμε το σύνολο $R \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ ως εξής,

$$(x, u, v) \in R \iff \exists \alpha, \beta \ (u \sqsubseteq \alpha \ \& \ v \sqsubseteq \beta \ \& \ (\alpha, \beta) \in [T(x)]) \ \vee \ (u, v) = \Lambda,$$

όπου $x \in \mathcal{X}$ και $u, v \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. Επίσης θέτουμε

$$R(x) = \{(u, v) \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \mid (x, u, v) \in R\}, \quad x \in \mathcal{X}.$$

Στον ορισμό του R συμπεριλαμβάνουμε την περίπτωση $(u,v) = \Lambda$ ώστε να εξασφαλίσουμε ότι το $R(x)$ είναι δένδρο ακόμα και όταν $[T(x)] = \varnothing$ (δείτε πιο κάτω για λεπτομέρειες).

Είναι σαφές από τον ορισμό ότι το R είναι αναλυτικό υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. Για κάθε $x \in \mathcal{X}$ η κενή ακολουθία Λ είναι μέλος του $R(x)$, επομένως $R(x) \neq \varnothing$. Μπορεί να συμβεί η Λ να είναι το μοναδικό μέλος του $R(x)$ – αυτό γίνεται όταν $[T(x)] = \varnothing$. Επίσης, ισχύει $R \subseteq T$, γιατί το $T(x)$ είναι δένδρο για κάθε x.

Για να δείξουμε ότι το $R(x)$ είναι δένδρο, υποθέτουμε ότι έχουμε $(u,v) \in R(x)$ και $u' \sqsubseteq u$, $v' \sqsubseteq v$. Προφανώς, $(u',v') \in T(x)$ γιατί $(u,v) \in T(x)$ και το $T(x)$ είναι δένδρο. Αν $(u,v) = \Lambda$, τότε $(u',v') = (u,v) = \Lambda \in R(x)$. Αν είμαστε στην άλλη περίπτωση του ορισμού του R τότε υπάρχουν α, β με $u \sqsubseteq \alpha$, $v \sqsubseteq \beta$ και $(\alpha,\beta) \in [T(x)]$. Τότε όμως είναι προφανές ότι υπάρχουν α, β με $u' \sqsubseteq \alpha$, $v' \sqsubseteq \beta$ και $(\alpha,\beta) \in [T(x)]$. Άρα $(u,v) \in R(x)$ και το $R(x)$ είναι δένδρο για κάθε $x \in \mathcal{X}$.

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι $P_x = \mathsf{pr}[T(x)] \neq \varnothing$ και δείχνουμε ότι το $R(x)$ είναι κλαδεμένο. Παίρνουμε $(u,v) \in R(x)$ μήκους n. Αν υπάρχουν α, β με $u \sqsubseteq \alpha$, $v \sqsubseteq \beta$ και $(\alpha,\beta) \in [T(x)]$ τότε το ζεύγος $(u * (\alpha(n)), v * (\beta(n)))$ έχει επέκταση (α',β') στο $[T(x)]$. Συγκεκριμένα την $(\alpha',\beta') = (\alpha,\beta)$, άρα $(u * (\alpha(n), v * (\beta(n))) \in R(x)$. Στην άλλη περίπτωση του ορισμού του $R(x)$, έχουμε $(u,v) = \Lambda$, οπότε παίρνουμε ένα οποιοδήποτε $(\alpha,\beta) \in [T(x)] \neq \varnothing$ και, όπως πριν, έχουμε $(u,v) = \Lambda \subsetneq (\alpha(0),\beta(0)) \in R(x)$. Σε κάθε περίπτωση το $(u,v) \in R(x)$ έχει μια γνήσια επέκταση στο $R(x)$ και άρα το τελευταίο είναι κλαδεμένο δένδρο.

Μένει να δείξουμε ότι $P_x = \mathsf{pr}[[R(x)]]$ για κάθε $x \in \mathcal{X}$. Από την υπόθεσή μας για το T έχουμε ότι $P_x = \mathsf{pr}[[T(x)]] \neq \varnothing$. Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι $[T(x)] = [R(x)]$ για κάθε $x \in \mathcal{X}$. Για να δούμε το τελευταίο, θεωρούμε $x \in \mathcal{X}$, και επειδή $R(x) \subseteq T(x)$ έχουμε $[R(x)] \subseteq [T(x)]$. Αντίστροφα, αν έχουμε $(\alpha,\beta) \in [T(x)]$, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $(\alpha|n, \beta|n) \in T(x)$ και υπάρχουν (α',β') με $\alpha|n \sqsubseteq \alpha'$ και $\beta|n \sqsubseteq \beta'$, συγκεκριμένα τα $\alpha' = \alpha$ και $\beta' = \beta$. Άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $(\alpha|n, \beta|n) \in R(x)$ που σημαίνει ότι $(\alpha,\beta) \in [R(x)]$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) Για κάθε $(x,\alpha) \in \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
(x,\alpha) \in P &\iff \alpha \in P_x \\
&\iff \alpha \in \mathsf{pr}[[R(x)]] \\
&\iff \exists\beta\ (\alpha,\beta) \in [R(x)] \\
&\iff \exists\beta\ \forall n (x, \alpha|n, \beta|n) \in R.
\end{aligned}$$

Αφού το R είναι αναλυτικό σύνολο, προκύπτει από τις ιδιότητες κλειστότητας της κλάσης των αναλυτικών συνόλων ότι το P είναι επίσης αναλυτικό σύνολο. ▫

Θεώρημα 5.3.6 (Το Θεώρημα Τέλειου Συνόλου - Suslin, [**15**]). *Για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και κάθε υπεραριθμήσιμο αναλυτικό $A \subseteq \mathcal{X}$, υπάρχει συνεχής μονομορφισμός $f : 2^{\mathbb{N}} \to \mathcal{X}$ με $f[2^{\mathbb{N}}] \subseteq A$.*

Απόδειξη. Η ιδέα είναι να ανιχνεύσουμε ένα είδος «τέλειου πυρήνα» για το A, όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος Cantor-Bendixson. Η βάση $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ του $\mathcal{X}$, όπως χρησιμοποιείται στην απόδειξη του τελευταίου αποτελέσματος, δεν είναι αρκετή για τους σκοπούς μας, καθώς το A δεν είναι απαραίτητα κλειστό. Αντί αυτού θα χρησιμοποιήσουμε την αναπαράσταση του αναλυτικού συνόλου A με βάση τα δένδρα ζευγών (Πρόταση 5.3.4). Για να γίνει αυτό όμως πρέπει να γνωρίζουμε ότι $\mathcal{X} = \mathcal{N}$. Εξηγούμε γιατί μπορούμε να υποθέσουμε το τελευταίο.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε αποδείξει το αποτέλεσμα για όλα τα υπεραριθμήσιμα αναλυτικά υποσύνολα του $\mathcal{N}$ και θεωρούμε έναν αυθαίρετο Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$. Τότε από το Λήμμα 4.2.9 υπάρχει συνεχής επιμορφισμός $\pi : \mathcal{N} \twoheadrightarrow \mathcal{X}$ και G_δ σύνολο $B \subseteq \mathcal{N}$, έτσι ώστε $\pi[B] = \mathcal{X}$ και ο περιορισμός $\pi|B$ είναι ένα-προς-ένα (από το Θεώρημα 4.3.2 μπορούμε να πάρουμε και ένα *κλειστό* τέτοιο B, αλλά εδώ μας αρκεί να γνωρίζουμε ότι το B είναι Borel).

Αν έχουμε ένα υπεραριθμήσιμο αναλυτικό σύνολο $A \subseteq \mathcal{X}$, τότε από την κλειστότητα της κλάσης $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_1$ ως προς συνεχή αντικατάσταση και αφού το B είναι Borel το $B \cap \pi^{-1}[A]$ είναι επίσης αναλυτικό σύνολο. Αφού $\pi[B] = \mathcal{X}$, έχουμε εύκολα ότι $\pi[B \cap \pi^{-1}[A]] = A$. Επομένως αν το $B \cap \pi^{-1}[A]$ ήταν αριθμήσιμο τότε και το A θα ήταν αριθμήσιμο ως εικόνα αριθμήσιμου συνόλου μέσω μιας συνάρτησης (δεν χρειαζόμαστε ακόμα ότι η $\pi|B$ είναι ένα-προς-ένα). Αυτό όμως είναι άτοπο. Άρα το $B \cap \pi^{-1}[A]$ είναι υπεραριθμήσιμο αναλυτικό υποσύνολο του $\mathcal{N}$ και από την υπόθεσή μας υπάρχει συνεχής μονομορφισμός $f : 2^{\mathbb{N}} \rightarrowtail \mathcal{N}$ με $f[2^{\mathbb{N}}] \subseteq B \cap \pi^{-1}[A]$. Τότε η σύνθεση

$$g = \pi \circ f : 2^{\mathbb{N}} \to \mathcal{X} : g(\gamma) = \pi(f(\gamma))$$

είναι συνεχής και ένα-προς-ένα αφού η f παίρνει τιμές στο B και η $\pi|B$ είναι ένα-προς-ένα. Επιπλέον $g[2^{\mathbb{N}}] = \pi[f[2^{\mathbb{N}}]] \subseteq \pi[B \cap \pi^{-1}[A]] = A$. Άρα η g είναι ένα συνεχής μονομορφισμός από το $2^{\mathbb{N}}$ στο $\mathcal{X}$ με $g[2^{\mathbb{N}}] \subseteq A$.

Επομένως, μπορούμε να υποθέσουμε στη συνέχεια ότι $\mathcal{X} = \mathcal{N}$. Από την Πρόταση 5.3.4 υπάρχει δένδρο ζευγών T στο $\mathbb{N}$ με

$$\alpha \in A \iff \exists \beta\ (\alpha, \beta) \in [T] \tag{5.5}$$

Για κάθε $(u, v) \in T$ ορίζουμε τα σύνολα

$$W_{(u,v)} = \{\alpha \in \mathcal{N} \mid u \sqsubseteq \alpha \ \&\ \exists \beta\ (\ v \sqsubseteq \beta \ \&\ (\alpha, \beta) \in [T]\ )\}. \tag{5.6}$$

Παρατηρούμε ότι

$$W_\Lambda = W_{(\Lambda,\Lambda)} = \{\alpha \in \mathcal{N} \mid \exists \beta\ (\alpha, \beta) \in T\} = A$$

και πως

$$W_{(u,v)} = \bigcup\nolimits_{(u*(i),v*(j)) \in T}\ W_{(u*(i),v*(j))}, \quad (u, v) \in T.$$

Ειδικότερα, έχουμε $W_{(u,v)} \subseteq A$ για κάθε $(u, v) \in T$. (Αυτά τα $W_{(u,v)}$ χρησιμοποιούνται στη θέση των στοιχείων V_n της βάσης του $\mathcal{X}$, όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος Cantor-Bendixson.) Σε αντιστοιχία με τον τέλειο πυρήνα και το διάσπαρτο μέρος ενός κλειστού συνόλου ορίζουμε

$$\begin{aligned} P &= \{\alpha \in A \mid \forall (u, v) \in T \ (\text{αν } \alpha \in W_{(u,v)} \text{ τότε το } W_{(u,v)} \text{ είναι υπεραριθμήσιμο})\} \\ S &= \{\alpha \in A \mid \exists (u, v) \in T \ (\alpha \in W_{(u,v)} \text{ και το } W_{(u,v)} \text{ είναι αριθμήσιμο})\} \\ &= A \setminus P. \end{aligned}$$

Αν θέσουμε $I = \{(u, v) \in T \mid \text{το } W_{(u,v)} \text{ είναι υπεραριθμήσιμο}\}$, τότε από τον ορισμό του S έχουμε

$$S = \bigcup\nolimits_{(u,v) \in I}\ W_{(u,v)}.$$

Η τελευταία ένωση είναι αριθμήσιμη ένωση αριθμήσιμων συνόλων, επομένως το S είναι αριθμήσιμο. Αφού $A = P \cup S$ και το A είναι υπεραριθμήσιμο, καταλήγουμε ότι το P είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο. (Σε αντίθεση με το Θεώρημα Cantor-Bendixson, το P δεν είναι απαραίτητα κλειστό, γιατί αν είναι τότε το $A = P \cup S$ είναι η ένωση ενός κλειστού με ένα αριθμήσιμο σύνολο και άρα το αναλυτικό σύνολο A θα είναι ειδικότερα F_σ.)

Στη συνέχεια, ορίζουμε το σύνολο $G \subseteq T$ ως εξής:

$$(u, v) \in G \iff P \cap W_{(u,v)} \neq \varnothing, \quad (u, v) \in T.$$

Παρατηρούμε ότι η κενή ακολουθία (που την ταυτίζουμε με το ζεύγος (Λ, Λ)) ανήκει στο G γιατί $P \cap W_\Lambda = P \cap A = P \neq \varnothing$.

Στη συνέχεια λέμε ότι δύο πεπερασμένες ακολουθίες (u_1, v_1), (u_2, v_2) είναι *ασύμβατες στην πρώτη μεταβλητή* αν οι u_1, u_2 είναι ασύμβατες. Ο επόμενος ισχυρισμός είναι το σημείο κλειδί για το ζητούμενο.

Ισχυρισμός. Για κάθε $(u, v) \in G$ υπάρχουν $(u_1, v_1), (u_2, v_2)$ που ανήκουν στο T, επεκτείνουν την (u, v), είναι ασύμβατες στην πρώτη μεταβλητή και ανήκουν στο G. (Προκύπτει ότι αυτές οι επεκτάσεις είναι γνήσιες, αλλιώς θα ήταν συμβατές.)

Απόδειξη ισχυρισμού. Εφόσον $(u, v) \in G$ υπάρχει $\alpha \in P \cap W_{(u,v)}$. Επομένως, το σύνολο $W_{(u,v)}$ είναι υπεραριθμήσιμο. Εφόσον $W_{(u,v)} \subseteq A$ και $A = P \cup S$, έχουμε

$$W_{(u,v)} = (W_{(u,v)} \cap P) \ \cup \ (W_{(u,v)} \cap S).$$

Αφού το S και συνεπώς το $W_{(u,v)} \cap S$ είναι αριθμήσιμο σύνολο, ενώ το $W_{(u,v)}$ είναι υπεραριθμήσιμο, έχουμε από την πιο πάνω ισότητα ότι το $W_{(u,v)} \cap P$ είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο. Ειδικότερα, υπάρχουν $\alpha_1, \alpha_2 \in W_{(u,v)} \cap P$ με $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Παίρνουμε το ελάχιστο n με $\alpha_1(n) \neq \alpha_2(n)$ και θέτουμε $u_i = (\alpha_i(0), \ldots, \alpha_i(n))$, $i = 1, 2$, έτσι που οι u_1, u_2 είναι ασύμβατες. Επιπλέον, έχουμε $u \sqsubseteq \alpha_1, \alpha_2$ οπότε οι α_1 και α_2 συμφωνούν στα $i < |u|$, επομένως $u \sqsubseteq \alpha_i|n = u_i$, $i = 1, 2$. Δηλαδή οι u_1, u_2 είναι επεκτάσεις της u.

Εφόσον $\alpha_1, \alpha_2 \in W_{(u,v)}$, υπάρχουν β_1, β_2 με $v \sqsubseteq \beta_i$, έτσι ώστε $(\alpha_i, \beta_i) \in [T]$, $i = 1, 2$. Θέτουμε $v_i = (\beta_i(0), \ldots, \beta_i(n))$ για $i = 1, 2$. Επειδή $v \sqsubseteq \beta_i$, $v_i = \beta_i|(n+1)$ και $|v| = |u| \leqslant n$, έχουμε $v \sqsubseteq v_i$, $i = 1, 2$. Επιπλέον

$$(u_i, v_i) = ((\alpha_i(0), \ldots, \alpha_i(n)), (\beta_i(0), \ldots, \beta_i(n))) \in T$$

γιατί $(\alpha_i, \beta_i) \in [T]$, $i = 1, 2$.

Επομένως, οι (u_1, v_1), (u_2, v_2) ανήκουν στο T, είναι επεκτάσεις της (u, v) και είναι ασύμβατες στην πρώτη μεταβλητή. Μένει να δείξουμε ότι ανήκουν στο G.

Για κάθε $i = 1, 2$, από τον ορισμό των (u_i, v_i) έχουμε $u_i \sqsubseteq \alpha_i$, $v_i \sqsubseteq \beta_i$, και αφού $(\alpha_i, \beta_i) \in [T]$ έχουμε από την (5.6) ότι $\alpha_i \in W_{(u_i,v_i)}$. Επιπλέον ισχύει $\alpha_i \in P$, άρα $P \cap W_{(u_i,v_i)} \neq \varnothing$. Από τον ορισμό του G έχουμε $(u_i, v_i) \in G$. Αυτό αποδεικνύει τον ισχυρισμό.

Πίσω στην απόδειξη με βάση ότι $\Lambda \in G$ και τον ισχυρισμό ορίζεται με αναδρομή μια συνάρτηση $\varphi : \{0, 1\}^{<\mathbb{N}} \to G \subseteq T$ με $\varphi(\Lambda) = \Lambda \equiv (\Lambda, \Lambda)$ και οι $\varphi(w{*}(0))$, $\varphi(w{*}(1))$ είναι επεκτάσεις του $\varphi(w)$ που είναι ασύμβατες στην πρώτη μεταβλητή. (Επειδή το T είναι αριθμήσιμο σύνολο, δεν χρειάζεται το Αξίωμα Επιλογής στον ορισμό της φ. Απλώς επιλέγουμε κάθε φορά τις κατάλλλες ασύμβατες στην πρώτη μεταβλητή επεκτάσεις που έχουν τον ελάχιστο δείκτη με βάση μια απαρίθμηση του T.)

Όπως αναφέραμε προηγουμένως, οι $\varphi(w * (0))$, $\varphi(w * (1))$ είναι επεκτάσεις του $\varphi(w)$. Συνεπώς η φ είναι κατάλλλη μονότονη σύμφωνα με τον Ορισμό 2.5.9. Επομένως, ορίζεται η συνάρτηση

$$\varphi^* : [\{0, 1\}^{<\mathbb{N}}] = 2^{\mathbb{N}} \to [T] : \varphi^*(\gamma) = \bigcup\nolimits_n \varphi(\gamma|n),$$

η οποία από την Πρόταση 2.5.10 είναι συνεχής. (Η συνέχεια της φ^* μπορεί επίσης να διαπιστωθεί εύκολα, όπως στην απόδειξη της τελευταίας πρότασης. Τα βασικά ανοικτά υποσύνολα του $[T]$ έχουν τη μορφή $B_{(u,v)} = \{(\alpha, \beta) \in [T] \mid u \sqsubseteq \alpha \ \& \ v \sqsubseteq \beta\}$, όπου $(u, v) \in T$. Τότε για κάθε $\gamma \in 2^{\mathbb{N}}$ έχουμε $\varphi^*(\gamma) \in B_{(u,v)}$ αν και μόνο αν υπάρχει n με $(u, v) \sqsubseteq \varphi(\gamma|n)$. Από αυτό προκύπτει ότι το $(\varphi^*)^{-1}[B_{(u,v)}]$ είναι ανοικτό σύνολο.)

Τέλος θεωρούμε τη σύνθεση

$$f : 2^{\mathbb{N}} \to \mathcal{N} : f(\gamma) = (\mathsf{pr}_1 \circ \varphi^*)(\gamma)$$

όπου η pr_1 είναι η προβολή στην πρώτη συντεταγμένη $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha$. Η f είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Παρατηρούμε ότι η f λαμβάνει τιμές στο A, γιατί αν πάρουμε $\gamma \in 2^{\mathbb{N}}$, τότε $\varphi^*(\gamma) = (\alpha, \beta) \in [T]$ για κάποια $\alpha, \beta \in \mathcal{N}$, επομένως $f(\gamma) = \alpha$ και από την (5.5) έχουμε ότι το $\alpha = f(\gamma)$ ανήκει στο A.

Απομένει να δείξουμε ότι η f είναι μονομορφισμός. Αυτό συμβαίνει λόγω της ασυμβατότητας που δίνει η φ στην πρώτη συντεταγμένη. Συγκεκριμένα, αν έχουμε $\gamma, \gamma' \in 2^{\mathbb{N}}$ με $\gamma|n = \gamma'|n$ και $\gamma(n) \neq \gamma'(n)$, τότε οι ακολουθίες ζευγών $\varphi(\gamma|(n+1))$, $\varphi(\gamma'|(n+1))$ είναι επεκτάσεις της $\varphi(\gamma|n)$ που είναι ασύμβατες στην πρώτη μεταβλητή – ας πούμε ότι διαφέρουν στο $t \in \mathbb{N}$. Από τον ορισμό της φ^* έχουμε $\varphi(\gamma|(n+1)) \sqsubseteq \varphi^*(\gamma)$ και $\varphi(\gamma'|(n+1)) \sqsubseteq \varphi^*(\gamma')$. Επομένως

$$(\mathrm{pr}_1 \circ \varphi^*)(\gamma)(t) = \mathrm{pr}_1(\varphi(\gamma|(n+1)))(t) \neq \mathrm{pr}_1(\varphi(\gamma'|(n+1)))(t) = (\mathrm{pr}_1 \circ \varphi^*)(\gamma')(t)$$

και άρα $(\mathrm{pr}_1 \circ \varphi^*)(\gamma) \neq (\mathrm{pr}_1 \circ \varphi^*)(\gamma')$, δηλαδή $f(\gamma) \neq f(\gamma')$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Τα προηγούμενα σύνολα $W_{(u,v)}$ είναι άμεσα συνδεδεμένα με την **τοπολογία Gandy-Harrington**. Η τελευταία είναι μια τοπολογία που έχει για βάση μια αριθμήσιμη οικογένεια αναλυτικών συνόλων που προέρχονται από την κατασκευαστική θεωρία. Παρόλο που δεν είναι μετρικοποιήσιμη, έχει κάποιες ουσιαστικές ιδιότητες, όπως ότι ικανοποιεί το Θεώρημα Κατηγορίας του Baire: για κάθε ακολουθία $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από ανοικτά και πυκνά σύνολα η τομή $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$ είναι πυκνό σύνολο.

Ασκήσεις

Άσκηση 5.3.7 (Δεν υπάρχει Borel τρόπος για κλάδεμα δένδρου). Για κάθε υπεραριθμήσιμο Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ υπάρχει ένα κλειστό $T \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, έτσι ώστε για κάθε $x \in \mathcal{X}$ το σύνολο $T(x) = \{u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \mid (x, u) \in T\}$ να είναι δένδρο και για το οποίο **δεν υπάρχει** Borel σύνολο $R \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, έτσι ώστε για κάθε $x \in \mathcal{X}$ να ισχύει:

- το $R(x) = \{u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \mid (x, u) \in R\}$ είναι δένδρο και $[R(x)] = [T(x)]$,
- αν $[T(x)] \neq \varnothing$, τότε το $R(x)$ είναι κλαδεμένο.

Ειδικότερα, το $R \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ που ορίζεται ως εξής:

$$(x, u) \in R \iff \exists \alpha \ (\ u \sqsubseteq \alpha \ \& \ \alpha \in [T(x)] \ ) \ \vee \ u = \Lambda,$$

δεν είναι Borel.

5.4. Δένδρα και Διάταξη

Ορίζονται με φυσιολογικό τρόπο τρεις διμελείς σχέσεις στα δένδρα στο $\mathbb{N}$.

Ορισμός 5.4.1 (Έννοιες διάταξης). Θεωρούμε ένα μη κενό σύνολο P και ένα σύνολο $\preceq \subseteq P \times P$. Ένα τέτοιο σύνολο $\preceq$ αποκαλείται **διμελή σχέση** στο P. Γράφουμε $x \preceq y$ αντί του $(x, y) \in \preceq$. Το **αυστηρό μέρος** της $\preceq$ είναι το σύνολο $\prec \subseteq P \times P$ που ορίζεται ως εξής:

$$x \prec y \iff x \preceq y \ \& \ y \npreceq x, \qquad x, y \in P$$

Η σχέση $\preceq$ είναι:

(α) **αυτοπαθής** αν για κάθε $x \in P$ ισχύει $x \preceq x$,

(β) **αντισυμμετρική** αν για κάθε $x, y \in P$ ισχύει: $(x \preceq y \ \& \ y \preceq x) \longrightarrow x = y$,

(γ) **μεταβατική** αν για κάθε $x, y, z \in P$ ισχύει: $(x \preceq y \ \& \ y \preceq z) \longrightarrow x \preceq z$, (δ) **ολική** ή **γραμμική** αν για κάθε $x, y \in P$ έχουμε $x \preceq y$ ή $y \preceq x$,

(ε) **θεμελιωμένη** αν δεν υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του P με την ιδιότητα $x_{n+1} \prec x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ισοδύναμα, για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από στοιχεία του P που ικανοποιεί $x_{n+1} \preceq x_n$ για κάθε n υπάρχει n_0, έτσι ώστε $x_{n_0} \preceq x_{n_0} + 1$.

Η σχέση $\preceq$ είναι **μερική διάταξη** στο P ή πιο απλά **διάταξη** στο P αν είναι αυτοπαθής, αντισυμμετρική και μεταβατική. Η $\preceq$ είναι **ολική διάταξη** στο P αν είναι διάταξη στο P και είναι ολική σχέση. Μια ολική διάταξη λέγεται επίσης και **γραμμική**.

Η σχέση $\preceq$ είναι **καλή διάταξη** αν είναι ολική και θεμελιωμένη – ισοδύναμα αν είναι μερική διάταξη και κάθε μη κενό υποσύνολο του P έχει $\preceq$-ελάχιστο στοιχείο.

Το ζεύγος $(P, \preceq)$ λέγεται **μερικά διατεταγμένος χώρος** αν η $\preceq$ είναι μερική διάταξη στο P. Ομοίως ορίζονται οι έννοιες του **γραμμικά διατεταγμένου χώρου** και **καλά διατεταγμένου χώρου**.

Αν έχουμε $Q \subseteq P$, τότε ορίζεται **ο περιορισμός** $\preceq_Q$ της $\preceq$ στο σύνολο Q ως η διμελή σχέση $\preceq_Q \; = \; \preceq \cap (Q \times Q)$. Με άλλα λόγια, έχουμε

$$x \preceq_Q y \iff x, y \in Q \;\&\; x \preceq y,$$

για κάθε $x, y \in P$. Όταν έχουμε τον περιορισμό μιας σχέσης σε ένα σύνολο Q, θα χρησιμοποιούμε το ίδιο σύνολο $\preceq$ αντί του $\preceq_Q$, εκτός αν συντρέχει ιδιαίτερος λόγος.

Προκύπτει άμεσα από τους ορισμούς ότι οι ιδιότητες (α) - (ε) μεταφέρονται στους περιορισμού. Ειδικότερα, ο περιορισμός μιας διάταξης στο P πάνω σε ένα σύνολο Q είναι διάταξη στο Q. Το ζεύγος $(Q, \preceq_Q)$ λέγεται **υπόχωρος** του $(P, \preceq)$.

Τέλος θα μας απασχολήσουν διμελείς σχέσεις που είναι θεμελιωμένες και που ενδεχομένως δεν έχουν όλες τις ιδιότητες που αφορούν τις διατάξεις. Παρολ' αυτά θα τις συμβολίζουμε επίσης με $\preceq$ ή $\leqslant$ ή με οποιοδήποτε άλλο σύμβολο που σχετίζεται με τη διάταξη. Ο συγκεκριμένος συμβολισμός έχει κάποια πλεονεκτήματα καθώς μπορούμε να σκεφτόμαστε έννοιες που σχετίζονται με τις διμελείς σχέσεις με όρους διάταξης. Κάνουμε ειδική αναφορά σε μία από αυτές που θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια.

Ένα $x \in P$ είναι **$\preceq$-ελαχιστικό** αν δεν υπάρχει $y \in P$ με $y \prec x$. Ισοδύναμα για κάθε $y \in P$ με $y \preceq x$ ισχύει $x \preceq y$.

Ορισμός 5.4.2. Η **λεξικογραφική διάταξη** είναι η διμελής σχέση $\leqslant_{\text{leq}}$ στο σύνολο $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ που ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} u \leqslant_{\text{lex}} v \iff & u = v \;\vee\; u \subsetneq v \\ & \vee\; \exists i < \min\{|u|, |v|\}\; \forall j < i\; (u(j) = v(j) \;\&\; u(i) < v(j)). \end{aligned}$$

Η ιδέα είναι να τοποθετήσουμε τις πεπερασμένες ακολουθίες όπως σε ένα λεξικό. Για παράδειγμα, έχουμε $(0) <_{\text{lex}} (0, 13) <_{\text{lex}} (0, 18) <_{\text{lex}} (0, 18, 19, 20) <_{\text{lex}} (1)$, όπως ακριβώς σε ένα ελληνικό λεξικό τα ακόλουθα λήμματα εμφανίζονται με την εξής σειρά: «α», «αν», «ας», «άστυ», «β».

Αποδεικνύεται ότι η σχέση $\leqslant_{\text{leq}}$ είναι ολική διάταξη στο $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ (Άσκηση 5.4.10).

Ορισμός 5.4.3 (Αριστερότερο άπειρο κλαδί). Θεωρούμε ένα δένδρο T στο $\mathbb{N}$ με $[T] \neq \emptyset$. Τότε ορίζεται το **αριστερότερο άπειρο κλαδί** α_L του T με την εξής αναδρομή:

$$\alpha_L(0) = \text{ο ελάχιστος } p \in \mathbb{N} \text{ με } [T_{(p)}] \neq \varnothing$$
$$\alpha_L(n+1) = \text{ο ελάχιστος } p \in \mathbb{N} \text{ με } [T_{(\alpha_L(0),\ldots,\alpha_L(n))*(p)}] \neq \varnothing.$$

Στον πιο πάνω ορισμό χρησιμοποιούμε ότι αν $[T_u] \neq \varnothing$, τότε υπάρχει $p \in \mathbb{N}$ με $[T_{u*(p)}] \neq \varnothing$.

Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι το α_L είναι άπειρο κλαδί του T, δηλαδή ότι $\alpha_L \in [T]$, και ότι για κάθε n η πεπερασμένη ακολουθία $\alpha_L|n$ είναι μικρότερη ή ίση ως προς τη λεξικογραφική διάταξη από οποιοδήποτε $u \in T$ με $[T_u] \neq \varnothing$ και $n \leqslant |u|$ (Άσκηση 5.4.11).

Στη συνέχεια στρέφουμε την προσοχή μας στην κατηγορία των θεμελιωμένων σχέσεων.

Θεώρημα 5.4.4 (Αρχή Επαγωγής για θεμελιωμένες σχέσεις). *Θεωρούμε ένα μη κενό σύνολο P και μια θεμελιωμένη σχέση $\preceq$ στο P. Θεωρούμε επίσης ένα σύνολο Q με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x \in P$ αν για κάθε $y \prec x$ ισχύει $y \in Q$, τότε $x \in Q$. Τότε ισχύει $Q = P$.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε προς άτοπο ότι $Q \neq P$, δηλαδή ότι υπάρχει $x_0 \in P$ με $x_0 \notin Q$. Από την κρίσιμη ιδιότητα του Q υπάρχει $x_1 \in P$ με $x_1 \prec x_0$ και $x_1 \notin Q$. Ομοίως υπάρχει $x_2 \prec x_1$ με $x_2 \notin Q$. Επαγωγικά κατασκευάζουμε μια ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ από στοιχεία του P με την ιδιότητα $x_{n+1} \prec x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. (Εδώ γίνεται χρήση του Αξιώματος Εξαρτημένων Επιλογών DC). Αυτό όμως αντιβαίνει στην υπόθεσή μας ότι η $\preceq$ είναι θεμελιωμένη. □

Όπως και με την κλασική Αρχή Επαγωγής στο $\mathbb{N}$, όπου με τη χρήση της μπορούμε να δώσουμε *αναδρομικούς ορισμούς*, έτσι και στις θεμελιωμένες σχέσεις μπορούμε να δώσουμε τους αντίστοιχους αναδρομικούς ορισμούς. Αποφεύγουμε να δώσουμε την αυστηρή διατύπωση του εν λόγω θεωρήματος και περιοριζόμαστε στο ακόλουθο αποτέλεσμα.

Λήμμα 5.4.5 (Το Λήμμα Κατάρρευσης του Mostowski). *Για κάθε θεμελιωμένη σχέση $\preceq$ σε ένα μη κενό σύνολο P υπάρχει μοναδική συνάρτηση $\rho \equiv \rho(\preceq)$, η οποία παίρνει τιμές στους διατακτικούς αριθμούς και που ικανοποιεί*

$$\rho(x) = \sup\{\rho(y) + 1 \mid y \prec x\} \quad \textit{για κάθε } x \in P. \tag{5.7}$$

Δεν δίνουμε την απόδειξη του προηγούμενου λήμματος. Αναφέρουμε όμως ότι γίνεται χρήση του *Αξιώματος Αντικατάστασης*, ενός ξεχωριστού αξιώματος χωρίς το οποίο δεν είναι δυνατή η κατασκευή των διατακτικών αριθμών.

Ορισμός 5.4.6. Θεωρούμε ένα μη κενό σύνολο P και μια θεμελιωμένη σχέση $\preceq$ στο P. Η μοναδική συνάρτηση ρ που ικανοποιεί την πιο πάνω (5.7) ονομάζεται **συνάρτηση κατάταξης** (rank function) της $\preceq$.

Ο διατακτικός αριθμός

$$|\preceq| = \sup\{\rho(x) + 1 \mid x \in P\}$$

ονομάζεται **μήκος** της P.

Ορισμός 5.4.7. Ορίζουμε τη διμελή σχέση $\leqslant$ στο σύνολο όλων των πεπερασμένων ακολουθιών φυσικών αριθμών ως εξής:

$$u \leqslant v \iff v \sqsubseteq u, \quad u, v \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}.$$

Για κάθε δένδρο T στο $\mathbb{N}$ ορίζουμε τη διμελή σχέση $\leqslant_T$ ως τον περιορισμό της πιο πάνω σχέσης στο T, δηλαδή

$$u \leqslant_T v \iff v \sqsubseteq u, \quad u, v \in T.$$

Προφανώς, το αυστηρό μέρος $<_T$ της $\leqslant_T$ δίνεται από

$$u <_T v \iff v \sqsubseteq u \;\&\; v \neq u, \quad u, v \in T.$$

Η $\leqslant_T$ είναι προφανώς αυτοπαθής, αντισυμμετρική, και μεταβατική. Δεν είναι γραμμική γενικά. Για παράδειγμα, αν πάρουμε το δένδρο $T = \{\Lambda, (0), (1)\}$, τότε τα (0) και (1) δεν είναι συγκρίσιμα ως προς $\leqslant_T$. Επίσης, είναι εύκολο να δει κανείς ότι η σχέση $\leqslant_T$ είναι θεμελιωμένη αν και μόνο αν το T είναι θεμελιωμένο δένδρο (Άσκηση 5.4.12).

Στη συνέχεια δίνουμε μια ακόμα διμελή σχέση στο σύνολο των πεπερασμένων ακολουθιών, η οποία είναι γραμμική και συνδέεται άμεσα με τα θεμελιωμένα δένδρα.

Ορισμός 5.4.8 (Διάταξη Kleene-Brouwer ή Lousin-Sierpinski). Ορίζουμε τη διμελή σχέση $\leqslant_{\mathrm{KB}}$ στο σύνολο $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ όλων των πεπερασμένων ακολουθιών ως εξής:

$$u \leqslant_{\mathrm{KB}} v \iff v \sqsubseteq u \;\vee\; \exists i < \min\{|u|, |v|\}\; \forall j < i\; (u(j) = v(j) \;\&\; u(i) < v(i)).$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι η $\leqslant_{\mathrm{KB}}$ είναι γραμμική διάταξη στο $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ (Άσκηση 5.4.16). Αυτή η διάταξη είναι γνωστή ως **διάταξη Kleene-Brouwer** ή **διάταξη Lusin-Sierpinski**.

Σε αντιστοιχία με το αποτέλεσμα της Άσκησης 5.4.12 (διάταξη $\leqslant_T$ και θεμελιωμένα δένδρα) ισχύει το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Λήμμα 5.4.9. *Για κάθε δένδρο T στο $\mathbb{N}$ ο περιορισμός της γραμμικής διάταξης Kleene-Brouwer $\leqslant_{\mathrm{KB}}$ στο T είναι καλή διάταξη αν και μόνο αν το T είναι θεμελιωμένο δένδρο.*

Απόδειξη. Αν το T δεν είναι θεμελιωμένο δένδρο και το α είναι άπειρο κλαδί του T, τότε για κάθε n έχουμε $\alpha|n \in T$ και $\alpha|(n+1) <_{\mathrm{KB}} \alpha|n$. Προκύπτει ότι ο περιορισμός της $\leqslant_{\mathrm{KB}}$ στο T δεν είναι θεμελιωμένη σχέση.

Αντίστροφα υποθέτουμε ότι υπάρχει μια ακολουθία $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο T με $u_{n+1} <_{\mathrm{KB}} u_n$ για κάθε n και δείχνουμε ότι το T δεν είναι θεμελιωμένο. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $u_n \neq \Lambda$, γιατί η Λ είναι προφανώς το $\leqslant_{\mathrm{KB}}$-μεγαλύτερο στοιχείο του T. Αυτό σημαίνει ότι $|u_n| > 0$ και άρα ορίζεται η τιμή $u_n(0)$ για κάθε n.

Θεωρούμε την ακολουθία φυσικών αριθμών $(u_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ και παίρνουμε ένα $n \in \mathbb{N}$. Έχουμε $u_{n+1} \leqslant_{\mathrm{KB}} u_n$. Αν $u_n \sqsubseteq u_{n+1}$ τότε $u_n(0) = u_{n+1}(0)$. Αν ισχύει η δεύτερη συνθήκη για τα u_n, u_{n+1} στον ορισμό της $\leqslant_{\mathrm{KB}}$, τότε $u_{n+1}(0) \leqslant u_n(0)$ (η γνήσια ανίσωση συμβαίνει όταν το i στον ορισμό είναι ίσο με 0). Επομένως, σε κάθε περίπτωση έχουμε $u_{n+1}(0) \leqslant u_n(0)$ για κάθε n. Άρα υπάρχει ένα $n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$ ισχύει $u_n(0) = u_{n_0}(0)$.

Εφόσον $u_n <_{\mathrm{KB}} u_{n_0}$ για κάθε $n > n_0$, έχουμε ειδικότερα ότι $|u_n| > 1$ για κάθε $n > n_0$ (αλλιώς θα είχαμε $u_n = (u_n(0)) = (u_{n_0}(0)) \sqsubseteq u_{n_0}$ και άρα $u_{n_0} \leqslant_{\mathrm{KB}} u_n <_{\mathrm{KB}} u_{n_0}$, άτοπο). Επομένως, ορίζεται η τιμή $u_n(1)$ για κάθε $n > n_0$. Θεωρούμε τώρα την ακολουθία φυσικών αριθμών $(u_n(1))_{n>n_0}$ και παίρνουμε ένα $n > n_0$. Όπως πιο πάνω, έχουμε $u_{n+1} \leqslant_{\mathrm{KB}} u_n$, αν $u_n \sqsubseteq u_{n+1}$ τότε $u_n(1) = u_{n+1}(0)$. Σε διαφορετική περίπτωση υπάρχει $i < \min\{|u_n|, |u_{n+1}|\}$ έτσι ώστε για κάθε $j < i$ ισχύει $u_n(j) = u_{n+1}(j)$ και $u_{n+1}(i) < u_n(i)$. Επειδή $n > n_0$ έχουμε $u_n(0) = u_{n+1}(0)$ $(= u_{n_0}(0))$ επομένως το προηγούμενο i είναι $\geqslant 1$. Αν $i = 1$, έχουμε $u_{n+1}(1) < u_n(1)$, ενώ αν $i > 1$, τότε $u_{n+1}(1) = u_n(1)$. Σε κάθε περίπτωση, έχουμε $u_{n+1}(1) \leqslant u_n(1)$ για κάθε $n > n_0$. Επομένως, υπάρχει $n_1 > n_0$, έτσι ώστε $u_n(1) = u_{n_1}(1)$ για κάθε $n > n_1$ -υπενθυμίζουμε ότι ισχύει επίσης $u_n(0) = u_{n_0}(0)$ για κάθε $n > n_0$.

Βρήκαμε λοιπόν φυσικούς αριθμούς $n_0 < n_1$, έτσι ώστε για κάθε $n > n_1$ ισχύει $|u_n| \geqslant 2$ και

$$(u_n(0), u_n(1)) = (u_{n_0}(0), u_{n_1}(1)).$$

Επαναλαμβάνοντας το ίδιο επιχείρημα βρίσκουμε επαγωγικά μια άπειρη ακολουθία φυσικών αριθμών $n_0 < n_1 < \cdots < n_k < \ldots$, έτσι ώστε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και κάθε $n > n_k$ ισχύει $|u_n| \geqslant k + 1$ και

$$(u_n(0), \ldots, u_n(k)) = (u_{n_0}(0), \ldots, u_{n_k}(k)).$$

Θέτουμε $\alpha = (u_{n_0}(0), \ldots, u_{n_k}(k), \ldots) \in \mathcal{N}$ και έχουμε από το πιο πάνω ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$, και κάθε $n > n_k$,

$$\alpha|(k+1) = (u_n(0), \ldots, u_n(k)) \sqsubseteq u_n \in T.$$

Αφού το T είναι δένδρο, προκύπτει ότι $\alpha|(k+1) = (u_n(0), \ldots, u_n(k)) \in T$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και άρα $\alpha \in [T]$. Ειδικότερα το T δεν είναι θεμελιωμένο. ▫

Ασκήσεις

Άσκηση 5.4.10. Η λεξικογραφική διάταξη $\leqslant_{\text{lex}}$ (Ορισμός 5.4.2) είναι ολική διάταξη στο σύνολο στο $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. Είναι καλή διάταξη;

Άσκηση 5.4.11. Για κάθε δένδρο T στο $\mathbb{N}$ με μη κενό σώμα το αριστερότερο άπειρο κλαδί α_L του T (Ορισμός 5.4.3) ανήκει στο T και για κάθε $u \in T$ με $[T_u] \neq \varnothing$ ισχύει $\alpha_L|n \leqslant_{\text{lex}} u$, όπου $n \leqslant |u|$.

Άσκηση 5.4.12. Ένα δένδρο T στο $\mathbb{N}$ είναι θεμελιωμένο αν και μόνο αν η σχέση $\leqslant_T$ (Ορισμός 5.4.7) είναι θεμελιωμένη.

Άσκηση 5.4.13. Δώστε το παράδειγμα θεμελιωμένων δένδρων στο $\mathbb{N}$ στα οποία η σχέση $\leqslant_T$ (Ορισμός 5.4.7) έχει μήκος (α) $n \in \mathbb{N}$, (β) ω και (γ) $\omega + 1$.

Άσκηση 5.4.14. Για κάθε μη κενό σύνολο P και κάθε μεταβατική θεμελιωμένη σχέση $\preceq$ στο P με συνάρτηση κατάταξης ρ ισχύει το εξής:

$$x \preceq y \implies \rho(x) \leqslant \rho(y), \quad x, y \in P.$$

Άσκηση 5.4.15. Για κάθε θεμελιωμένη σχέση $\preceq$ σε ένα μη κενό αριθμήσιμο σύνολο P το μήκος $|\preceq|$ της $\preceq$ είναι ένας αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός, δηλαδή ισχύει $|\preceq| < \omega_1$, όπου ω_1 είναι ο ελάχιστος υπεραριθμήσιμος διατακτικός αριθμός.

Άσκηση 5.4.16. Η διμελής σχέση $\leqslant_{\text{KB}}$ (Ορισμός 5.4.8) είναι γραμμική διάταξη στο σύνολο $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$.

Άσκηση 5.4.17. Δίνεται ένα θεμελιωμένο δένδρο T στο $\mathbb{N}$ έτσι που οι σχέσεις $\leqslant_T$ και $\leqslant_{\text{KB}}$ περιορισμένης στο T είναι θεμελιωμένες (Άσκηση 5.4.16 και Λήμμα 5.4.9).

Αν οι συναρτήσεις κατάταξης των δύο σχέσεων είναι οι ρ και ρ_{KB} αντίστοιχα, τότε για κάθε $u \in T$ ισχύει

$$\rho(u) \leqslant \rho_{\text{KB}}(u).$$

5.5. Το Θεώρημα Kunen-Martin

Εδώ δίνουμε ένα θεώρημα σχετικά με το μήκος των θεμελιωμένων σχέσεων που είναι αναλυτικά σύνολα. Θα χρειαστούμε μία ακόμα αναπαράσταση των αναλυτικών συνόλων η οποία δίνεται με τη βοήθεια της ακόλουθης έννοιας.

Ορισμός 5.5.1 (Ημικλίμακες, [**34**] - 2B και 2G). Θεωρούμε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$, ένα $P \subseteq \mathcal{X}$, έναν καλά διατεταγμένο χώρο $(U, \leqslant)$ και μια ακολουθία συναρτήσεων $\overline{\varphi} = (\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $\varphi_n : P \to U$, $n \in \mathbb{N}$.

(i) Η $\overline{\varphi}$ ονομάζεται $(U, \leqslant)$-**ημικλίμακα** ($(U, \leqslant)$-**semiscale**) αν για κάθε ακολουθία $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ στο P και κάθε $x \in \mathcal{X}$ ισχύει η εξής συνεπαγωγή:

$$\left.\begin{array}{c}\big(\text{ για κάθε } n \in \mathbb{N} \text{ η } (\varphi_n(x_i))_{i\in\mathbb{N}} \text{ είναι τελικά σταθερή} \\ \& \ \text{ η } (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \text{ συγκλίνει στο } x\ \big)\end{array}\right\} \implies x \in P.$$

(Όταν λέμε ότι η $(\varphi_n(x_i))_{i\in\mathbb{N}}$ είναι «τελικά σταθερή» εννοούμε ότι υπάρχει $i_0(n) \equiv i_0$, έτσι ώστε για κάθε $i \geqslant i_0$ ισχύει $\varphi_n(x_i) = \varphi_n(x_{i_0})$.)

Μπορούμε να σκεφτούμε την πιο πάνω συνθήκη σαν ένα είδος «κλειστότητας» για το σύνολο P: περιέχει τα οριακά του σημεία για τα οποία για κάθε n η $(\varphi_n(x_i))_{i\in\mathbb{N}}$ είναι τελικά σταθερή, όπου $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία που συγκλίνει στο οριακό σημείο που εξετάζουμε.

Όταν η διάταξη του U είναι ξεκάθαρη από το περιεχόμενο, θα χρησιμοποιούμε πιο απλά τον όρο U-ημικλίμακα. Θα μας απασχολήσουν ιδιαίτερα οι $\mathbb{N}$-ημικλίμακες. όπου το $\mathbb{N}$ το θεωρούμε με τη συνήθη διάταξη.

(ii) Η $\overline{\varphi}$ ονομάζεται **καλή** $(U, \leqslant)$-**ημικλίμακα** ή πιο απλά καλή U-ημικλίμακα στο P αν για κάθε ακολουθία $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του P ισχύει η εξής συνεπαγωγή:

$$\text{για κάθε } n \in \mathbb{N} \text{ η } (\varphi_n(x_i))_{i\in\mathbb{N}} \text{ είναι τελικά σταθερή} \implies \exists x \in P\ x_i \to x.$$

Η πιο πάνω συνθήκη εκφράζει ένα είδος «πληρότητας» για το P: η συνθήκη «για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η $(\varphi_n(x_i))_{i\in\mathbb{N}}$ είναι τελικά σταθερή» παίζει το ρόλο της ακολουθίας Cauchy, και το συμπέρασμα είναι η ύπαρξη ενός ορίου x που ανήκει μέσα στο P.

Παρατήρηση 5.5.2. Κάθε καλή U-ημικλίμακα σε ένα σύνολο $P \subseteq \mathcal{X}$ είναι και U-καλή ημικλίμακα (Άσκηση 5.5.6).

Οι ημικλίμακες δίνουν έναν ακόμα χρήσιμο χαρακτηρισμό της κλάσης όλων των αναλυτικών συνόλων.

Πρόταση 5.5.3 ([**34**] - 2B.1 και 2G.1). *Δίνεται ένας Πολωνικός χώρος $\mathcal{X}$ και ένα $P \subseteq \mathcal{X}$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Το P είναι αναλυτικό σύνολο.*

(ii) *Το P επιδέχεται μια καλή $\mathbb{N}$-ημικλίμακα.*

(iii) *Το P επιδέχεται μια $\mathbb{N}$-ημικλίμακα.*

Απόδειξη. Ξεκινάμε με την ορολογία που θα χρησιμοποιούμε σε αυτή την απόδειξη. Θεωρούμε μια συμβατή μετρική d στο $\mathcal{X}$ και μια βάση $\{V_s \mid s \in \mathbb{N}\}$ της τοπολογίας του $\mathcal{X}$. Θα λέμε ότι μια πεπερασμένη ακολουθία φυσικών αριθμών $(s_0, \ldots, s_{n-1})$ είναι *κατάλληλη* αν

$$\overline{V_{s_{n-1}}} \subseteq \cdots \subseteq \overline{V_{s_0}}$$

και η d-διάμετρος κάθε V_{s_i} είναι $\leqslant 2^{-i}$, για κάθε $i < n$. Η κενή ακολουθία είναι εξ ορισμού κατάλληλη.

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in \mathcal{X}$ και κάθε $n \geqslant 1$ υπάρχει μια κατάλληλη πεπερασμένη ακολουθία $(s_0, \ldots, s_{n-1})$ με $x \in V_{s_{n-1}}$: για να το δούμε αυτό θεωρούμε $0 < r \leqslant 2^{-n}$ και $s \in \mathbb{N}$ με $x \in V_s \subseteq B_d(x, r/2)$. Τότε η πεπερασμένη ακολουθία $(s)^n = (s, \ldots, s)$ είναι κατάλληλη.

Για κάθε x και $n \geqslant 1$ επιλέγουμε μια κατάλληλη ακολουθία $(s_0^x, \ldots, s_{n-1}^x)$ με $x \in V_{s_{n-1}}$. Αυτή η επιλογή γίνεται εύκολα. Για παράδειγμα, παίρνουμε την ακολουθία που είναι η ελάχιστη μέσα από μια απαρίθμηση του $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ από τις κατάλληλες ακολουθίες $(s_0, \ldots, s_{n-1})$ με $x \in V_{s_n-1}$. Όταν $n = 0$, επιλέγουμε αυτό που εκφράζει ο όρος $(s_0^x, \dots, s_{n-1}^x)$ για $n = 0$, δηλαδή την κενή ακολουθία. Τώρα είμαστε έτοιμοι να αποδείξουμε τις ισοδυναμίες.

(i) $\Longrightarrow$ (ii). Υποθέτουμε ότι το P είναι αναλυτικό υποσύνολο του $\mathcal{X}$ και ορίζουμε μια καλή $\mathbb{N}$-ημικλίμακα στο P. Υπάρχει ένα κλειστό σύνολο $F \subseteq \times\mathcal{N}$ με $P = \exists^{\mathcal{N}} F$. Από το Βασικό Λήμμα Αναπαράστασης Κλειστών Συνόλων 2.5.14 υπάρχει ένα κλειστό $T \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, έτσι ώστε για κάθε $x \in \mathcal{X}$ το σύνολο $T(x) = \{u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \mid (x, u) \in T\}$ να είναι δένδρο και $F_x = [T(x)]$.

Αρχικά ορίζουμε τη συνάρτηση $f : P \to \mathcal{N} : f(x) =$ το αριστερότερο άπειρο κλαδί του $T(x)$, όπου $x \in P$. Αυτή είναι καλά ορισμένη συνάρτηση γιατί για κάθε $x \in P$ έχουμε $[T(x)] = F_x \neq \emptyset$. Επομένως το $T(x)$ έχει άπειρα κλαδιά και από τον Ορισμό 5.4.3 υπάρχει το αριστερότερο άπειρο κλαδί του $T(x)$. Για απλότητα γράφουμε α^x αντί για $f(x)$.

Στη συνέχεια ορίζουμε για κάθε $n \geqslant 1$ τη συνάρτηση

$$\varphi_n : P \to \mathbb{N} : \varphi_n(x) = \langle s_{n-1}^x, \alpha^x(n-1) \rangle.$$

όπου s_{n-1}^x είναι ο τελευταίος όρος της κατάλληλης ακολουθίας $(s_0^x, \dots, s_{n-1}^x)$ μήκους n με $x \in V_{s_{n-1}^x}$, όπως έχουμε επιλέξει πιο πάνω. Επίσης ορίζουμε $\varphi_0(x) = 1$ (ο κωδικός της κενής ακολουθίας).

Δείχνουμε ότι η $\overline{\varphi} = (\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι καλή $\mathbb{N}$-ημικλίμακα στο P. Προς αυτό θεωρούμε μια ακολουθία $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ στοιχείων του P με την ιδιότητα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η ακολουθία $(\varphi_n(x_i))_{i \in \mathbb{N}}$ να είναι τελικά σταθερή. Πρέπει να βρούμε ένα $x \in P$ με $x_i \to x$.

Σταθεροποιούμε ένα $n \geqslant 1$, τότε υπάρχει $i_n \in \mathbb{N}$, έτσι ώστε για κάθε $i \geqslant i_n$ ισχύει $\varphi_n(x_i) = \varphi_n(x_{i_n})$, δηλαδή

$$\langle s_{n-1}^{x_i}, \alpha^{x_i}(n-1) \rangle = \langle s_{n-1}^{x_{i_n}}, \alpha^{x_{i_n}}(n-1) \rangle. \tag{5.8}$$

Ειδικότερα, για κάθε $i \geqslant i_n$ έχουμε $s_{n-1}^{x_i} = s_{n-1}^{x_{i_n}}$ και συνεπώς

$$x_i \in V_{s_{n-1}^{x_i}} = V_{s_{n-1}^{x_{i_n}}}.$$

Προκύπτει ότι για κάθε $i, j \geqslant i_n$ έχουμε $x_i, x_j \in V_{s_{n-1}^{x_{i_n}}}$ και άρα

$$d(x_i, x_j) \leqslant d\text{-διάμετρος}(V_{s_{n-1}^{x_{i_n}}}) \leqslant 2^{n-1}.$$

Καταλήγουμε ότι για κάθε $n \geqslant 1$ υπάρχει $i_n \in \mathbb{N}$, έτσι ώστε για κάθε $i, j \geqslant i_n$ ισχύει $d(x_i, x_j) < 2^{n-1}$. Επομένως, η ακολουθία $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ είναι d-Cauchy και αφού ο $(\mathcal{X}, d)$ είναι πλήρης υπάρχει $x \in \mathcal{X}$ με $x_i \xrightarrow{d} x$.

Απομένει να δείξουμε ότι το πιο πάνω x ανήκει στο P. Σταθεροποιούμε ξανά ένα $n \geqslant 1$ και θεωρούμε ένα i_n, έτσι ώστε για κάθε $i \geqslant i_n$ να ικανοποιείται η (5.8) πιο πάνω. Τότε για κάθε $i \geqslant i_n$ ισχύει $\alpha^{x_i}(n-1) = \alpha^{x_{i_n}}(n-1)$. Επομένως, η ακολουθία φυσικών αριθμών $(\alpha^{x_i}((n-1))_{i \in \mathbb{N}}$ σταθεροποιείται στον $\alpha^{x_{i_n}}(n-1)$. Επειδή αυτό συμβαίνει για κάθε n συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία $(\alpha^{x_i})_{i \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στο

$$\alpha = (\alpha^{x_{i_1}}(0), \alpha^{x_{i_2}}(1), \dots, \alpha^{x_{i_n}}(n-1), \dots).$$

Έχουμε επομένως $(x_i, \alpha^{x_i}) \to (x, \alpha)$. Υπενθυμίζουμε ότι το α^{x_i} είναι το αριστερότερο άπειρο κλαδί του δένδρου $T(x_i)$. Ειδικότερα, έχουμε $\alpha^{x_i} \in [T(x_i)] = F_{x_i}$, δηλαδή $(x_i, \alpha^{x_i}) \in F$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Επειδή το F είναι κλειστό και $(x_i, \alpha^{x_i}) \to (x, \alpha)$, προκύπτει ότι $(x, \alpha) \in F$. Επομένως, $x \in \exists^{\mathcal{N}} F = P$ και έχουμε το ζητούμενο.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). Δείτε την Άσκηση 5.5.6.

(iii) $\Longrightarrow$ (i). Θεωρούμε μια $\mathbb{N}$-ημικλίμακα $\overline{\varphi} = (\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο P και δείχνουμε ότι το P είναι αναλυτικό σύνολο.

Αρχικά παίρνουμε μια αντιστοιχία $[\cdot] : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathbb{N} : (s,t) \mapsto [s,t]$. Τότε κάθε $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως εξής: $u = ([s_0,t_0],\dots,[s_{n-1},t_{n-1}]) \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. Στα πλαίσια αυτής της απόδειξης θα λέμε ότι η $u = ([s_0,t_0],\dots,[s_{n-1},t_{n-1}]) \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ είναι *πολύ καλή* αν η $(s_0,\dots,s_{n-1})$ είναι κατάλληλη και υπάρχει $y \in V_{s_{n-1}} \cap P$ με $\varphi_m(y) = t_m$ για κάθε $m < n$.

Στη συνέχεια ορίζουμε $u = ([s_0,t_0],\dots,[s_{n-1},t_{n-1}]) \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ το σύνολο P_u ως εξής:

$$P_u = \begin{cases} \overline{V_{s_{n-1}}}, & \text{αν η } u \text{ είναι πολύ καλή} \\ \varnothing, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Είναι προφανές ότι κάθε P_u είναι κλειστό σύνολο. Ισχυριζόμαστε ότι

$$x \in P \iff \exists\alpha\ \forall n\ x \in P_{\alpha|n}. \tag{5.9}$$

Για την ευθεία κατεύθυνση υποθέτουμε ότι $x \in P$ και παίρνουμε μια ακολουθία $\beta = (s_0,\dots,s_{n-1},\dots,)$, έτσι ώστε για κάθε $n \geqslant 1$ ισχύει $x \in V_{s_{n-1}} \subseteq \dots \subseteq V_{s_0}$ και η d-διάμετρος του $V_{s_{n-1}}$ είναι $\leqslant 2^{-(n-1)}$, έτσι που για κάθε n η πεπερασμένη ακολουθία $(s_0,\dots,s_{n-1})$ είναι κατάλληλη και $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_{s_n} = \{x\}$. Μια τέτοια ακολουθία κατασκευάζεται εύκολα με αναδρομή χρησιμοποιώντας ανοικτές μπάλες κέντρου x και κατάλληλα μικρής ακτίνας. Στη συνέχεια, θέτουμε $t_m = \varphi_n(x)$, το οποίο είναι καλά ορισμένο γιατί $x \in P$, και

$$\alpha = ([s_0,t_0],\dots,[s_{n-1},t_{n-1}],\dots).$$

Τότε για κάθε n η πεπερασμένη ακολουθία $\alpha|n = ([s_0,t_0],\dots,[s_{n-1},t_{n-1}])$ είναι πολύ καλή (παίρνουμε για y το $x \in V_{s_{n-1}} \cap P$). Επομένως έχουμε $P_{\alpha|n} = \overline{V_{s_{n-1}}}$ και άρα $x \in P_{\alpha|n}$. Αυτό αποδεικνύει την ευθεία κατεύθυνση της (5.9).

Για την αντίστροφη κατεύθυνση θεωρούμε ότι υπάρχει $\alpha = ([s_0,t_0],\dots,[s_{n-1},t_{n-1}],\dots)$ με $x \in P_{\alpha|n}$ για κάθε n. Αφού $P_{\alpha|n} \neq \varnothing$, έχουμε ειδικότερα ότι η $\alpha|n$ είναι πολύ καλή και άρα $x \in P_{\alpha|n} = \overline{V_{s_{n-1}}}$ για κάθε n.

Επιπλέον υπάρχει ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $y_n \in V_{s_{n-1}} \cap P$ και

$$\varphi_m(y_n) = t_m \quad \text{για κάθε } n > m. \tag{5.10}$$

Επομένως, $d(x,y_n) \leqslant d$-διάμετρος$(\overline{V_{s_{n-1}}})$ και επειδή η $(s_0,\dots,s_{n-1})$ είναι κατάλληλη, έχουμε $d(x,y_n) \leqslant 2^{n-1}$ για κάθε n. Άρα $y_n \to x$.

Σταθεροποιούμε ένα $n \in \mathbb{N}$ και $i > n$. Από την (5.10) εφαρμοσμένη στο (i,n) στη θέση του (n,m) έχουμε $\varphi_n(y_i) = t_n$. Οπότε η ακολουθία $(\varphi_n(y_i))_{i\in\mathbb{N}}$ σταθεροποιείται στο t_n για όλα τα μεγάλα i (συγκεκριμένα για τα $i > n$).

Έχουμε λοιπόν μια ακολουθία $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του P, η οποία συγκλίνει στο x και για κάθε n η ακολουθία $(\varphi_n(y_i))_{i\in\mathbb{N}}$ είναι τελικά σταθερή. Από την ιδιότητα της $\mathbb{N}$-ημικλίμακας προκύπτει ότι $x \in P$ και η (5.9) απεδείχθη.

Για να τελειώσουμε την απόδειξη, ορίζουμε τα σύνολα

$$F_n = \{(x,\alpha) \in \mathcal{X} \times \mathcal{N} \mid x \in P_{\alpha|n}\} \quad \text{και} \quad F = \textstyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$$

έτσι που η (5.9) γίνεται

$$x \in P \iff \exists\alpha\ \forall n\ (x,\alpha) \in F_n \iff \exists\alpha\ (x,\alpha) \in F.$$

Επομένως $P = \exists^{\mathcal{N}} F$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι κάθε F_n είναι κλειστό σύνολο, οπότε και το F είναι κλειστό. Άρα το P είναι αναλυτικό σύνολο. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. ▫

Λήμμα 5.5.4. *Θεωρούμε δύο μη κενά σύνολα P, Q και δύο θεμελιωμένες διμελείς σχέσεις $\leqslant_P$, $\leqslant_Q$ στα P και Q αντίστοιχα. Αν υπάρχει συνάρτηση $\sigma : P \to Q$ με την ιδιότητα*

$$x <_P y \implies \sigma(x) <_Q \sigma(y), \qquad \text{για κάθε } x,y \in P,$$

τότε $|\leqslant_P| \leqslant |\leqslant_Q|$.

Απόδειξη. Θεωρούμε τις συναρτήσεις κατάταξης ρ^P και ρ^Q των $\leqslant_P$ και $\leqslant_Q$ αντίστοιχα. Δείχνουμε με εφαρμογή της Αρχής Επαγωγής για θεμελιωμένες σχέσεις (Θεώρημα 5.4.4) ότι για κάθε $x \in P$ ισχύει $\rho^P(x) \leqslant \rho^Q(\sigma(x))$.

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $x \in P$ και για κάθε $y \prec_P x$ ισχύει $\rho^P(y) \leqslant \rho^Q(\sigma(y))$ και δείχνουμε ότι $\rho^P(x) \leqslant \rho^Q(\sigma(x))$. Επειδή το $\rho^P(x)$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του συνόλου $A_x = \{\rho^P(y)+1 \mid y \prec_P x\}$, αρκεί να δείξουμε ότι ο διατακτικός αριθμός $\rho^Q(\sigma(x))$ είναι άνω φράγμα του A_x. Θεωρούμε λοιπόν ένα $y \prec_P x$ και δείχνουμε ότι $\rho(y)+1 \leqslant \rho^Q(\sigma(x))$.

Από την ιδιότητα μονοτονίας της σ έχουμε ότι $\sigma(y) \prec_Q \sigma(x)$. Συνεπώς

$$\rho^Q(\sigma(y))+1 \in \{\rho^Q(w)+1 \mid w \prec_Q \sigma(x)\}$$

και άρα

$$\rho^Q(\sigma(y))+1 \leqslant \sup\{\rho^Q(w)+1 \mid w \prec_Q \sigma(x)\} = \rho^Q(\sigma(x)).$$

Από το Θεώρημα 5.4.4 προκύπτει ότι $\rho^P(x) \leqslant \rho^Q(\sigma(x))$ για κάθε $x \in P$.

Τέλος

$$\begin{aligned}
|\leqslant_P| &= \sup\{\rho^P(x)+1 \mid x \in P\}\\
&\leqslant \sup\{\rho^Q(\sigma(x))+1 \mid x \in P\}\\
&\leqslant \sup\{\rho^Q(w)+1 \mid w \in Q\}\\
&= |\leqslant_Q|.
\end{aligned}$$

□

Θεώρημα 5.5.5 (Το Θεώρημα Kunen-Martin για αναλυτικά σύνολα, [**34**]-2G.2 και [**26**]). *Θεωρούμε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$, ένα μη κενό $P \subseteq \mathcal{X}$ και μια θεμελιωμένη διμελή σχέση $\preceq$ στο P. Αν το αυστηρό μέρος $\prec$ της $\preceq$ είναι αναλυτικό υποσύνολο του $\mathcal{X}$, τότε η $\preceq$ έχει αριθμήσιμο μήκος, δηλαδή $|\preceq| < \omega_1$.*

Απόδειξη. Με $x \succ y$ εννοούμε $y \prec x$ για κάθε $x, y \in P$. Ορίζουμε το σύνολο $T \subseteq \mathcal{X}^{<\mathbb{N}}$ ως εξής:

$$T = \{\Lambda\} \cup \{(x) \mid x \in P\} \ \cup \ \{(x_0, \dots, x_n) \mid x_0 \succ \dots \succ x_n, \ n \geqslant 1\}.$$

Προκύπτει άμεσα ότι το T είναι δένδρο στο $\mathcal{X}$. Άπειρο κλαδί του T είναι μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον $\mathcal{X}$ με $x_{n+1} \prec x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, κάτι που δεν μπορεί να συμβαίνει γιατί η $\preceq$ είναι θεμελιωμένη. Επομένως, το δένδρο T δεν έχει άπειρα κλαδιά, είναι δηλαδή θεμελιωμένο. Από την Άσκηση 5.4.12 η σχέση $\leqslant_T$,

$$u \leqslant_T v \iff u, v \in T \ \& \ v \sqsubseteq u,$$

είναι θεμελιωμένη σχέση στο T. Όπως αναφέραμε, το αυστηρό μέρος $<_T$ της $\leqslant_T$ ικανοποιεί

$$u <_T v \iff u, v \in T \ \& \ v \sqsubsetneq u.$$

Συμβολίζουμε με ρ και ρ^T τις συναρτήσεις κατάταξης των θεμελιωμένων σχέσεων $\preceq$ και $\leqslant_T$ αντίστοιχα.

Ισχυρισμός. Για κάθε $x \in P$ και κάθε $u = (x_0, \dots, x_{n-1}) \in P^{<\mathbb{N}}$ αν $u*(x) \in T$, τότε $\rho(x) = \rho^T(u*(x))$.

Απόδειξη ισχυρισμού. Με επαγωγή στο $x \in P$ ως προς τη θεμελιωμένη σχέση $\preceq$ (Θεώρημα 5.4.4). Θεωρούμε $x \in P$ και υποθέτουμε ότι για κάθε $y \prec x$ ισχύει το εξής: για κάθε $u \in P^{<\mathbb{N}}$ αν $u*(y) \in T$, τότε $\rho(y) = \rho^T(u*(y))$.

Παίρνουμε $u \in P^{<\mathbb{N}}$ και υποθέτουμε ότι $u * (x) \in T$. Πρέπει να δείξουμε ότι $\rho(x) = \rho^T(u * (x))$. Θέτουμε προσωρινά

$$A = \{\rho(y) + 1 \mid y \prec x\} \quad \text{και} \quad B = \{\rho^T(v) + 1 \mid v <_T u * (x)\}$$

έτσι που $\rho(x) = \sup A$ και $\rho^T(u * (x)) = \sup B$. Πρέπει λοιπόν να δείξουμε ότι $\sup A = \sup B$.

Θεωρούμε αρχικά $y \prec x$. Τότε $u * (x, y) \in T$ και επειδή $u * (x) \sqsubsetneq u * (x, y)$ ισχύει $u * (x, y) <_T u * (x)$. Εφαρμόζουμε την Επαγωγική Υπόθεση στο $y \prec x$ και στο $u * (x)$: αν $u * (x) * (y) = u * (x, y) \in T$ τότε $\rho(y) = \rho^T(u * (x, y))$. Είναι όμως $u * (x, y) \in T$ επομένως ισχύει $\rho(y) = \rho^T(u * (x, y))$. Αυτό δείχνει ότι για κάθε $y \prec x$ υπάρχει $v \in T$ με $v <_T u*(x)$ (συγκεκριμένα το $u*(x, y)$), έτσι ώστε $\rho(y) = \rho^T(v)$. Επομένως $A \subseteq B$ και άρα $\sup A \leqslant \sup B$.

Απομένει να δείξουμε ότι $\sup B \leqslant \sup A$, ισοδύναμα ότι το $\sup A$ είναι άνω φράγμα του συνόλου B. Θεωρούμε $v <_T u * (x)$ και δείχνουμε ότι $\sup A \geqslant \rho^T(v) + 1$. Έχουμε $u * (x) \sqsubsetneq v$, θέτουμε $y = v(|(|u) + 1)$, έτσι που $u * (x, y) \sqsubseteq v$. Εφόσον $v \in T$ έχουμε ότι $u * (x, y) \in T$, ειδικότερα $y \prec x$. Όπως πιο πάνω, εφαρμόζουμε την Επαγωγική Υπόθεση στο $y \prec x$ και στο $u*(x)$: αν $u*(x)*(y) = u * (x, y) \in T$, τότε $\rho(y) = \rho^T(u * (x, y))$. Είναι όμως $u * (x, y) \in T$, οπότε ισχύει $\rho(y) = \rho^T(u * (x, y))$.

Ισχύει επίσης $v \leqslant_T u * (x, y)$ και αφού η $\leqslant_T$ είναι μεταβατική από την Άσκηση 5.4.14 έχουμε $\rho^T(v) \leqslant \rho^T(u * (x, y))$. Καταλήγουμε ότι

$$\sup A \geqslant \rho(y) + 1 = \rho^T(u * (x, y)) + 1 \geqslant \rho^T(v) + 1$$

που είναι το ζητούμενο. Αυτό ολοκληρώνει το Επαγωγικό Βήμα.

Από την Αρχή Επαγωγής στη θεμελιωμένη σχέση $\preceq$ έχουμε ότι κάθε $x \in P$ ικανοποιεί τη ζητούμενη ιδιότητα και ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Εφαρμόζουμε τον προηγούμενο ισχυρισμό για $u = \Lambda$: αν έχουμε $x \in P$ τότε $\Lambda * (x) = (x) \in T$ και άρα $\rho(x) = \rho^T((x))$. Επομένως

$$\begin{aligned}
\rho^T(\Lambda) &= \sup\{\rho^T(u) + 1 \mid u <_T \Lambda\} \\
&= \sup\{\rho^T(u) + 1 \mid \Lambda \sqsubsetneq u \in T\} \\
&= \sup\{\rho^T((x)) + 1 \mid (x) \in T\} \\
&\quad \text{(αφού } u \leqslant_T (u(0) \text{ ισχύει } \rho^T(u) \leqslant \rho^T(u(0)) \text{ για κάθε } u \in T \text{ με } |u| \geqslant 1) \\
&= \sup\{\rho^T((x)) + 1 \mid x \in P\} \\
&= \sup\{\rho(x) \mid x \in P\} \\
&= |\preceq|.
\end{aligned}$$

Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι το $\rho^T(\Lambda)$ είναι αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός. Μάλιστα παρατηρούμε ότι

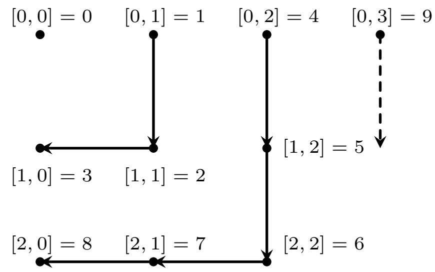
$$\begin{aligned}
|\leqslant_T| &= \sup\{\rho^T(u) + 1 \mid u \in T\} \\
&= \rho^T(\Lambda) + 1 \quad \text{(αφού } u \leqslant_T \Lambda \text{ ισχύει } \rho^T(u) \leqslant \rho^T(\Lambda) \text{ για κάθε } u \in T).
\end{aligned}$$

Άρα μπορούμε να δείξουμε ισοδύναμα ότι ο διατακτικός αριθμός $|\leqslant_T|$ είναι αριθμήσιμος. Αυτό θα γίνει με εφαρμογή του Λήμματος 5.5.4. Θα βρούμε ένα αριθμήσιμο σύνολο Q, μια θεμελιωμένη διμελή σχέση $\leqslant_Q$ στο Q και μια συνάρτηση $\sigma : T \to Q$ με την ιδιότητα

$$u <_T v \implies \sigma(u) <_Q \sigma(v).$$

Εφόσον το Q είναι αριθμήσιμο, θα έχουμε από την Άσκηση 5.4.15 ότι $|\leqslant_Q| < \omega_1$ και άρα από το Λήμμα 5.5.4,

$$|\leqslant_T| \leqslant |\leqslant_Q| < \omega_1,$$



Διαγραμμα 1. Η «τετραγωνική» απαρίθμηση του $\mathbb{N}^2$.

που είναι το ζητούμενο.

Για τον ορισμό των Q, $\leqslant_Q$ και σ, παίρνουμε το σύνολο $R = \{(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X} \mid x \succ y\}$. Επειδή το αυστηρό μέρος $\prec$ είναι αναλυτικό σύνολο, έχουμε ότι και το R είναι αναλυτικό σύνολο. Από την Πρόταση 5.5.3 υπάρχει μια καλή $\mathbb{N}$-ημικλίμακα $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο R. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε ακολουθία $((x_m, y_m))_{m\in\mathbb{N}}$ με $x_m \succ y_m$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$, αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η ακολουθία $(\varphi_n(x_m, y_m))_{m\in\mathbb{N}}$ είναι τελικά σταθερή, τότε υπάρχουν $x, y \in \mathcal{X}$ με $x \succ y$ και $(x_m, y_m) \to (x, y)$.

Στη συνέχεια θεωρούμε την αντιστοιχία $[\cdot, \cdot] : \mathbb{N}^2 \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow \mathbb{N} : (n, j) \mapsto [n, j]$ που απαριθμεί το $\mathbb{N}^2$ «τετραγωνικά», δείτε το Σχήμα 1. Αυτή η αντιστοιχία ικανοποιεί επιπλέον για κάθε $m \in \mathbb{N}$,

$$
\begin{aligned}
&\forall n, j \leqslant m \ ([n, j] \leqslant [m, 0]),\\
&\forall p \leqslant [m, 0] \ \exists n, j \leqslant m \ (p = [n, j]),\\
&[m, 0] + 1 = [0, m + 1],\\
&[0, m] = m^2.
\end{aligned}
$$

Έπειτα ορίζουμε τη συνάρτηση $\tau : \{u \in T \mid |u| \geqslant 2\} \to \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ ως εξής:

$$
\begin{aligned}
|\tau(x_0, \ldots, x_m)| &= [0, m], \quad (m \geqslant 1)\\
\tau(x_0, \ldots, x_m)(p) &= \tau(x_0, \ldots, x_m)([n, j]) = \varphi_n(x_j, x_{j+1})\\
&\qquad \text{όπου } p = [n, j] < [0, m].
\end{aligned}
$$

Η πιο πάνω έκφραση $\tau(x_0, \ldots, x_m)(p)$ είναι καλά ορισμένη. Αν $p < [0, m] = [m-1, 0] + 1$, τότε $p \leqslant [m-1, 0]$ και άρα $p = [n, j]$ για κάποια μοναδικά $n, j \leqslant m-1$. Ειδικότερα τα (x_j, x_{j+1}) είναι κάποια από τα $(x_0, \ldots, x_m)$ και η έκφραση $\varphi_n(x_j, x_{j+1})$ έχει νόημα.

Η ιδέα είναι να συμπεριλάβουμε στην $\tau(x_0, \ldots, x_m)$ όλα τα $\varphi_n(x_j, x_{j+1})$ για $n, j < m$ και μάλιστα *σε σταθερές θέσεις*, δηλαδή σε θέσεις που εξαρτώνται μόνο από τα n, j.

Είναι τότε σαφές από τον ορισμό της τ ότι αυτή ικανοποιεί τα εξής:

$$
\begin{aligned}
u \subsetneq v &\implies \tau(u) \subsetneq \tau(v)\\
|u| = |v| &\implies |\tau(u)| = |\tau(v)|\\
|u| < |v| &\implies |\tau(u)| < |\tau(v)|
\end{aligned}
$$

για κάθε $u, v \in T$ με $|u|, |v| \geqslant 1$, όπου στην τελευταία συνεπαγωγή χρησιμοποιούμε ότι $[0, m] = m^2 < (m+1)^2 = [0, m+1]$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$.

Στη συνέχεια ορίζουμε τη συνάρτηση $\sigma : T \to \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ ως εξής:

$$\begin{aligned}
\sigma(\Lambda) &= \Lambda \\
\sigma((x)) &= (0), \quad (x) \in T \\
\sigma(x_0, \ldots, x_m) &= (0) * \tau(x_0, \ldots, x_m), \quad (x_0, \ldots, x_m) \in T, m \geqslant 1.
\end{aligned}$$

Είναι επίσης σαφές ότι η σ ικανοποιεί τις προηγούμενες ιδιότητες,

$$u \subsetneq v \implies \sigma(u) \subsetneq \sigma(v) \tag{5.11}$$

$$|u| = |v| \implies |\sigma(u)| = |\sigma(v)| \tag{5.12}$$

$$|u| < |v| \implies |\sigma(u)| < |\sigma(v)| \tag{5.13}$$

για κάθε $u, v \in T$.

Ορίζουμε $Q = \sigma[T]$, έτσι που $\sigma : T \to Q$ και το $Q \subseteq \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ είναι αριθμήσιμο σύνολο. Ορίζουμε επίσης της διμελή σχέση $\leqslant_Q$,

$$z \leqslant_Q w \iff z, w \in Q \ \& \ w \sqsubseteq z$$

Όπως και με τη σχέση $\leqslant_T$, το αυστηρό μέρος $<_Q$ της $\leqslant_Q$ ικανοποιεί

$$z <_Q w \iff z, w \in Q \ \& \ w \subsetneq z.$$

Επιπλέον για κάθε $u <_T v$ έχουμε $v \subsetneq u$ και άρα από την (5.11) ισχύει $\sigma(v) \subsetneq \sigma(u)$. Άρα $\sigma(u) <_Q \sigma(v)$.

Απομένει να δείξουμε ότι η σχέση $\leqslant_Q$ είναι θεμελιωμένη. Τότε θα μπορούμε να εφαρμόσουμε το Λήμμα 5.5.4 και, όπως έχουμε εξηγήσει πιο πάνω, αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

Έστω προς άτοπο ότι υπάρχει ακολουθία $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ στο T με $\sigma(u_{m+1}) <_Q \sigma(u_m)$, ισοδύναμα $\sigma(u_m) \subsetneq \sigma(u_{m+1})$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$.

Δείχνουμε με επαγωγή στο m ότι $|u_m| \geqslant m$. Για $m = 0$ αυτό είναι σαφές. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $m \in \mathbb{N}$ ισχύει $|u_m| \geqslant m$ και δείχνουμε ότι $|u_{m+1}| \geqslant m+1$. Αν ήταν $|u_{m+1}| < m+1$, τότε $|u_{m+1}| \leqslant m \leqslant |u_m|$ και από τις (5.12) και (5.13) θα είχαμε $|\sigma(u_{m+1})| \leqslant |\sigma(u_m)|$ που έρχεται σε αντίθεση με την $\sigma(u_m) \subsetneq \sigma(u_{m+1})$. Άρα $|u_{m+1}| \geqslant m+1$.

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $|u_m| = m$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Για να το δούμε αυτό, θέτουμε $v_m = u_m|m \in T$, έτσι που $|v_m| = m$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Επιπλέον παρατηρούμε ότι $\sigma(v_m) \sqsubseteq \sigma(u_m) \sqsubseteq \sigma(u_{m+1})$ και $\sigma(v_{m+1}) \sqsubseteq \sigma(u_{m+1})$. Επομένως, οι πεπερασμένες ακολουθίες $\sigma(v_m)$, $\sigma(v_{m+1})$ είναι αρχικά τμήματα της ίδιας πεπερασμένης ακολουθίας και άρα είναι συγκρίσιμες ως προς $\sqsubseteq$. Επειδή $|v_m| = m < m+1 = |v_{m+1}|$, έχουμε από την (5.13) ότι $|\sigma(v_m)| < |\sigma(v_{m+1})|$. Επομένως δεν μπορεί να έχουμε $\sigma(v_{m+1}) \sqsubseteq \sigma(v_m)$, και άρα ισχύει $\sigma(v_m) \subsetneq \sigma(v_{m+1})$. Καταλήγουμε ότι η $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ ικανοποιεί την ίδια ιδιότητα με την $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$.

Χωρίς βλάβη λοιπόν μπορούμε να υποθέσουμε ότι $|u_m| = m$ και γράφουμε $u_m = (x_0^m, \ldots, x_{m-1}^m)$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$.

Ισχυριζόμαστε ότι για κάθε $j, n \in \mathbb{N}$ η ακολουθία $(\varphi_n(x_j^m, x_{j+1}^m))_{m\in\mathbb{N}}$ είναι τελικά σταθερή. Πράγματι, δοσμένων $j, n \in \mathbb{N}$ έχουμε για κάθε $m > [n, j]$ ότι $[0, m] = m^2 \geqslant m > [n, j]$ και άρα

$$\varphi_n(x_j^m, x_{j+1}^m) = \tau(x_0^m, \ldots, x_{m-1}^m)([n, j]) = \sigma(x_0^m, \ldots, x_{m-1}^m)([n, j] + 1).$$

Επομένως για κάθε $m' \geqslant m > [n, j]$ ισχύει

$$\begin{aligned}
\varphi_n(x_j^m, x_{j+1}^m) &= \sigma(x_0^m, \ldots, x_{m-1}^m)([n, j] + 1) \\
&= \sigma(x_0^{m'}, \ldots, x_{m'-1}^{m'})([n, j] + 1) \\
&\qquad (\text{επειδή } \sigma(u_m) \sqsubseteq \sigma(u_{m'})) \\
&= \varphi_n(x_j^{m'}, x_{j+1}^{m'}).
\end{aligned}$$

Αφού λοιπόν για κάθε $j, n \in \mathbb{N}$ η ακολουθία $(\varphi_n(x_j^m, x_{j+1}^m))_{m\in\mathbb{N}}$ είναι τελικά σταθερή, έχουμε από την ιδιότητα της καλής $\mathbb{N}$-ημικλίμακας ότι για κάθε $j \in \mathbb{N}$ υπάρχει ζεύγος $(x_j, y_j) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ με $x_j \succ y_j$ και $(x_j^m, x_{j+1}^m) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} (x_j, y_j)$.

Παρατηρούμε ότι $x_{j+1}^m \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} y_j$, όπως επίσης ότι $x_{j+1}^m \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} x_{j+1}$. Επομένως $y_j = x_{j+1}$, για κάθε $j \in \mathbb{N}$. Από την $x_j \succ y_j$ συνάγουμε ότι $x_j \succ x_{j+1}$ για κάθε $j \in \mathbb{N}$. Αυτό όμως είναι άτοπο, γιατί η $\preceq$ είναι θεμελιωμένη.

Επομένως και η σχέση $\leqslant_Q$ είναι θεμελιωμένη και η απόδειξη είναι πλήρης.

□

Ασκήσεις

Άσκηση 5.5.6. Κάθε καλή U-ημικλίμακα σε ένα σύνολο $P \subseteq \mathcal{X}$ είναι U-ημικλίμακα, όπου U είναι ένας καλά διατεταγμένος χώρος.

Είναι γνωστό ότι το $\mathbb{R}$ δεν επιδέχεται καλή διάταξη, η οποία ανήκει στη σ-άλγεβρα που παράγεται από τα αναλυτικά υποσύνολά του. Μια απόδειξη αυτού γίνεται με μεθόδους της Θεωρίας Μέτρου και με χρήση του Θεωρήματος 5.6.2. Μπορούμε να αποδείξουμε ένα μέρος αυτού του αποτελέσματος με τη χρήση του Θεωρήματος Kunen-Martin.

Άσκηση 5.5.7. Δεν υπάρχει καλή διάταξη $\preceq$ στο $\mathbb{R}$ που είναι αναλυτικό ή συναναλυτικό σύνολο.

5.6. Τα αναλυτικά σύνολα είναι απολύτως μετρήσιμα

Υπενθυμίζουμε ότι το ζεύγος $(, \mathcal{A})$ ονομάζεται **μετρήσιμος χώρος (measurable space)** αν το X είναι ένα μη κενό σύνολο και το $\mathcal{A}$ είναι μια σ-άλγεβρα στο X. Μια συνάρτηση $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ ονομάζεται **μέτρο (measure)** στον $(X, \mathcal{A})$ αν ικανοποιεί ότι $\mu(\varnothing) = 0$ και για κάθε ακολουθία $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ξένων ανά δύο συνόλων της $\mathcal{A}$ ισχύει $\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i)$. Σε αυτή την περίπτωση η τριάδα $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ονομάζεται **χώρος μέτρου (measure space)**.

Ένα μέτρο μ στον $(X, \mathcal{A})$ είναι **πεπερασμένο** αν $\mu(X) < \infty$, και σ-**πεπερασμένο** αν υπάρχει ακολουθία $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από στοιχεία της $\mathcal{A}$, έτσι ώστε $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ και $\mu(X_n) < \infty$ για κάθε n.

Στη συνέχεια θεωρούμε έναν χώρο μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Ένα $N \subseteq X$ ονομάζεται μ-**μηδενικό** (μ-**null**) αν υπάρχει $E \in \mathcal{A}$ με $N \subseteq E$ και $\mu(E) = 0$. Η διαφορά ενός μ-μηδενικού συνόλου από ένα σύνολο μέτρου 0 είναι ότι το μ-μηδενικό σύνολο μπορεί να μην ανήκει στη σ-άλγεβρα, και άρα μπορεί να βρίσκεται εκτός τους πεδίου ορισμού του μέτρου. Ο χώρος μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ονομάζεται **πλήρης (complete)** αν η $\mathcal{A}$ περιέχει όλα τα μ-μηδενικά σύνολα. Η **πλήρωση (completion)** του $(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι η τριάδα $(X, \overline{\mathcal{A}}_{(\mathcal{A},\mu)}, \overline{\mu}_{(\mathcal{A},\mu)})$, όπου $\overline{\mathcal{A}}_{(\mathcal{A},\mu)}$ είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα που περιέχει την οικογένεια

$$\mathcal{A} \cup \{N \subseteq X \mid \text{το } N \text{ είναι } \mu\text{-μηδενικό}\}$$

και

$$\overline{\mu}_{(\mathcal{A},\mu)}(A) = \inf\{\mu(B) \mid B \in \mathcal{A} \ \&\ A \subseteq B\}.$$

Για ευκολία στον συμβολισμό θα γράφουμε πιο απλά $\overline{A}$ και $\overline{\mu}$ όταν τα $\mathcal{A}$ και μ είναι σαφή από το κείμενο. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{A}} &= \{B \cup N \in \mathcal{P}(X) \mid B \in \mathcal{A} \ \&\ \text{το } N \text{ είναι } \mu\text{-μηδενικό}\}\\ &= \{A \in \mathcal{P}(X) \mid \text{υπάρχει } B \in \mathcal{A} \text{ το σύνολο } A \triangle B \text{ είναι } \mu\text{-μηδενικό}\},\\ \overline{\mu}(A) &= \mu(B), \quad \text{όπου } A = B \cup N \text{ με } B \in \mathcal{A} \text{ και το } N \text{ είναι } \mu\text{-μηδενικό},\end{aligned}$$

όπου $A \triangle B = (A \setminus B) \ \cup\ (B \setminus A)$ (συμμετρική διαφορά).

Αποδεικνύεται ότι ο $(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ είναι πλήρης χώρος μέτρου, $\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}}$ και $\overline{\mu}|\mathcal{A} = \mu$. Μάλιστα αυτός είναι ο μικρότερος πλήρης χώρος μέτρου με αυτές τις ιδιότητες. Δηλαδή αν $(X, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ είναι ένας πλήρης χώρος μέτρου με $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_1$ και $\mu_1|\mathcal{A} = \mu$, τότε $\overline{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{A}_1$ και $\mu_1|\overline{\mathcal{A}} = \overline{\mu}$.

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα σ-πεπερασμένου χώρου μέτρου είναι ο $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}_n), l_n)$ με $n \geqslant 1$, όπου $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ είναι η σ-άλγεβρα όλων των Borel υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ και

$$(5.14) \quad l_n(A) = \inf\left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \prod_{k=1}^{n} (b_k^i - a_k^i) \mid A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \left([a_1^i, b_1^i] \times \cdots \times [a_n^i, b_n^i] \right) \right\}$$

όπου $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_n)$. Όπως είναι γνωστό, η πλήρωση του $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}_n), l_n)$ είναι ο $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_n, \lambda_n)$, όπου $\mathcal{M}_n$ είναι η σ-άλγεβρα των Lebesgue-μετρήσιμων συνόλων και λ_n το γνωστό μέτρο Lebesgue, το οποίο ικανοποιεί την (5.14) για κάθε $B \in \mathcal{M}_n$.

Προφανώς, κάθε Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ είναι Lebesgue-μετρήσιμο. Προκύπτει φυσιολογικά το ερώτημα αν τα σύνολα στην αμέσως επόμενη κλάση, δηλαδή τα αναλυτικά (και συνεπώς και τα συναναλυτικά) σύνολα είναι Lebesgue-μετρήσιμα. Όπως θα δούμε πιο κάτω αυτό είναι σωστό. (Για τις υπόλοιπες προβολικές κλάσεις ο ισχυρισμός είναι ανεξάρτητος από τα Αξιώματα της θεωρίας συνόλων.)

Ορισμός 5.6.1. Θεωρούμε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και ένα $A \subseteq \mathcal{X}$. Το A λέγεται **καθολικά μετρήσιμο (universally measurable)** αν για κάθε σ-πεπερασμένο μέτρο $\mu : \mathcal{B}(\mathcal{X}) \to [0, \infty]$ (όπου $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ είναι η σ-άλγεβρα των Borel υποσυνόλων του $\mathcal{X}$) το A είναι στοιχείο της σ-άλγεβρας της πλήρωσης του $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}), \mu)$, δηλαδή υπάρχει ένα Borel $B \subseteq \mathcal{X}$, έτσι ώστε η συμμετρική διαφορά $A \triangle B$ να είναι μ-μηδενικό σύνολο.

Θεώρημα 5.6.2 ([**15**]). *Για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{Y}$ ισχύει ότι κάθε αναλυτικό $A \subseteq \mathcal{Y}$ είναι καθολικά μετρήσιμο.*

Απόδειξη. Το συμπέρασμα είναι τετριμμένο όταν $A = \varnothing$. Επομένως υποθέτουμε ότι $A \neq \varnothing$. Από την Πρόταση 5.1.3 υπάρχει Πολωνικός χώρος $\mathcal{X}$ και συνεχής συνάρτηση $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, έτσι ώστε $A = f[\mathcal{X}]$. (Μάλιστα, μπορούμε να πάρουμε $\mathcal{X} = \mathcal{N}$, αλλά εδώ θα προτιμήσουμε να μην κάνουμε μια τέτοια υπόθεση).

Θεωρούμε ένα σ-πεπερασμένο μέτρο $\mu : \mathcal{B}(\mathcal{Y}) \to [0, \infty]$ και δείχνουμε ότι υπάρχουν Borel σύνολα $B, B' \subseteq \mathcal{Y}$ έτσι ώστε

$$(5.15) \qquad \begin{cases} A \subseteq B, \\ B \setminus A \subseteq B', \\ \mu(B') = 0. \end{cases}$$

Από τα πιο πάνω προκύπτει ότι η συμμετρική διαφορά $A \triangle B = B \setminus A$ είναι μ-μηδενικό σύνολο και άρα έχουμε το συμπέρασμα.

Επομένως αρκεί να βρούμε Borel σύνολα B, B', όπως πιο πάνω. Θεωρούμε αριθμήσιμες βάσεις $\{V_s^{\mathcal{X}} \mid s \in \mathbb{N}\}$ και $\{V_t^{\mathcal{Y}} \mid t \in \mathbb{N}\}$, καθώς και συμβατές μετρικές $d_{\mathcal{X}}$, $d_{\mathcal{Y}}$ για τους $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$ αντίστοιχα. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $V_0^{\mathcal{X}} = \mathcal{X}$, $V_0^{\mathcal{Y}} = \mathcal{Y}$, καθώς και ότι οι μετρικές λαμβάνουν τιμές $\leqslant 1$ (Άσκηση 2.1.10).

Θα λέμε ότι μια πεπερασμένη ακολουθία φυσικών $u = (u(0), \ldots, u(n))$, όπου $n \in \mathbb{N}$, είναι *$\mathcal{X}$-κατάλληλη* αν

- $u(0) = 0$ (επομένως $V_{u(0)}^{\mathcal{X}} = \mathcal{X}$),
- για κάθε $i < n$ ισχύει $\overline{V_{u(i+1)}^{\mathcal{X}}} \subseteq V_{u(i)}^{\mathcal{X}}$,
- για κάθε $i \leqslant n$ ισχύει $d_{\mathcal{X}}$-διάμετρος$(V_{u(i)}^{\mathcal{X}}) \leqslant 2^{-i+1}$.

Όμοια ορίζουμε την έννοια της *$\mathcal{Y}$-κατάλληλης* πεπερασμένης ακολουθίας φυσικών αριθμών.

Στη συνέχεια ορίζουμε

$$\begin{aligned} I_n = \{(u,v) \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \mid u = (u(0),\dots,u(n)),\ v = (v(0),\dots,v(n)), \\ \text{η } u \text{ είναι } \mathcal{X}\text{-κατάλληλη και η } v \text{ είναι } \mathcal{Y}\text{-κατάλληλη}\}, \quad n \in \mathbb{N}, \\ I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n. \end{aligned}$$

Επειδή $d_{\mathcal{X}}, d_{\mathcal{Y}} \leqslant 1$, η πεπερασμένη ακολουθία (0) είναι $\mathcal{X}$- και $\mathcal{Y}$-κατάλληλη, επομένως έχουμε $((0),(0)) \in I$.

Επιπλέον για κάθε $(u,v) = ((u(0),\dots,u(n)),(v(0),\dots,v(n))) \in I$ ορίζουμε

$$A_{(u,v)} = f[V^{\mathcal{X}}_{u(n)}] \cap V^{\mathcal{Y}}_{v(n)} \subseteq \mathcal{Y}$$

καθώς και

$$C_{(u,v)} = \begin{cases} \overline{V^{\mathcal{Y}}_{v(n)}}, & \text{αν } A_{(u,v)} \neq \varnothing, \\ \varnothing, & \text{αν } A_{(u,v)} = \varnothing. \end{cases} \tag{5.16}$$

Προφανώς κάθε $C_{(u,v)}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{Y}$ και

$$A_{(u,v)} \subseteq C_{(u,v)}. \tag{5.17}$$

Ακόμα είναι σαφές ότι

$$A_{((0),(0))} = f[V^{\mathcal{X}}_0] \cap V^{\mathcal{Y}}_0 = f[\mathcal{X}] \cap \mathcal{Y} = A. \tag{5.18}$$

Ισχυριζόμαστε ότι για κάθε $(u,v) \in I$ ισχύει

$$A_{(u,v)} = \bigcup_{(u*(s),v*(t))\in I} A_{(u*(s),v*(t))}, \tag{5.19}$$

όπου $(u*(s), v*(t)) = ((u(0),\dots,u(n),s),(v(0),\dots,v(n),t))$.

Για την ευθεία συμπερίληψη θεωρούμε $y \in A_{(u,v)}$ και $x \in V^{\mathcal{X}}_{u(n)}$ με $y = f(x) \in V^{\mathcal{Y}}_{v(n)}$. Τότε υπάρχουν $s,t \in \mathbb{N}$, έτσι ώστε

$$x \in V^{\mathcal{X}}_s \subseteq \overline{V^{\mathcal{X}}_s} \subseteq V^{\mathcal{X}}_{u(n)} \quad \text{και} \quad y \in V^{\mathcal{Y}}_t \subseteq \overline{V^{\mathcal{Y}}_y} \subseteq V^{\mathcal{Y}}_{v(n)}.$$

Μπορούμε επιπλέον να υποθέσουμε ότι οι διάμετροι των $V^{\mathcal{X}}_s$ και $V^{\mathcal{Y}}_t$ ως προς τις μετρικές των αντίστοιχων χώρων να είναι $2^{-(n+1)+1} = 2^{-n}$, έτσι που οι πεπερασμένες ακολουθίες $(u(0),\dots,u(n),s)$ και $(v(0),\dots,v(n),t)$ να είναι αντίστοιχα $\mathcal{X}$- και $\mathcal{Y}$-κατάλληλες. Τότε $(u*(s), v*(t)) \in I$ και

$$y = f(x) \in f[V^{\mathcal{X}}_s] \cap V^{\mathcal{Y}}_t = A_{(u*(s),v*(t))}.$$

Αυτό αποδεικνύει την ευθεία συμπερίληψη της (5.19). Για την αντίστροφη συμπερίληψη υποθέτουμε ότι $y \in A_{(u*(s),v*(t))}$ για κάποια s,t, για τα οποία ισχύει $(u*(s), v*(t)) \in I$ και θεωρούμε $x \in V^{\mathcal{X}}_s$ με $y = f(x) \in V^{\mathcal{Y}}_t$. Αφού οι $u*(s)$ και $v*(t)$ είναι αντίστοιχα $\mathcal{X}$- και $\mathcal{Y}$-κατάλληλες, έχουμε $x \in V^{\mathcal{X}}_s \subseteq \overline{V^{\mathcal{X}}_s} \subseteq V^{\mathcal{X}}_{u(n)}$ και $y \in V^{\mathcal{Y}}_t \subseteq \overline{V^{\mathcal{Y}}_t} \subseteq V^{\mathcal{Y}}_{v(n)}$. Άρα $y = f(x) \in f[V^{\mathcal{X}}_{u(n)}] \cap V^{\mathcal{Y}}_{v(n)} = A_{(u,v)}$. Αυτό αποδεικνύει την αντίστροφη συμπερίληψη και συνεπώς η (5.19) έχει αποδειχθεί.

Εφαρμόζουμε την Άσκηση 5.6.4 στα σύνολα $A_{(u,v)}$, όπου $(u,v) \in I$ και παίρνουμε ένα Borel σύνολο $B_{(u,v)}$ έτσι ώστε

$$A_{(u,v)} \subseteq B_{(u,v)} \quad \text{και} \tag{5.20}$$

$$\text{για κάθε Borel } D \subseteq B_{(u,v)} \setminus A_{(u,v)} \text{ ισχύει } \mu(D) = 0. \tag{5.21}$$

Επιπλέον μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$B_{(u,v)} \subseteq C_{(u,v)} \quad \text{για κάθε } (u,v) \in I. \tag{5.22}$$

Αλλιώς, αντικαθιστούμε το $B_{(u,v)}$ με το $B_{(u,v)} \cap C_{(u,v)}$. Το τελευταίο σύνολο είναι Borel και με χρήση της (5.17) εξακολουθούν να ισχύουν οι (5.20) και (5.21).

Στο επόμενο βήμα ισχυριζόμαστε ότι

$$\text{(5.23)} \quad B_{((0),(0))} \ \setminus A \quad \subseteq \quad \bigcup_{(u,v)\in I} \Big[B_{(u,v)} \setminus \Big(\bigcup_{(u*(s),v*(t))\in I} \ B_{(u*(s),v*(t))} \Big) \Big].$$

Για να δούμε το τελευταίο θεωρούμε $y \in B_{((0),(0))} \setminus A$ και υποθέτουμε προς άτοπο ότι

$$\text{(5.24)} \quad \text{για κάθε } (u,v) \in I \text{ ισχύει } y \notin B_{(u,v)} \setminus \Big(\bigcup_{(u*(s),v*(t))\in I} \ B_{(u*(s),v*(t))} \Big).$$

Εφαρμόζουμε την (5.24) για $(u,v) = ((0),(0)) \in I$: επειδή $y \in B_{((0),(0))}$ προκύπτει ότι $y \in \bigcup_{(0,s),(0,t))\in I} \ B_{(0,s),(0,t))}$. Άρα υπάρχουν s_1, t_1 με $(0,s_1),(0,t_1)) \in I$ και $y \in B_{(0,s_1),(0,t_1))}$.

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε την (5.24) για $(u,v) = ((0,s_1),(0,t_1)) \in I$: επειδή $y \in B_{(0,s_1),(0,t_1))}$ προκύπτει, όπως πιο πάνω, ότι υπάρχουν s_2, t_2 με $((0,s_1,s_2),(0,t_1,t_2)) \in I$ και $y \in {}_{((0,s_1,s_2),(0,t_1,t_2))}$.

Συνεχίζουμε όμοια και βρίσκουμε με αναδρομή δύο άπειρες ακολουθίες φυσικών αριθμών $(s_n)_{n\geqslant 1}$, $(t_n)_{n\geqslant 1}$, έτσι ώστε για κάθε $n \geqslant 1$ να ισχύει

$$(u_n, v_n) \in I \quad \text{και} \quad y \in B_{(u_n,v_n)},$$

όπου $u_n = (0, s_1, \ldots, s_n)$ και $v_n = (0, t_1, \ldots, t_n)$.

Από την (5.22) έχουμε ότι $y \in \bigcap_{n\geqslant 1} C_{(u_n,v_n)}$. Ειδικότερα ισχύει $C_{(u_n,v_n)} \neq \varnothing$ και άρα από τον ορισμό (5.16) ισχύει

$$A_{(u_n,v_n)} = f[V^{\mathcal{X}}_{u_n(n)}] \cap V^{\mathcal{Y}}_{v_n(n)} = f[V^{\mathcal{X}}_{s_n}] \cap V^{\mathcal{Y}}_{t_n} \neq \varnothing \quad \text{καθώς και} \quad C_{(u_n,v_n)} = \overline{V^{\mathcal{Y}}_{t_n}},$$

για κάθε $n \geqslant 1$.

Υπάρχει τότε μια ακολουθία $(x_n)_{n\geqslant 1}$ στοιχείων του $\mathcal{X}$, έτσι ώστε $x_n \in V^{\mathcal{X}}_{s_n}$ και $f(x_n) \in V^{\mathcal{Y}}_{t_n}$ για κάθε $n \geqslant 1$. Επειδή η u_n είναι $\mathcal{X}$-κατάλληλη για κάθε $n \geqslant 1$, έχουμε ότι η $(\overline{V^{\mathcal{X}}_{s_n}})_{n\geqslant 1}$ είναι μια φθίνουσα ακολουθία κλειστών συνόλων των οποίων η ακολουθία των $d_{\mathcal{X}}$-διαμέτρων συγκλίνει στο 0. Εφόσον ο $(\mathcal{X}, d_{\mathcal{X}})$ είναι πλήρης, έχουμε ότι υπάρχει $x \in \mathcal{X}$ με $\{x\} = \bigcap_{n\geqslant 1} \overline{V^{\mathcal{X}}_{s_n}}$. Συνεπώς ισχύει $x_n \to x$ και από τη συνέχεια της f ισχύει επίσης $f(x_n) \to f(x)$.

Από την άλλη μεριά, για κάθε $n \geqslant 1$ έχουμε $f(x_n) \in V^{\mathcal{Y}}_{t_n}$ και $y \in C_{(u_n,v_n)} = \overline{V^{\mathcal{Y}}_{t_n}}$, άρα

$$d_{\mathcal{Y}}(f(x_n), y) \leqslant d_{\mathcal{Y}}\text{-διάμετρος}(V^{\mathcal{Y}}_{t_n}) \leqslant 2^{-n+1},$$

όπου στην τελευταία ανίσωση χρησιμοποιήσαμε ότι η v_n είναι $\mathcal{Y}$-κατάλληλη. Προκύπτει ότι $f(x_n) \to y$. Από τη μοναδικότητα του ορίου συμπεραίνουμε ότι $y = f(x)$, και επομένως $y \in f[\mathcal{X}] = A$. Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί υποθέσαμε πως $y \in B_{((0),(0))} \setminus A$. Αυτό αποδεικνύει την (5.23).

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη παίρνουμε τα Borel σύνολα

$$\begin{aligned} B &= B_{((0),(0))}, \\ B'_{(u,v)} &= B_{(u,v)} \setminus \Big(\bigcup_{(u*(s),v*(s))\in I} B_{(u*(s),v*(s))} \Big), \\ B' &= \bigcup_{(u,v)\in I} B'_{(u,v)}, \end{aligned}$$

και δείχνουμε ότι ικανοποιούνται οι ιδιότητες της (5.15).

Από τις (5.18) και (5.20) έχουμε $A = A_{((0),(0))} \subseteq B_{((0),(0))} = B$. Επιπλέον, από την (5.23) παίρνουμε

$$B \setminus A = B_{((0),(0))} \setminus A \quad \subseteq \quad \bigcup_{(u,v)\in I} B'_{(u,v)} = B'.$$

Απομένει να δείξουμε ότι $\mu(B') = 0$. Επειδή το I είναι αριθμήσιμο σύνολο, αρκεί να δείξουμε ότι $\mu(B'_{(u,v)}) = 0$ για κάθε $(u,v) \in I$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
B'_{(u,v)} &= B_{(u,v)} \setminus \Big(\bigcup_{(u*(s),v*(s)) \in I} B_{(u*(s),v*(s))} \Big) \\
&\subseteq B_{(u,v)} \setminus \Big(\bigcup_{(u*(s),v*(s)) \in I} A_{(u*(s),v*(s))} \Big) \qquad \text{(από την (5.20))} \\
&= B_{(u,v)} \setminus A_{(u,v)}, \qquad \text{(από την (5.19))}
\end{aligned}$$

για κάθε $(u,v) \in I$. Άρα $B'_{(u,v)} \subseteq B_{(u,v)} \setminus A_{(u,v)}$. Από την (5.21) εφαρμοσμένη στο Borel σύνολο $D = B'_{(u,v)}$ προκύπτει ότι $\mu(B'_{(u,v)}) = 0$ για κάθε $(u,v) \in I$, το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη. ▫

Πόρισμα 5.6.3 ([**15**]). *Για κάθε φυσικό αριθμό $n \geqslant 1$, ισχύει ότι κάθε αναλυτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ είναι Lebesgue μετρήσιμο.*

Απόδειξη. Προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα 5.6.2 με χρήση του αποτελέσματος ότι η πλήρωση του $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}_n), \lambda_n|\mathcal{B}(\mathbb{R}_n))$ είναι ο $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_n, \lambda_n)$, όπου $\mathcal{M}_n$ είναι η σ-άλγεβρα των Lebesgue-μετρησίμων συνόλων και λ_n το μέτρο Lebesgue. ▫

Ασκήσεις

Άσκηση 5.6.4. Για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$, κάθε σ-πεπερασμένο μέτρο $\mu : \mathcal{B}(\mathcal{X}) \to [0, \infty]$, και κάθε $A \subseteq \mathcal{X}$ υπάρχει Borel σύνολο $B \subseteq \mathcal{X}$ με $A \subseteq B$ και για κάθε Borel D με $D \subseteq B \setminus A$ να ισχύει $\mu(D) = 0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Συναναλυτικά σύνολα

Σύνοψη:
- Μελέτη της κλάσης των συναναλυτικών συνόλων σε Πολωνικούς χώρους.
- Καλά Καθολικά σύνολα και Αναδρομή.
- Η ενοποίηση του Kreisel και το Θεώρημα Περιορισμένου Ποσοδείκτη.
- Συνέπειες στην ενοποίηση των Borel συνόλων.

Προαπαιτούμενη γνώση:
- Πολωνικοί χώροι και δένδρα.
- Συναλυτικά σύνολα και οι τελεστές από το Κεφάλαιο 3.
- Καθολικά σύνολα.
- Borel σύνολα.
- Διατακτικοί αριθμοί (μόνο στο Θεώρημα ενοποίησης του Kreisel).

6.1. Ιδιότητες και χαρακτηρισμοί - η ιδιότητα της καλής προδιάταξης

Ορισμός 6.1.1. Ένα υποσύνολο P ενός Πολωνικού χώρου $\mathcal{X}$ είναι **συναναλυτικό (co-analytic)** αν το συμπλήρωμα $\mathcal{X} \setminus P$ είναι αναλυτικό, δηλαδή αν υπάρχει ένα ανοικτό σύνολο $V \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$, έτσι ώστε για κάθε $x \in \mathcal{X}$,

$$x \in P \iff \forall \alpha \ (x, \alpha) \in V.$$

Η κλάση των συναναλυτικών συνόλων συμβολίζεται με $\utilde{\mathbf{\Pi}}^1_1$.

Πρόταση 6.1.2 (Θεμελιώδεις ιδιότητες της κλάσης των συναναλυτικών συνόλων). *Η κλάση $\utilde{\mathbf{\Pi}}^1_1$ των συναναλυτικών συνόλων περιέχει τα Borel σύνολα και είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση, Borel αντικατάσταση, τον καθολικό ποσοδείκτη $\forall^{\mathcal{Y}}$, τις συνεχείς και γενικότερα τις Borel εικόνες, τους τελεστές $\exists^{\mathbb{N}}$, $\forall^{\mathbb{N}}$, $\vee$, &, όπως επίσης τον τελεστή της αριθμήσιμης διάζευξης $\bigvee_{\mathbb{N}}$ και τον τελεστή της αριθμήσιμης σύζευξης $\bigwedge_{\mathbb{N}}$.*

Απόδειξη. Οι ισχυρισμοί είναι άμεσοι από την αντίστοιχη πρόταση για τα αναλυτικά σύνολα (Πρόταση 6.1.2) θεωρώντας τα συμπληρώματα. Για παράδειγμα για να δείξουμε την κλειστότητα ως προς τον ποσοδείκτη $\exists^{\mathbb{N}}$ θεωρούμε $Q \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ συναναλυτικό και έχουμε για κάθε $x \in \mathcal{X}$,

$$\begin{aligned} x \in \exists^{\mathbb{N}} Q &\iff \exists n \ (x, n) \in Q \\ &\iff \exists n \ (x, n) \notin \mathrm{c}Q \\ &\iff \neg[\forall n \ (x, n) \in \mathrm{c}Q] \\ &\iff \neg[x \in \forall^{\mathbb{N}} \mathrm{c}Q] \\ &\iff x \notin \forall^{\mathbb{N}} \mathrm{c}Q. \end{aligned}$$

Το συμπλήρωμα cQ είναι αναλυτικό σύνολο και από την Πρόταση 6.1.2 το $\forall^{\mathbb{N}} cQ$ είναι επίσης αναλυτικό. Άρα το $\exists^{\mathbb{N}} Q = \mathcal{X} \setminus \forall^{\mathbb{N}} cQ$ είναι συναναλυτικό σύνολο. $\square$

Οι επόμενοι χαρακτηρισμοί της κλάσης των συναναλυτικών συνόλων προκύπτουν άμεσα από τους αντίστοιχους της κλάσης των αναλυτικών συνόλων (Προτάσεις 5.1.2 και 5.1.3).

Πρόταση 6.1.3. *Έστω $\mathcal{X}$ ένας Πολωνικός χώρος και $P \subseteq \mathcal{X}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Το P είναι συναναλυτικό.*

(ii) *Υπάρχει Πολωνικός χώρος $\mathcal{Y}$ και $V \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ ανοικτό με $P = \forall^{\mathcal{Y}} F$.*

(iii) *Υπάρχει Πολωνικός χώρος $\mathcal{Y}$ και $B \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ Borel με $P = \forall^{\mathcal{Y}} B$.*

Πρόταση 6.1.4. *Έστω $\mathcal{X}$ ένας Πολωνικός χώρος και $P \subseteq \mathcal{X}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Το P είναι συναναλυτικό.*

(ii) *Είτε $P = \mathcal{X}$ είτε υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : \mathcal{N} \to \mathcal{X}$ με $P = \mathcal{X} \setminus f[\mathcal{N}]$.*

(iii) *Υπάρχει συνεχής συνάρτηση $g : \mathcal{N} \to \mathcal{X}$ και Borel $B \subseteq \mathcal{N}$ με $P = \mathcal{X} \setminus g[B]$.*

(iv) *Υπάρχει Borel-μετρήσιμη συνάρτηση $h : \mathcal{N} \to \mathcal{X}$ και Borel $B \subseteq \mathcal{N}$ με $P = \mathcal{X} \setminus h[B]$.*

(v) *Υπάρχει Πολωνικός χώρος $\mathcal{Y}$, Borel-μετρήσιμη συνάρτηση $\pi : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ και Borel σύνολο $B \subseteq \mathcal{Y}$ με $P = \mathcal{X} \setminus \pi[B]$.*

Τα παρακάτω είναι επίσης άμεσες συνέπειες της Πρότασης 5.1.5 και του Θεωρήματος 5.1.6.

Πρόταση 6.1.5. *Το σύνολο* WF *των θεμελιωμένων δένδρων είναι συναναλυτικό υποσύνολο του* Tr.

Θεώρημα 6.1.6 (Το Βασικό Θεώρημα Αναπαράστασης των Συναναλυτικών Συνόλων, Lusin-Sierpinski [**23**]). *Για κάθε συναναλυτικό υποσύνολο P ενός Πολωνικού χώρου $\mathcal{X}$ υπάρχει μια $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_2$-μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathcal{X} \to \mathrm{Tr}$ με την ιδιότητα*

$$x \in P \iff f(x) \in \mathrm{WF}$$

όπου $x \in \mathcal{X}$. Μάλιστα, αν ο $\mathcal{X}$ είναι μηδενοδιάστατος, τότε η f μπορεί να επιλεγεί ώστε να είναι ***συνεχής*** *συνάρτηση.*

Όπως έχουμε αναφέρει, τα θεμελιωμένα δένδρα με τη διάταξη Kleene-Brouwer $\leqslant_{\mathrm{KB}}$ είναι καλά διατεταγμένοι χώροι. Συνεπώς, το Θεώρημα 6.1.6 δίνει στην ουσία μία αντιστοίχιση των στοιχείων ενός δοσμένου συναναλυτικού συνόλου με τους διατακτικούς αριθμούς. Αυτό αποτελεί ένα εξαιρετικά χρήσιμο εργαλείο καθώς μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες των διατακτικών αριθμών για να συνάγουμε αποτελέσματα για τα συναναλυτικά σύνολα. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι το επόμενο αποτέλεσμα.

Ασκήσεις

Άσκηση 6.1.7. Έστω $\mathcal{X}$ Πολωνικός χώρος και $f : \mathcal{X} \times \mathbb{N} \to \mathrm{Tr}$ μια Borel-μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε τα σύνολα $A, B \subseteq \mathcal{X}$ ως εξής:

$$\begin{aligned} x \in A \iff & \forall m \text{ [δεν υπάρχει ομοιότητα από τον } (f(x,m), \leqslant_{\mathrm{KB}}) \\ & \qquad \text{σε ένα γνήσιο αρχικό τμήμα του } (f(x,n), \leqslant_{\mathrm{KB}})] \\ x \in B \iff & \forall k \text{ [αν υπάρχει ομοιότητα από τον } (f(x,k), \leqslant_{\mathrm{KB}}) \\ & \qquad \text{στον } (f(x,n), \leqslant_{\mathrm{KB}}) \text{ τότε } n \leqslant k]. \end{aligned}$$

Τότε τα A, B είναι συναναλυτικά σύνολα.

6.2. Καλά Καθολικά Σύνολα και Αναδρομή

Επανερχόμαστε στην έννοια του καθολικού συνόλου, στην οποία αναφερθήκαμε στο 3.6. Θα ζητήσουμε τα καθολικά μας σύνολα να έχουν μια πρόσθετη ιδιότητα –την οποία δίνουμε πιο κάτω– και θα τα ονομάσουμε *καλά καθολικά*. Η έννοια των καλών καθολικών συνόλων είναι άμεσα συνυφασμένη με το περίφημο Θεώρημα S^m_n του Kleene και επεκτάθηκε στο πλαίσιο των Πολωνικών χώρων ανεξάρτητα από τους Μοσχοβάκη και Louveau. Οι προσεγγίσεις των τελευταίων είναι στην ουσία ισοδύναμες για τις κλάσεις που είναι κλειστές ως προς συνεχή αντικατάσταση (Άσκηση 6.2.8).

Εμείς θα χρησιμοποιήσουμε την έννοια του καλού καθολικού συνόλου σύμφωνα με τον Louveau. Αρχικά λέμε λίγα λόγια για την ιδέα. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια κλάση Γ που είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση, έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και ένα $G \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{X}$ που είναι $\mathcal{N}$-καθολικό για την οικογένεια $\Gamma(\mathcal{X})$. Παίρνουμε επίσης ένα $P \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{X}$ που ανήκει στη Γ. Από την κλειστότητα της Γ ως προς συνεχή αντικατάσταση έχουμε ότι για κάθε $\alpha \in \mathcal{N}$ η τομή P_α ανήκει στην οικογένεια $\Gamma(\mathcal{X})$. Από την καθολικότητα του G υπάρχει ένα $\varepsilon_\alpha \in \mathcal{N}$, έτσι ώστε $P_\alpha = G_{\varepsilon_\alpha}$. Θα ζητήσουμε η μετάβαση από το α στο ε_α να γίνεται με συνεχή τρόπο.

Ορισμός 6.2.1 (Louveau [1]). Θεωρούμε μία κλάση Γ που είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση, έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και ένα σύνολο $G \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{X}$. Το G είναι **καλό καθολικό** για την οικογένεια $\Gamma(\mathcal{X})$ αν ανήκει στη Γ και για κάθε $P \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{X}$ που ανήκει στη Γ υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$, έτσι ώστε $P_\alpha = G_{f(\alpha)}$ για κάθε $\alpha \in \mathcal{N}$. Με άλλα λόγια

$$(\alpha, x) \in P \iff (f(\alpha), x) \in G$$

για κάθε $(\alpha, x) \in \mathcal{N} \times \mathcal{X}$.

Ανάλογα ορίζεται και η έννοια του καλού καθολικού συνόλου $G \subseteq 2^{\mathbb{N}} \times \mathcal{X}$, δηλαδή αντικαθιστούμε τον χώρο του Baire με αυτόν του Cantor. Μάλιστα, τα $2^{\mathbb{N}}$-καθολικά σύνολα που προκύπτουν από τα Λήμματα 3.6.2 και 3.6.3 είναι καλά καθολικά (Άσκηση 6.2.9). Συνηθίζεται όμως να μελετάμε τα καλά καθολικά σύνολα με παραμέτρους από τον χώρο του Baire, γι' αυτό αποφεύγουμε να λέμε «$\mathcal{N}$-καλό καθολικό».

Παρατήρηση 6.2.2. Παρατηρούμε ότι ένα καλό καθολικό σύνολο είναι ειδικότερα καθολικό. Αυτό συμβαίνει επειδή η Γ είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση.

Για να το δούμε αυτό έχουμε αρχικά ότι για κάθε α η τομή G_α ανήκει στη Γ. Επίσης, για κάθε $Q \subseteq \mathcal{X}$ που ανήκει στη Γ το σύνολο $\mathcal{N} \times Q$ ανήκει επίσης στη Γ, ακριβώς γιατί $\mathcal{N} \times Q = h^{-1}[Q]$ όπου $h(\alpha, x) = x$. Παίρνουμε ένα οποιοδήποτε $\alpha \in \mathcal{N}$. Για παράδειγμα $\alpha = (0, 0, \dots)$, τότε η α-τομή $(\mathcal{N} \times Q)_\alpha$ του $\mathcal{N} \times Q$ είναι προφανώς το σύνολο Q. Από την άλλη, αφού το G είναι καλό καθολικό για τη $\Gamma(\mathcal{X})$, υπάρχει ειδικότερα $\varepsilon \in \mathcal{N}$ με $(\mathcal{N} \times Q)_\alpha = G_\varepsilon$. Επομένως ισχύει $Q = G_\varepsilon$ και το G είναι καθολικό για τη $\Gamma(\mathcal{X})$.

Λήμμα 6.2.3. *Για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ υπάρχει ένα σύνολο $G \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{X}$ που είναι καλό καθολικό για την οικογένεια $\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^0_1(\mathcal{X})$.*

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι η $\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^0_1$ είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση. Επομένως έχει νόημα να μιλήσουμε για καλό καθολικό σύνολο για την $\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^0_1(\mathcal{X})$.

Παίρνουμε μια αριθμήσιμη βάση $\{V_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ για την τοπολογία του $\mathcal{X}$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $V_0 = \emptyset$. Ορίζουμε $G \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{X}$,

$$(\varepsilon, x) \in G \iff \exists n\ x \in V_{\varepsilon(n)}.$$

Το G είναι εύκολα ανοικτό σύνολο: αν $(\varepsilon, x) \in G$ και $x \in V_{\varepsilon(n)}$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, τότε $(\varepsilon, x) \in \mathcal{N}_{\varepsilon|n} \times V_{\varepsilon(n)} \subseteq G$.

Για να δείξουμε ότι το G είναι καλό καθολικό θεωρούμε ένα ανοικτό $P \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{X}$. Τότε υπάρχει ακολουθία $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ και ακολουθία φυσικών $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $P = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{N}_{u_n} \times V_{i_n}$.

Ορίζουμε $f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ έτσι ώστε

$$f(\alpha)(n) = \begin{cases} i_n, & \text{αν } u_n \sqsubseteq \alpha, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

όπου $\alpha \in \mathcal{N}$ και $n \in \mathbb{N}$. Η συνάρτηση f είναι εύκολα συνεχής: αν $\alpha_k \to \alpha$, τότε για κάθε n υπάρχει k_0, έτσι ώστε για κάθε $k \geqslant k_0$ και κάθε $t \leqslant |u_n|$ ισχύει $\alpha_k(t) = \alpha(t)$. Επομένως για κάθε $k \geqslant k_0$ έχουμε $u_n \sqsubseteq \alpha_k$ αν και μόνο αν $u_n \sqsubseteq \alpha$ και άρα $f(\alpha_k)(n) = f(\alpha)(n)$. Καταλήγουμε λοιπόν ότι $f(\alpha_k) \to f(\alpha)$.

Τέλος για κάθε α, x έχουμε

$$\begin{aligned} (\alpha, x) \in P &\iff \exists n\ (\alpha, x) \in \mathcal{N}_{u_n} \times V_{i_n} \\ &\iff \exists n\ (u_n \sqsubseteq \alpha\ \&\ x \in V_{i_n}) \\ &\iff \exists n\ x \in V_{f(\alpha)(n)} \\ &\iff (f(\alpha), x) \in G, \end{aligned}$$

όπου στην αντίστροφη κατεύθυνση της προτελευταίας ισοδυναμίας χρησιμοποιούμε ότι αν $V_{f(\alpha)(n)} \neq \emptyset$, τότε $f(\alpha)(n) \neq 0$ (γιατί $V_0 = \emptyset$). Συνεπώς είμαστε στην πρώτη περίπτωση του ορισμού του $f(\alpha)(n)$, δηλαδή ισχύει $u_n \sqsubseteq \alpha$ και $f(\alpha)(n) = i_n$. □

Η ιδιότητα της ύπαρξης καλού καθολικού συνόλου μεταφέρεται κάτω από τους συνολοθεωρητικούς τελεστές με τους οποίους κατασκευάζουμε τις κλάσεις συνόλων που μελετάμε.

Λήμμα 6.2.4. *Θεωρούμε μια κλάση Γ που είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση, δύο Πολωνικούς χώρους $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ και δύο σύνολα $G \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{X}$, $J \subseteq \mathcal{N} \times (\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ που είναι $\mathcal{N}$-καθολικά για τις οικογένειες $\Gamma(\mathcal{X})$ και $\Gamma(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ αντίστοιχα. Ορίζουμε τα σύνολα $G^0, G^1, J^1 \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{X}$ ως εξής:*

$$\begin{aligned} (\varepsilon, x) \in G^0 &\iff (\varepsilon, x) \notin G \\ (\varepsilon, x) \in G^1 &\iff \exists n\ ((\varepsilon)_n, x) \in G \\ (\varepsilon, x) \in J^1 &\iff \exists y\ (\varepsilon, x, y) \in J. \end{aligned}$$

Τότε τα σύνολα G^0,G^1 και J^1 είναι καλά καθολικά για τις οικογένειες $(\mathrm{c}\Gamma)(\mathcal{X})$, $(\exists^{\mathbb{N}}\Gamma)(\mathcal{X})$ και $(\exists^{\mathcal{Y}}\Gamma)(\mathcal{X})$ αντίστοιχα.

Απόδειξη. Υπενθυμίζουμε ότι οι κλάσεις cΓ, $\exists^{\mathbb{N}}\Gamma$ και $\exists^{\mathcal{Y}}\Gamma$ είναι κλειστές ως προς συνεχή αντικατάσταση (Άσκηση 3.4.14). Επομένως έχει νόημα να μιλήσουμε για καλό καθολικό σύνολο για τις αντίστοιχες οικογένειες.

Έπειτα παρατηρούμε ότι τα σύνολα G^0, G^1 και J^1 είναι στην ουσία τα σύνολα H^0, H^1 και H^2 αντίστοιχα που χρησιμοποιούνται στην απόδειξη του Λήμματος 3.6.3. Η διαφορά εδώ, εκτός από το ότι έχουμε τον χώρο $\mathcal{N}$ αντί του $2^{\mathbb{N}}$, είναι ότι έχουμε την κλάση $\exists^{\mathbb{N}}\Gamma$ αντί της $\bigvee_{\mathbb{N}} \Gamma$. Όμως τα επιχειρήματα της απόδειξης του Λήμματος 3.6.3 εφαρμόζονται το ίδιο καλά.

Είναι σαφές ότι τα σύνολα G^0 και J^1 ανήκουν στις cΓ και $\exists^{\mathcal{Y}}\Gamma$ αντίστοιχα. Επιπλέον το G^1 ανήκει στην $\exists^{\mathbb{N}}\Gamma$ από την κλειστότητα της Γ ως προς συνεχή αντικατάσταση.

Ο ισχυρισμός για το G^0 είναι άμεσος: αν το $P \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{X}$ ανήκει στη Γ, εφαρμόζουμε την υπόθεση ότι το G είναι καλό καθολικό για την $\Gamma(\mathcal{X})$ θεωρώντας το σύνολο $\mathrm{c}_{(\mathcal{N}\times\mathcal{X})}Q$, το οποίο ανήκει στη Γ.

Στη συνέχεια ασχολούμαστε με το G^1. Θεωρούμε ένα $P \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{X}$ που ανήκει στη $\exists^{\mathbb{N}}\Gamma$ και ένα $Q \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ που ανήκουν στη Γ με $P = \exists^{\mathbb{N}}Q$. Ορίζουμε το σύνολο $Q^* \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{X}$,

$$(\beta, x) \in Q^* \iff (\beta^*, x, \beta(0)) \in Q,$$

υπενθυμίζοντας ότι $\beta^*(t) = \beta(t+1)$. Είναι σαφές ότι το Q^* ανήκει στη Γ, επομένως υπάρχει συνεχής 1συνάρτηση $g : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ με $Q^*_\alpha = G_{g(\alpha)}$ για κάθε $\alpha \in \mathcal{N}$.

Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
(\alpha, x) \in P &\iff \exists n\ (\alpha, x, n) \in Q \\
&\iff \exists n\ ((n) * \alpha, x) \in Q^* \\
&\iff \exists n\ (g((n) * \alpha), x) \in G,
\end{aligned}$$

για κάθε α, x. Το πιο πάνω και ο ορισμός του G_1 υπαγορεύουν να πάρουμε για κάθε α ένα $\varepsilon_\alpha \equiv \varepsilon$ με $(\varepsilon)_n = g((n) * \alpha)$. Συγκεκριμένα ορίζουμε την $f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ με

$$f(\alpha)(t) = \begin{cases} g((n) * \alpha)(k), & \text{αν } t = \langle n, k \rangle, \\ 0, & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

έτσι που $(f(\alpha))_n(k) = f(\alpha)(\langle n, k \rangle) = g((n) * \alpha)(k)$ για κάθε α, n, k και άρα $(f(\alpha))_n = g((n) * \alpha)$ για κάθε α, n. Η f είναι εύκολα συνεχής συνάρτηση και από τα πιο πάνω έχουμε

$$(\alpha, x) \in P \iff \exists n\ (g((n) * \alpha), x) \in G \iff \exists n\ ((f(\alpha))_n, x) \in G \iff (f(\alpha), x) \in G^1$$

για κάθε α, x. Δηλαδή έχουμε $P_\alpha = G^1_{f(\alpha)}$ για κάθε α.

Τέλος ασχολούμαστε με το J^1. Θεωρούμε ένα $P \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{X}$ που ανήκει στην $\exists^{\mathcal{Y}}\Gamma$ και ένα $Q \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ που ανήκει στη Γ με $P = \exists^{\mathcal{Y}}Q$. Αφού το J είναι καλό καθολικό για τη $\Gamma(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$, υπάρχει συνεχής συνάρτηση $\pi : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ με $Q_\alpha = J_{\pi(\alpha)}$ για κάθε α.

Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
(\alpha, x) \in P &\iff \exists y\ (\alpha, x, y) \in Q \\
&\iff \exists y\ (\pi(\alpha), x, y) \in J \\
&\iff (\pi(\alpha), x) \in J^1
\end{aligned}$$

άρα $P_\alpha = J^1_{\pi(\alpha)}$ για κάθε α. (Παρατηρούμε μάλιστα ότι η συνεχής συνάρτηση που αναζητούμε για το J^1 είναι η ίδια με του J). Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Πόρισμα 6.2.5. *Αν η Γ είναι μία από τις κλάσεις $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$, $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$, $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$, $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n$, $n \in \mathbb{N}$, τότε για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ υπάρχει σύνολο $G \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{X}$ που είναι καλό καθολικό για τη $\Gamma(\mathcal{X})$.*

Απόδειξη. Άμεσο από τα Λήμματα 6.2.3 και 6.2.4. ▫

Μία θεμελιώδης εφαρμογή των καλών καθολικών συνόλων είναι το Θεώρημα 6.2.6 πιο κάτω. Το τελευταίο αποτέλεσμα θα μπορούσε χαρακτηριστεί ως «θεώρημα σταθερού σημείου», έχει όμως και έναν αναδρομικό χαρακτήρα ο οποίος γίνεται εμφανής στην απόδειξη του Θεωρήματος 6.4.5 που θα δούμε σε μεταγενέστερο σημείο.

Θεώρημα 6.2.6 (Θεώρημα Αναδρομής του Kleene για σύνολα, [**34**] - 3H.3). *Θεωρούμε μία από τις κλάσεις $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$, $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$, $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$, $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n$, $n \in \mathbb{N}$, την οποία συμβολίζουμε με Γ και έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$. Τότε υπάρχει ένα σύνολο $G \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{X}$ που είναι $\mathcal{N}$-καθολικό για τη $\Gamma(\mathcal{X})$, και για κάθε $P \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{X}$ που ανήκει στη Γ υπάρχει $\varepsilon_0 \in \mathcal{N}$, έτσι ώστε για κάθε $x \in \mathcal{X}$ έχουμε*

$$(\varepsilon_0, x) \in P \iff (\varepsilon_0, x) \in G,$$

δηλαδή $P_{\varepsilon_0} = G_{\varepsilon_0}$.

Μάλιστα οποιοδήποτε $G \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{X}$ που είναι καλό καθολικό για τη $\Gamma(\mathcal{X})$ ικανοποιεί το πιο πάνω συμπέρασμα.

Απόδειξη. Θεωρούμε δύο σύνολα $G \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{X}$ και $H \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N} \times \mathcal{X}$ που είναι $\mathcal{N}$-καθολικά για τις οικογένειες $\Gamma(\mathcal{X})$ και $\Gamma(\mathcal{N} \times \mathcal{X})$ αντίστοιχα. Θεωρούμε επιπλέον ότι το G είναι καλό καθολικό για την $\Gamma(\mathcal{X})$ (Πόρισμα 6.2.5).

Ισχυριζόμαστε ότι το G ικανοποιεί το συμπέρασμα. Παίρνουμε ένα σύνολο $P \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{X}$ που ανήκει στη Γ και βρίσκουμε ένα κατάλληλο ε_0.

Δοσμένου $\beta \in \mathcal{N}$, συμβολίζουμε προσωρινά με $\beta_{[0]}$, $\beta_{[1]}$ τις άπειρες ακολουθίες $(\beta(0), \beta(2), \dots, \beta(2n), \dots)$ και $(\beta(1), \beta(3), \dots, \beta(2n+1), \dots)$ αντίστοιχα. Επίσης αν έχουμε $\alpha, \gamma \in \mathcal{N}$, συμβολίζουμε με $[\alpha, \gamma]$ την άπειρη ακολουθία $\beta = (\alpha(0), \gamma(0), \alpha(1), \gamma(1), \dots, \alpha(n), \gamma(n), \dots)$ έτσι που $\beta_{[0]} = \alpha$ και $\beta_{[1]} = \gamma$. Η συνάρτηση $(\alpha, \gamma) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} \mapsto [\alpha, \gamma]$ είναι προφανώς συνεχής.

Ορίζουμε το σύνολο $R \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{X}$ ως εξής:

$$(\beta, x) \in R \iff (\beta_{[0]}, \beta_{[1]}, x) \in H.$$

Το R ανήκει στη Γ από την κλειστότητα της τελευταίας ως προς συνεχή αντικατάσταση. Αφού το G είναι καλό καθολικό για την $\Gamma(\mathcal{X})$, υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ με $R_\beta = G_{f(\beta)}$ για κάθε $\beta \in \mathcal{N}$. Ορίζουμε το σύνολο $Q \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{X}$,

$$(\alpha, x) \in Q \iff (f([\alpha, \alpha]), x) \in P.$$

Πάλι από την κλειστότητα της Γ ως προς συνεχή αντικατάσταση το Q ανήκει στη Γ. Επιπλέον από την καθολικότητα του H υπάρχει $\varepsilon_1 \in \mathcal{N}$, έτσι ώστε $Q = H_{\varepsilon_1}$. Τότε για κάθε α, x έχουμε

$$\begin{aligned}
(f([\alpha, \alpha]), x) \in P &\iff (\alpha, x) \in Q && \text{(από τον ορισμό του } Q)\\
&\iff (\varepsilon_1, \alpha, x) \in H && \text{(γιατί } Q = H_{\varepsilon_1})\\
&\iff ([\varepsilon_1, \alpha], x) \in R && \text{(από τον ορισμό του } R)\\
&\iff x \in R_{[\varepsilon_1, \alpha]} &&\\
&\iff x \in G_{f([\varepsilon_1, \alpha])} && \text{(από την ιδιότητα της } f).
\end{aligned}$$

Επομένως

$$P_{f([\alpha, \alpha]} = G_{f([\varepsilon_1, \alpha])}$$

για κάθε $\alpha \in \mathcal{N}$. Ειδικότερα για $\alpha = \varepsilon_1$ έχουμε $P_{f([\varepsilon_1,\varepsilon_1])} = G_{f([\varepsilon_1,\varepsilon_1])}$, άρα μπορούμε να πάρουμε $\varepsilon_0 = f([\varepsilon_1,\varepsilon_1])$. □

Από την τελευταία απόδειξη παρατηρούμε ότι το συμπέρασμα του Θεωρήματος 6.2.6 ισχύει για όλες τις κλάσεις Γ που είναι κλειστές ως προς συνεχή αντικατάσταση και για τις οποίες υπάρχουν σύνολα $G \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{X}$, $H \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N} \times \mathcal{X}$ που είναι $\mathcal{N}$-καθολικά για τις οικογένειες $\Gamma(\mathcal{X})$και $\Gamma(\mathcal{N} \times \mathcal{X})$ αντίστοιχα και το G είναι επιπλέον καλό καθολικό.

Ολοκληρώνουμε αυτό το εδάφιο με την έννοια της «καλής» καθολικότητας σύμφωνα με τον Μοσχοβάκη. Ένα στοιχείο αυτής της έννοιας είναι ότι η ιδιότητα του «καλού» αφορά μία *κλάση* καθολικών συνόλων, τα στοιχεία της οποίας είναι $\mathcal{N}$-καθολικά σύνολα $G \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{X}$ για τη $\Gamma(\mathcal{X})$, όπου ο $\mathcal{X}$ είναι αυθαίρετος Πολωνικός χώρος. Από το Θεώρημα 2.6.2 μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο $\mathcal{X}$ είναι G_δ υποσύνολο του κύβου του Hilbert $\mathbb{H}$ όταν η Γ είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση. Συνεπώς σε αυτές τις περιπτώσεις αναγόμαστε σε μια *οικογένεια* $\mathcal{N}$-καθολικών συνόλων $G^{\mathcal{X}}$.

Ορισμός 6.2.7. Θεωρούμε μια κλάση συνόλων Γ καθώς και μια κλάση συνόλων $(G^{\mathcal{X}})_{\mathcal{X}}$ με $G^{\mathcal{X}} \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{X}$ και κάθε $G^{\mathcal{X}}$ είναι $\mathcal{N}$-καθολικό για τη $\Gamma(\mathcal{X})$, όπου ο $\mathcal{X}$ είναι αυθαίρετος Πολωνικός χώρος. Θεωρούμε επίσης τους Πολωνικούς χώρους $\mathcal{Y} = \mathcal{N}^n \times \mathbb{N}^k$ όπου $n, k \in \mathbb{N}$ όχι και τα δύο μηδέν, (αν ένα π.χ. $n = 0$ εννοούμε ότι $\mathcal{X} = \mathbb{N}^k$).

Λέμε ότι η κλάση $(G^{\mathcal{X}})_{\mathcal{X}}$ είναι **καλό καθολικό σύστημα (good universal system)** για τη Γ αν για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και κάθε $\mathcal{Y}$ της μορφής $\mathcal{N}^n \times \mathbb{N}^k$ όπου $(n,k) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\}$, υπάρχει συνεχής συνάρτηση

$$S^{\mathcal{X},n,k} \equiv S : \mathcal{N} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{N}$$

έτσι ώστε

$$(\varepsilon, y, x) \in G^{\mathcal{Y}\times\mathcal{X}} \iff (S(\varepsilon, y), x) \in G^{\mathcal{X}}$$

για κάθε $(\varepsilon, y, x) \in \mathcal{N} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{X}$.

Ασκήσεις

Άσκηση 6.2.8. Θεωρούμε μια κλάση συνόλων Γ, η οποία είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση και μια κλάση $(G^{\mathcal{X}})_{\mathcal{X}}$ όπου ο $\mathcal{X}$ είναι Πολωνικός χώρος, έτσι ώστε $G^{\mathcal{X}} \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{X}$ και το $G^{\mathcal{X}}$ είναι $\mathcal{N}$-καθολικό για τη $\Gamma(\mathcal{X})$ για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ το $G^{\mathcal{X}}$ είναι καλό καθολικό για τη $\Gamma(\mathcal{X})$ (Ορισμός 6.2.1).

(ii) Το σύστημα $(G^{\mathcal{X}})_{\mathcal{X}}$ είναι καλό καθολικό για τη Γ (Ορισμός 6.2.7).

Άσκηση 6.2.9. Τα $2^{\mathbb{N}}$-καθολικά σύνολα στα Λήμματα 3.6.2 και 3.6.3 είναι καλά καθολικά.

6.3. Η ενοποίηση του Kreisel - Αρχή Αναγωγής Συναναλυτικών Συνόλων

Η έννοια της αναγωγής (Ορισμός 3.8.3) επεκτείνεται κατά τον προφανή τρόπο σε ακολουθίες συνόλων: αν έχουμε δύο ακολουθίες $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(P_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ από υποσύνολα ενός Πολωνικού χώρου $\mathcal{X}$, θα λέμε ότι η $(P_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ **ανάγει (reduces)** την $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αν για κάθε φυσικούς αριθμούς $n \neq m$ ισχύει $P_n^* \subseteq P_n$ και $P_n^* \cap P_m^* = \varnothing$ καθώς και $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n^*$.

Θεώρημα 6.3.1 (Το Θεώρημα Ενοποίησης του Kreisel, [**11**], [**34**] - Αρχή Αναγωγής Συναλυτικών Συνόλων). *Έστω $\mathcal{X}$ ένας Πολωνικός χώρος και $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ συναναλυτικό. Τότε υπάρχει ένα συναναλυτικό σύνολο P^* που είναι ενοποίηση του P, δηλαδή $P^* \subseteq P$ και για κάθε $x \in \exists^{\mathbb{N}} P$ υπάρχει μοναδικό $n \in \mathbb{N}$ με $(x,n) \in P^*$.*

Ισοδύναμα για κάθε ακολουθία $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από συναναλυτικά υποσύνολα του $\mathcal{X}$ υπάρχει μια ακολουθία $(P_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ από συναναλυτικά συνόλα η οποία ανάγει την $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Απόδειξη. Η ισοδυναμία των δύο μορφών προκύπτει άμεσα από το ότι ένα $A \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ είναι συναναλυτικό αν και μόνο αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η τομή $A_n = \{x \in \mathcal{X} \mid (x,n) \in A\}$ είναι συναναλυτικό σύνολο (βλ. Λήμμα 3.4.5). Στη συνέχεια αποδεικνύουμε το αποτέλεσμα στην πρώτη του μορφή.

Από το Βασικό Θεώρημα Αναπαράστασης των Συναναλυτικών Συνόλων 6.1.6 υπάρχει $\undertilde{\mathbf{\Sigma}}^0_2$-μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathcal{X} \to \mathrm{Tr}$ με

$$(x,n) \in P \iff f(x,n) \in \mathrm{WF}\ .$$

Θεωρούμε κάθε δένδρο $f(x,n)$ μαζί με την ολική διάταξη $\leqslant_{\mathrm{KB}}$. Επομένως από το Λήμμα 5.4.9

$$(x,n) \in P \iff \text{το ζεύγος } (f(x,n), \leqslant_{\mathrm{KB}}) \text{ είναι καλά διατεταγμένος χώρος},$$

για κάθε $(x,n) \in \mathcal{X} \times \mathbb{N}$.

Δίνουμε αρχικά την ιδέα για τον ορισμό του P^*. Αν $(x,m) \in P$, τότε ο χώρος $(f(x,m), \leqslant_{\mathrm{KB}})$ είναι όμοιος με έναν διατακτικό αριθμό $\xi(x,m)$. Θεωρούμε το σύνολο Q_x όλων των n για τα οποία $(x,n) \in P$ και ο $\xi(x,n)$ είναι ο ελάχιστος από τους $\xi(x,m)$ για $(x,m) \in P$. Δηλαδή

$$Q_x = \{n \in \mathbb{N} \mid (x,n) \in P \ \&\ \xi(x,n) = \min\{\xi(x,m) \mid (x,m) \in P\}\}.$$

Επειδή $x \in \exists^{\mathbb{N}} P$, έχουμε $Q_x \neq \emptyset$. Έπειτα παίρνουμε $n_x = \min Q_x$. Το P^* αποτελείται από όλα τα ζεύγη (x, n_x). Με άλλα λόγια

$$\begin{aligned}(x,n) \in P^* \iff\ & (x,n) \in P \\ & \&\ \forall m\ [(x,m) \in P \longrightarrow \xi(x,n) \leqslant \xi(x,m)] \\ & \&\ \forall k\ [((x,k) \in P \ \&\ \xi(x,k) = \xi(x,n)) \longrightarrow n \leqslant k].\end{aligned}$$

Προφανώς $P^* \subseteq P$. Επιπλέον αν $x \in \exists^{\mathbb{N}} P$ τότε από τα πιο πάνω έχουμε $(x, n_x) \in P^*$. Αν τώρα $(x, n^*) \in P^*$, τότε από τις πρώτες δύο ιδιότητες του ορισμού του P^* έχουμε $\xi(x,n_x) \leqslant \xi(x,n^*) \leqslant \xi(x,n_x)$, δηλαδή $\xi(x,n_x) = \xi(x,n^*)$. Από την τρίτη ιδιότητα στον ορισμό του P^* έχουμε $n \leqslant n^* \leqslant n_x$, δηλαδή $n_x = n^*$.

Συνεπώς το P^* είναι μια ενοποίηση του P. Απομένει να δείξουμε ότι το P^* είναι συναναλυτικό σύνολο. Ισχυριζόμαστε ότι

(6.1)

$$\begin{aligned}(x,n) \in P^* \iff\ & (x,n) \in P \\ & \&\ \forall m\ [\text{δεν υπάρχει ομοιότητα από τον } (f(x,m), \leqslant_{\mathrm{KB}}) \\ & \qquad \text{σε ένα γνήσιο αρχικό τμήμα του } (f(x,n), \leqslant_{\mathrm{KB}})] \\ & \&\ \forall k\ [\text{αν υπάρχει ομοιότητα από τον } (f(x,k), \leqslant_{\mathrm{KB}}) \\ & \qquad \text{στον } (f(x,n), \leqslant_{\mathrm{KB}}) \text{ τότε } n \leqslant k].\end{aligned}$$

Από τον πιο πάνω ισχυρισμό προκύπτει εύκολα ότι το P^* είναι συναναλυτικό σύνολο (Άσκηση 6.1.7).

Υποθέτουμε αρχικά ότι $(x,n) \in P^*$ και εωρούμε $m \in \mathbb{N}$. Αν υπήρχε ομοιότητα από τον $(f(x,m), \leqslant_{\mathrm{KB}})$ σε ένα γνήσιο αρχικό τμήμα του $(f(x,n), \leqslant_{\mathrm{KB}})$, αφού ο τελευταίος χώρος είναι καλά διατεταγμένος, τότε και ο $(f(x,m), \leqslant_{\mathrm{KB}})$ θα ήταν καλά διατεταγμένος. Τότε $f(x,m) \in \mathrm{WF}$ και $(x,m) \in P$. Από την άλλη, αφού ο $(f(x,m), \leqslant_{\mathrm{KB}})$ θα ήταν όμοιος με ένα γνήσιο αρχικό τμήμα του $(f(x,n), \leqslant_{\mathrm{KB}})$ θα είχαμε επίσης $\xi(x,m) < \xi(x,m)$, που έρχεται σε αντίθεση με $(x,n) \in P^*$. Άρα δεν υπάρχει ομοιότητα από τον $(f(x,m), \leqslant_{\mathrm{KB}})$ σε ένα γνήσιο αρχικό τμήμα του $(f(x,n), \leqslant_{\mathrm{KB}})$.

Αν για κάποιο $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει ομοιότητα από τον $(f(x,k), \leqslant_{\mathrm{KB}})$ στον $(f(x,n), \leqslant_{\mathrm{KB}})$, τότε, όπως και πιο πάνω, ο $(f(x,k), \leqslant_{\mathrm{KB}})$ είναι καλά διατεταγμένος χώρος, $(x,k) \in P$ και $\xi(x,k) \leqslant \xi(x,n)$. Αφού $(x,n) \in P^*$, θα έχουμε $\xi(x,k) = \xi(x,n)$ και άρα $n \leqslant k$.

Δείξαμε λοιπόν την ευθεία κατεύθυνση της (6.1). Αντίστροφα υποθέτουμε ότι το ζεύγος (x,n) ικανοποιεί το δεξιό σκέλος της (6.1) και δείχνουμε ότι $(x,n) \in P^*$. Έστω $m \in \mathbb{N}$ με $(x,n) \in P$. Αν είχαμε $\xi(x,m) < \xi(x,n)$, τότε ο χώρος $(f(x,m), \leqslant_{\mathrm{KB}})$ θα ήταν όμοιος με ένα γνήσιο αρχικό τμήμα του $(f(x,n), \leqslant_{\mathrm{KB}})$ που έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση.

Τέλος, αν για κάποιο $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει αρχική ομοιότητα από τον $(f(x,k), \leqslant_{\mathrm{KB}})$ στον $(f(x,n), \leqslant_{\mathrm{KB}})$ τότε ο $(f(x,k), \leqslant_{\mathrm{KB}})$ είναι καλά διατεταγμένος χώρος. Άρα $f(x,k) \in \mathrm{WF}$ και $(x,k) \in P$. Επιπλέον $\xi(x,k) \leqslant \xi(x,n)$ και από τη δεύτερη ιδιότητα στο δεξιό σκέλος της (6.1) έχουμε $\xi(x,n) \leqslant \xi(x,k)$. Άρα $\xi(x,n) = \xi(x,k)$ και από την τρίτη ιδιότητα στο δεξιό σκέλος της (6.1) προκύπτει $n \leqslant k$. ▫

Ασκήσεις

Άσκηση 6.3.2 (Συγκρίνετε με την Άσκηση 5.2.9). Για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και κάθε ζεύγος (P,Q) συναναλυτικών συνόλων υπάρχει ζεύγος (P^*,Q^*) συναναλυτικών συνόλων, το οποίο ανάγει το (P,Q).

Άσκηση 6.3.3 (Συναναλυτικά σύνολα και Borel-διαχωρισμός - Συγκρίνετε με την Άσκηση 5.2.9). Θεωρούμε ένα $G \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ που είναι $\mathcal{N}$-καθολικό για την $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_1(\mathcal{N})$. Ορίζουμε τα συναναλυτικά σύνολα $P_0, P_1 \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ ως εξής:

$$(\alpha,\gamma) \in P_0 \iff ((\alpha)_0,\gamma) \in G$$
$$(\alpha,\gamma) \in P_1 \iff ((\alpha)_1,\gamma) \in G.$$

Τότε για κάθε ζεύγος συναναλυτικών σύνολων (P_0^*, P_1^*) που ανάγει το (P_0, P_1) δεν υπάρχει Borel σύνολο που διαχωρίζει το P_0^* από το P_1^*.

Συμπεράνετε ότι κάθε υπεραριθμήσιμος Πολωνικός χώρος περιέχει δύο ξένα συναναλυτικά σύνολα για τα οποία δεν υπάρχει Borel υποσύνολο του χώρου, το οποίο να διαχωρίζει το ένα συναναλυτικό σύνολο από το άλλο. Επομένως το συμπέρασμα του Θεωρήματος Διαχωρισμού του Lusin (Θεώρημα 5.2.1) δεν ισχύει αν αντικαταστήσουμε τα αναλυτικά σύνολα με συναναλυτικά.

Άσκηση 6.3.4 (Srivastava [**41**] 5.1.17 και Blackwell [**3**]). Με τη βοήθεια της Άσκησης 6.3.3 δείξτε ότι για κάθε υπεραριθμήσιμο χώρο $\mathcal{X}$ υπάρχει ένα κλειστό σύνολο $F \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ για το οποίο ισχύει

$$\forall x \; \exists \beta \; (x,\beta) \in F$$

και το F **δεν έχει** Borel ενοποίηση.

Άσκηση 6.3.5. Για κάθε υπεραριθμήσιμο χώρο $\mathcal{X}$ υπάρχει ένα κλειστό σύνολο $T \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, έτσι ώστε για κάθε $x \in \mathcal{X}$ το σύνολο $T(x) = \{u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \mid (x,u) \in T\}$ να είναι δένδρο με μη κενό σώμα και η συνάρτηση

$$f : \mathcal{X} \to \mathcal{N} : f(x) = \text{το αριστερότερο άπειρο κλαδί του } T(x)$$

να **μην είναι** Borel-μετρήσιμη.

6.4. Το Θεώρημα Περιορισμένου Ποσοδείκτη και συνέπειες

Ορισμός 6.4.1. Θεωρούμε Πολωνικούς χώρους $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ και $P^* \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Θα λέμε ότι το P^* είναι **ενοποιημένο στην τελευταία μεταβλητή** αν για κάθε $x \in \mathcal{X}$ υπάρχει το πολύ ένα $y \in \mathcal{Y}$ με $(x, y) \in P^*$.

Θεώρημα 6.4.2 (Το Θεωρήμα Περιορισμένου Ποσοδείκτη - Κλασική Εκδοχή, [**10**], [**34**] - 4D.3). *Θεωρούμε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και μια ακολουθία $(H_i^*)_{i\in\mathbb{N}}$ συναναλυτικών υποσυνόλων του $\mathcal{X}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, που είναι ενοποιημένα στην τελευταία μεταβλητή. Θεωρούμε επίσης ένα σύνολο $Q \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ έτσι ώστε*

$$\forall x \in \exists^{\mathcal{N}} Q \;\; \exists i \; \exists \alpha \; \forall n \; ((x, n, \alpha(n)) \in H_i^* \; \& \; (x, \alpha) \in Q). \tag{6.2}$$

Ισχύουν τα εξής.

(i) *Αν το Q είναι συναναλυτικό σύνολο, τότε το $\exists^{\mathcal{N}} Q$ είναι επίσης συναναλυτικό υποσύνολο του $\mathcal{X}$.*

(ii) *Αν το Q είναι Borel σύνολο, τότε το $\exists^{\mathcal{N}} Q$ είναι επίσης Borel υποσύνολο του $\mathcal{X}$.*

Απόδειξη. Θέτουμε $P = \exists^{\mathcal{N}} Q$. Θεωρούμε αρχικά ότι το Q είναι συναναλυτικό υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathcal{N}$. Για κάθε $i \in \mathbb{N}$ ορίζουμε τα σύνολα $R_i \subseteq \mathcal{X}$ ως εξής:

$$x \in R_i \iff \forall \beta \; [\;\; (x, \beta) \in Q \;\; \vee \;\; \exists u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \; (u \not\sqsubseteq \beta \; \& \; \forall n < |u| \; (x, n, u(n)) \in H_i^*) \;].$$

Αφού τα σύνολα H_i^*, $i \in \mathbb{N}$, και Q είναι συναναλυτικά, έχουμε από τις ιδιότητες κλειστότητας της κλάσης $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}{}^1_1$ ότι κάθε R_i είναι συναναλυτικό σύνολο. Ισχυριζόμαστε ότι για κάθε $x \in \mathcal{X}$,

$$x \in P \iff \exists i \; (\forall n \; \exists m \; (x, n, m) \in H_i^* \; \& \; x \in R_i). \tag{6.3}$$

Για την ευθεία κατεύθυνση θεωρούμε $x \in P$. Από την υπόθεσή μας για το Q υπάρχει i και $\alpha \in \mathcal{N}$, έτσι ώστε $(x, \alpha) \in Q$ και για κάθε n ισχύει $(x, n, \alpha(n)) \in H_i^*$.

Δείχνουμε ότι το συγκεκριμένο i επαληθεύει το δεξιό σκέλος της (6.3). Είναι σαφές ότι για κάθε n υπάρχει m (συγκεκριμένα το $\alpha(n)$), έτσι ώστε $(x, n, m) \in H_i^*$.

Επαληθεύουμε ότι $x \in R_i$. Έστω $\beta \in \mathcal{N}$. Αν $(x, \beta) \in Q$, τότε έχουμε προφανώς το ζητούμενο. Υποθέτουμε επομένως ότι $(x, \beta) \notin Q$. Ειδικότερα ισχύει $\beta \neq \alpha$, άρα υπάρχει $u \sqsubseteq \alpha$ με $u \not\sqsubseteq \beta$. Από την υπόθεσή μας για το α και το i ισχύει $(x, n, u(n)) = (x, n, \alpha(n)) \in H_i^*$ για κάθε $n < |u|$. Επομένως υπάρχει $u \not\sqsubseteq \beta$ με $(x, n, u(n)) \in H_i^*$ για κάθε $n < |u|$. Προκύπτει ότι $x \in R_i$.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση της (6.3) θεωρούμε i, όπως στην υπόθεση. Τότε για κάθε n υπάρχει m με $(x, n, m) \in H_i^*$. Εφόσον το H_i^* είναι ενοποιημένο στην τελευταία μεταβλητή, για κάθε n το προηγούμενο m είναι μοναδικό. Ορίζουμε

$$\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : \alpha(n) = \text{το μοναδικό } m \in \mathbb{N}, \text{ έτσι ώστε } (x, n, m) \in H_i^*.$$

Δείχνουμε ότι $(x, \alpha) \in Q$. Αφού από την υπόθεση $x \in R_i$, εφαρμόζοντας τον ορισμό για $\beta = \alpha$, έχουμε ή $(x, \alpha) \in Q$ ή

$$\exists u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \; (u \not\sqsubseteq \alpha \; \& \; \forall n < |u| \; (x, n, u(n)) \in H_i^*).$$

Αν ίσχυε η τελευταία συνθήκη, τότε θα υπήρχε ένα $u \not\sqsubseteq \alpha$ με $(x, n, u(n)) \in H_i^*$ για κάθε $n < |u|$. Αλλά τότε θα υπήρχε $n < |u|$ με $u(n) \neq \alpha(n)$ και $(x, n, u(n)) \in H_i^*$, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση ότι υπάρχει το πολύ ένα m με $(x, n, m) \in H_i^*$. Άρα η πιο πάνω συνθήκη δεν ισχύει και επομένως $(x, \alpha) \in Q$, απ' όπου προκύπτει $x \in P$.

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη της ισοδυναμίας (6.3). Αφού τα R_i είναι συναναλυτικά σύνολα, είναι σαφές από τις ιδιότητες κλειστότητας της κλάσης $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_1$ και την ισοδυναμία (6.3) ότι το P είναι επίσης συναναλυτικό.

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη θεωρούμε ότι το Q είναι Borel σύνολο. Τότε το $P = \exists^{\mathcal{N}} Q$ είναι αναλυτικό και από αυτό που μόλις αποδείξαμε είναι επίσης συναναλυτικό. Επομένως από το Θεώρημα του Suslin (Πόρισμα 5.2.2) το P είναι Borel σύνολο. ▫

Όπως θα δούμε στη συνέχεια, ο συνδυασμός του Θεωρήματος Ενοποίησης του Kreisel με το Θεώρημα Περιορισμένου Ποσοδείκτη αποτελεί ένα ισχυρό εργαλείο με βάση το οποίο αποδεικνύονται πολλά κλασσικά αποτελέσματα. Ξεκινάμε με ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα.

Θεώρημα 6.4.3 (Το σύνολο των σημείων μοναδικότητας Borel συνόλου, Lusin, [**24**], [**8**]). *Δίνονται δύο Πολωνικοί χώροι $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ και $R \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ Borel. Τότε το σύνολο P των σημείων μοναδικότητας του R,*

$$P = \{x \in \mathcal{X} \mid \exists! y \ (x, y) \in R\}$$

είναι συναναλυτικό.

Απόδειξη. Από το Λήμμα 4.2.9 υπάρχει συνεχής συνάρτηση $g : \mathcal{N} \to \mathcal{Y}$ και ένα G_δ σύνολο $C \subseteq \mathcal{N}$, ώστε $g[C] = \mathcal{Y}$ και ο περιορισμός $g|C$ να είναι ένα-προς-ένα.

Ορίζουμε το σύνολο $B \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ ως εξής:

$$(x, \alpha) \in B \iff \alpha \in C \ \& \ (x, g(\alpha)) \in R.$$

Τότε το B είναι Borel σύνολο και για κάθε $x \in \mathcal{X}$,

$$x \in P \iff \exists! y \ (x, y) \in R \iff \exists! \alpha \ (x, \alpha) \in B.$$

Επομένως αρκεί να αποδείξουμε το αποτέλεσμα στην περίπτωση $\mathcal{Y} = \mathcal{N}$. Υποθέτουμε λοιπόν στο εξής ότι $R \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$. Θεωρούμε το σύνολο $Q \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$,

$$(x, \alpha) \in Q \iff (x, \alpha) \in R \ \& \ \forall \beta \ [(x, \beta) \in R \longrightarrow \beta = \alpha],$$

έτσι που

$$x \in P \iff \exists \alpha \ (x, \alpha) \in Q, \quad \text{δηλαδή} \quad P = \exists^{\mathcal{N}} Q.$$

Το Q είναι προφανώς συναναλυτικό σύνολο. Σκοπός μας είναι να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Περιορισμένου Ποσοδείκτη (Θεώρημα 6.4.2) ώστε να συμπεράνουμε ότι το $\exists^{\mathcal{N}} Q = P$ είναι συναναλυτικό.

Ορίζουμε $H \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,

$$(x, n, m) \in H \iff \forall \beta \ ((x, \beta) \in R \longrightarrow \beta(n) = m).$$

Προφανώς το H είναι συναναλυτικό σύνολο. Από το Θεώρημα Ενοποίησης του Kreisel (Θεώρημα 6.3.1) παίρνουμε ένα συναναλυτικό σύνολο H^*, που είναι ενοποίηση του H στην τελευταία μεταβλητή.

Επαληθεύουμε την (6.2) για $H_i^* = H^*$, $i \in \mathbb{N}$. Για κάθε $x \in \mathcal{X}$ αν υπάρχει α ώστε $(x, \alpha) \in Q$, τότε γι' αυτό το α έχουμε $R_x = \{\alpha\}$. Επομένως για κάθε n ισχύει $(x, n, \alpha(n)) \in H$. Επιπλέον αν $(x, n, m) \in H$ εφαρμόζοντας τον ορισμό του H για $\beta = \alpha$, έχουμε $m = \alpha(n)$. Με άλλα λόγια, για κάθε n το $\alpha(n)$ είναι ο μοναδικός φυσικός m με $(x, n, m) \in H$. Αυτό συνεπάγεται ότι $(x, n, \alpha(n)) \in H^*$ για κάθε n. Καταλήγουμε ότι για κάθε $x \in \exists^{\mathcal{N}} Q$ υπάρχει $\alpha \in \mathcal{N}$ (το μοναδικό στοιχείο του R_x) για το οποίο $(x, n, \alpha(n)) \in H^*$ για κάθε n και φυσικά ισχύει $(x, \alpha) \in Q$.

Έχοντας δείξει την (6.2) προκύπτει από το Θεώρημα Περιορισμένου Ποσοδείκτη ότι το $P = \exists^{\mathcal{N}} Q$ είναι συναναλυτικό υποσύνολο του $\mathcal{X}$. ▫

Θεώρημα 6.4.4 (Το Κριτήριο Borel-ενοποίησης, [**34**] - 4D.4). *Θεωρούμε έναν Πολωνικό χώρο* $\mathcal{X}$ *και μια ακολουθία* $(H_i^*)_{i\in\mathbb{N}}$ *συναναλυτικών υποσυνόλων του* $\mathcal{X}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$*, που είναι ενοποιημένα στην τελευταία μεταβλητή. Θεωρούμε επίσης ένα σύνολο* $Q\subseteq\mathcal{X}\times\mathcal{N}$ *που ικανοποιεί την* (6.2)*:*

$$\forall x\in\exists^{\mathcal{N}}Q\ \ \exists i\ \exists\alpha\ \forall n\ ((x,n,\alpha(n))\in H_i^*\ \&\ (x,\alpha)\in Q).$$

Αν το Q *είναι Borel σύνολο, τότε το* Q *έχει μια Borel ενοποίηση* Q^* *και επίσης υπάρχει Borel-μετρήσιμη συνάρτηση* $f:\mathcal{X}\to\mathcal{N}$*, έτσι ώστε* $(x,f(x))\in Q$ *για κάθε* $x\in\exists^{\mathcal{N}}Q$*.*

Απόδειξη. Αρχικά εξηγούμε πώς από μια Borel ενοποίηση Q^* του Q μπορούμε να περάσουμε σε μια Borel-μετρήσιμη συνάρτηση f, όπως πιο πάνω. Από το Θεώρημα Περιορισμένου Ποσοδείκτη (Θεώρημα 6.4.2) το σύνολο $\exists^{\mathcal{N}}Q$ είναι Borel σύνολο. Ορίζουμε

$$f:\mathcal{X}\to\mathcal{N}:f(x)=\begin{cases}\text{το μοναδικό } \alpha\in\mathcal{N} \text{ με } (x,\alpha)\in Q^*, & \text{αν } x\in\exists^{\mathcal{N}}Q,\\ \\ (0,0,0,\dots), & \text{αν } x\notin\exists^{\mathcal{N}}Q.\end{cases}$$

Είναι σαφές από τον ορισμό της f ότι για κάθε $x\in\exists^{\mathcal{N}}Q$ ισχύει $(x,f(x))\in Q^*\subseteq Q$. Για να δείξουμε ότι η f είναι Borel-μετρήσιμη παρατηρούμε ότι για κάθε $(x,\alpha)\in\mathcal{X}\times\mathcal{N}$ ισχύει

$$(x,\alpha)\in Graph(f)\iff(\ x\in\exists^{\mathcal{N}}Q\ \&\ (x,\alpha)\in Q^*\ )\ \vee\ (x\notin\exists^{\mathcal{N}}Q\ \&\ \forall n\ \alpha(n)=0).$$

Επομένως το γράφημα $Graph(f)$ της f είναι Borel σύνολο και από το Πόρισμα 5.2.3 η f είναι Borel-μετρήσιμη.

Στη συνέχεια ασχολούμαστε με την κατασκευή της Borel ενοποίησης Q^*. Η ιδέα είναι πως για κάθε x και για κάθε i το σύνολο $A_i=\{\alpha\in\mathcal{N}\mid\forall n\ (x,n,\alpha(n))\in H_i^*\ \&\ (x,\alpha)\in Q\}$ είναι το πολύ μονοσύνολο, ακριβώς γιατί τα H_i^* είναι ενοποιημένα στην τελευταία μεταβλητή. Μάλιστα από τη συνθήκη (6.2) έχουμε ότι για κάθε $x\in\exists^{\mathcal{N}}Q$ υπάρχει ένα i_x για το οποίο το A_{i_x} είναι μη κενό, επομένως είναι μονοσύνολο. Πρέπει να βρούμε έναν Borel τρόπο ώστε να επιλέγουμε ένα τέτοιο i_x – αυτό γίνεται με την ενοποίηση του Kreisel εφαρμοσμένη σε ένα κατάλληλο συναναλυτικό σύνολο. Μετά θα επιλέξουμε το μοναδικό στοιχείο του A_{i_x} και θα δείξουμε ότι αυτό δίνει τη ζητούμενη Borel ενοποίηση.

Ορίζουμε το σύνολο $D\subseteq\mathcal{X}\times\mathbb{N}$,

$$(x,i)\in D\iff\forall n\ \exists m\ [\ (x,n,m)\in H_i^*\ \&$$
$$\forall\alpha\ (\ \exists n',m'\ ((x,n',m')\in H_i^*\ \&\ m'\neq\alpha(n'))\ )\ \vee\ (x,\alpha)\in Q\ ].$$

Είναι σαφές από τον ορισμό ότι το D είναι συναναλυτικό σύνολο – εδώ χρησιμοποιούμε ότι το σύνολο όλων των τετράδων (i,x,n,m) για τις οποίες ισχύει $(x,n,m)\in H_i^*$ είναι συναναλυτικό σύνολο (δείτε το Λήμμα 3.4.5).

Δίνουμε μερικές εξηγήσεις για τον ορισμό του D. Το «$(x,i)\in D$» σημαίνει αρχικά ότι για κάθε n υπάρχει (αναγκαστικά μοναδικό) m με $(x,n,m)\in H_i^*$. Επομένως ορίζεται η συνάρτηση

$$\alpha_x:\mathbb{N}\to\mathbb{N}:\alpha_x(n)=\text{ το μοναδικό } m \text{ με } (x,n,m)\in H_i^*.$$

Έπειτα θέλουμε να δηλώσουμε με τρόπο που να *ορίζει συναναλυτικό σύνολο* ότι γι' αυτό το α_x ισχύει $(x,\alpha_x)\in Q$ (έτσι που $A_i=\{\alpha_x\}$ με τον συμβολισμό από πιο πάνω). Για να το κάνουμε αυτό χρησιμοποιούμε ότι το α_x είναι το μοναδικό $\alpha\in\mathcal{N}$ που ικανοποιεί $(x,n,\alpha(n))\in H_i^*$ για κάθε n: επομένως ζητάμε για κάθε $\alpha\in\mathcal{N}$ είτε να αποτυγχάνει η συνθήκη $\forall n'\ (x,n',\alpha(n'))\in H_i^*$ (άρα $\alpha\neq\alpha_x$) είτε να ισχύει $(x,\alpha)\in Q$, αυτό εξασφαλίζει ότι θα έχουμε $(x,\alpha_x)\in Q$.

Η άρνηση της συνθήκης $\forall n' \ (x, n', \alpha(n')) \in H_i^*$ δείχνει εκ πρώτης όψεως να ορίζει αναλυτικό σύνολο, καθώς το H_i^* είναι συναναλυτικό. Χρησιμοποιούμε όμως ότι για κάθε n' υπάρχει μοναδικό m' με $(x, n', m') \in H_i^*$. Επομένως το να πούμε ότι υπάρχει n' με $(x, n', \alpha(n')) \notin H_i^*$ είναι ισοδύναμο με το να πούμε ότι υπάρχουν n', m' με $(x, n', m') \in H_i^*$ και το m' διαφέρει από το $\alpha(n')$. Αυτή είναι η ιδέα για τον ορισμό του D.

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι για κάθε $x \in \exists^{\mathcal{N}} Q$ αν τα i, α_x είναι όπως στην υπόθεση (6.2), δηλαδή αν ικανοποιούν

$$\forall n \ (x, n, \alpha_x(n)) \in H_i^* \ \& \ (x, \alpha_x) \in Q,$$

τότε $(x, i) \in D$.

Για να το δούμε αυτό παίρνουμε $x \in \exists^{\mathcal{N}} Q$ και i, α_x όπως στην υπόθεση (6.2). Επειδή το H_i^* είναι ενοποιημένο στην τελευταία μεταβλητή, αυτό το α_x είναι το μοναδικό $\alpha \in \mathcal{N}$ που ικανοποιεί $\forall n \ (x, n, \alpha(n)) \in H_i^*$. Για κάθε α που *δεν ικανοποιεί* τη συνθήκη

$$\exists n', m' \ ((x, n', m') \in H_i^* \ \& \ m' \neq \alpha(n'))$$

θα έχουμε $\forall n', m' \ ((x, n', m') \notin H_i^* \ \vee \ m = \alpha(n'))$. Παίρνοντας $m' = \alpha_x(n')$ προκύπτει ότι $\alpha_x(n') = \alpha(n')$ για κάθε n'. Επομένως $\alpha = \alpha_x$ και $(x, \alpha) = (x, \alpha_x) \in Q$. Αυτό δείχνει ότι $(x, i) \in D$.

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Ενοποίησης του Kreisel (Θεώρημα 6.3.1) και παίρνουμε ένα συναναλυτικό σύνολο $D^* \subseteq D$ που είναι ενοποίηση του D. Ορίζουμε τότε το σύνολο $Q^* \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$,

$$(x, \alpha) \in Q^* \iff \exists i \ (\ (x, i) \in D^* \ \& \ \forall n \ (x, n, \alpha(n)) \in H_i^* \ )$$

και δείχνουμε ότι το Q^* είναι μια Borel ενοποίηση του Q.

Αν έχουμε $(x, \alpha) \in Q^*$, παίρνουμε i όπως στον ορισμό του Q^*. Τότε για αυτό το α έχουμε $\forall n \ (x, n, \alpha(n)) \in H_i^*$ και επειδή το H_i^* είναι ενοποιημένο στην τελευταία μεταβλητή *δεν ισχύει* $\exists n', m' \ (\ (x, n', m') \in H_i^* \ \& \ m' \neq \alpha(n) \ )$. Από τον ορισμό του D προκύπτει ότι $(x, \alpha) \in Q$. Αυτό δείχνει ότι $Q^* \subseteq Q$.

Στη συνέχεια θεωρούμε $x \in \exists^{\mathcal{N}} Q$. Τότε από τα πιο πάνω, αν πάρουμε i, α_x, όπως στην υπόθεση (6.2), θα έχουμε $(x, i) \in D$ και φυσικά $\forall n \ (x, n, \alpha_x(n)) \in H_i^*$. Επομένως ισχύει $(x, \alpha_x) \in Q^*$. Δείχνουμε ότι αυτό το α_x είναι μοναδικό. Αν για κάποιο α' ισχύει $(x, \alpha') \in Q^*$, τότε υπάρχει i' με $(x, i') \in D^*$ και $\forall n \ (x, n, \alpha'(n)) \in H_{i'}^*$. Αφού το D είναι ενοποιημένο στην τελευταία μεταβλητή, προκύπτει ότι $i = i'$ και επομένως ισχύει $\forall n \ (x, n, \alpha'(n)) \in H_i^*$. Επιπλέον αφού το H_i^* είναι ενοποιημένο στην τελευταία μεταβλητή συμπεραίνουμε ότι $\alpha'(n) = \alpha_x(n)$ για κάθε n, δηλαδή έχουμε $\alpha' = \alpha_x$.

Καταλήγουμε ότι το Q^* είναι μια ενοποίηση του Q. Τέλος δείχνουμε ότι Q^* είναι Borel σύνολο. Είναι σαφές από τον ορισμό του ότι το Q^* είναι συναναλυτικό σύνολο. Επομένως από το Θεώρημα του Suslin αρκεί να δείξουμε ότι το Q^* είναι αναλυτικό. Προς αυτό ισχυριζόμαστε ότι

$$\begin{aligned}(x, \alpha) \in Q^* \iff & \ (x, \alpha) \in Q \ \& \\ & \forall i \ [\ (x, i) \in D \ \longrightarrow \ \forall n, m \ ((x, n, m) \in H_i^* \ \longrightarrow m = \alpha(n)) \ ].\end{aligned}$$

Το δεξιό σκέλος της πιο πάνω ισοδυναμίας ορίζει εύκολα ένα αναλυτικό σύνολο.

Για την ευθεία κατεύθυνση θεωρούμε $(x, \alpha) \in Q^* \subseteq Q$ και i με $(x, i) \in D$. Παίρνουμε επίσης n, m με $(x, n, m) \in H_i^*$. Πρέπει να δείξουμε ότι $m = \alpha(n)$. Από τον ορισμό του Q^* υπάρχει i' με $(x, i') \in D$ και $\forall n' \ (x, n', \alpha(n')) \in H_{i'}^*$, και επειδή το D είναι ενοποιημένο στην τελευταία μεταβλητή έχουμε $i = i'$. Για $n' = n$ παίρνουμε $(x, n, \alpha(n)) \in H_{i'}^* = H_i^*$ και αφού $(x, n, m) \in H_i^*$ καταλήγουμε ότι $m = \alpha(n)$.

Αντίστροφα υποθέτουμε ότι για κάποιο ζεύγος (x, α) ικανοποιείται το δεξιό σκέλος της πιο πάνω ισοδυναμίας. Έχουμε ειδικότερα ότι $x \in \exists^{\mathcal{N}} Q$. Όπως δείξαμε πιο πάνω, αν θεωρήσουμε τα i, α_x της (6.2), έχουμε $(x, i) \in D$ και $\forall n\ (x, n, \alpha_x(n)) \in H_i^*$. Πρέπει να δείξουμε ότι $(x, \alpha) \in Q^*$. Αρκεί επομένως να δείξουμε ότι $\forall n\ (x, n, \alpha(n)) \in H_i^*$. Θεωρούμε ένα n και εφαρμόζουμε την υπόθεσή μας για αυτά τα i, n και για $m = \alpha_x(n)$. Αφού ισχύει $(x, i) \in D$ και $(x, n, m) = (x, n, \alpha_x(n)) \in H_i^*$, έχουμε από το δεξιό σκέλος της ισοδυναμίας ότι $m = \alpha(n)$, δηλαδή $\alpha_x(n) = \alpha(n)$. Άρα $(x, n, \alpha(n))) \in H_i^*$ και η ισοδυναμία αποδείχθηκε.

□

Θεώρημα 6.4.5 (Το Κατασκευαστικό Θέωρημα Τέλειου Συνόλου, [**5**], [**25**], [**34**] - 4F.1). *Δίνεται ένας Πολωνικός χώρος $\mathcal{X}$ και ένα αναλυτικό $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$. Τότε υπάρχει ακολουθία $(H_i^*)_{i \in \mathbb{N}}$ από συναναλυτικά υποσύνολα του $\mathcal{X} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, τα οποία είναι ενοποιημένα στην τελευταία μεταβλητή έτσι ώστε για κάθε $x \in \mathcal{X}$ ισχύει ακριβώς ένα από τα εξής.*

(I) *Υπάρχει συνεχής μονομορφισμός $f : 2^{\mathbb{N}} \to P_x$, δηλαδή το σύνολο P_x περιέχει ένα μη κενό τέλειο υποσύνολο.*

(II) $P_x \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{\alpha \in \mathcal{N} \mid \forall n\ (x, n, \alpha(n)) \in H_i^*\}$.

Σχόλιο. Άμεση συνέπεια του πιο πάνω αποτελέσματος είναι ότι για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και για κάθε αναλυτικό σύνολο $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ υπάρχει συναναλυτικό σύνολο $Q \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$, έτσι ώστε για κάθε $x \in \mathcal{X}$ η τομή Q_x να είναι αριθμήσιμο σύνολο και για κάθε $x \in \mathcal{X}$ για το οποίο η τομή P_x είναι αριθμήσιμο σύνολο να ισχύει $P_x \subseteq Q_x$.

Απόδειξη. Αρχικά εξηγούμε γιατί οι περιπτώσεις (I) και (II) είναι αμοιβαία αποκλειστικές. Αν θέσουμε $A_{x,i} = \{\alpha \in \mathcal{N} \mid \forall n\ (x, n, \alpha(n)) \in H_i^*\}$, όπου $i \in \mathbb{N}$ και $x \in \mathcal{X}$, τότε κάθε $A_{x,i}$ είναι το πολύ μονοσύνολο. Επομένως το (II) συνεπάγεται ότι το P_x είναι αριθμήσιμο σύνολο. Ειδικότερα δεν μπορεί να είναι μη κενό τέλειο.

Για την κατασκευή των H_i^* χρειαζόμαστε μια προεργασία, όπου χρησιμοποιούμε με ουσιαστικό τρόπο το Θεώρημα Αναδρομής του Kleene για σύνολα (Θεώρημα 6.2.6).

Τα H_i^* που θα κατασκευάσουμε είναι της μορφής $H_{(u,v)}^*$, όπου τα u, v είναι πεπερασμένες ακολουθίες φυσικών αριθμών ίσου μήκους – υπάρχουν μόνο αριθμήσιμες πολλές τέτοιες. *Για το υπόλοιπο της απόδειξης όταν γράφουμε u, v θα εννοούμε πάντα ότι $u, v \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ και $|u| = |v|$.*

Υπενθυμίζουμε την έννοια του *δένδρου ζευγών* (Ορισμός 5.3.1). Αν το T είναι δένδρο ζευγών, συμβολίζουμε με $T_{(u,v)}$ το δένδρο όλων των ζευγών που είναι συμβατά με το ζεύγος (u, v). Με $\mathrm{pr}[T_{(u,v)}]$ εννοούμε την προβολή του σώματος του $T_{(u,v)}$ στην πρώτη συντεταγμένη, δηλαδή $\alpha \in \mathrm{pr}[T_{(u,v)}] \iff \exists \beta\ (\alpha, \beta) \in [T(x)_{(u,v)}]$.

Αρχικά θεωρούμε ένα σύνολο $G \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{X} \times (\mathbb{N}^{<\mathbb{N}})^2 \times \mathbb{N}^2$ που είναι *καλό* καθολικό για τη $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}{}_1^1(\mathcal{X} \times (\mathbb{N}^{<\mathbb{N}})^2 \times \mathbb{N}^2)$ και ορίζουμε το σύνολο $Q \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{X} \times \mathcal{N}$,

$$(6.4) \qquad (\varepsilon, x, \alpha) \in Q \iff (x, \alpha) \in P \ \ \&\ \ \forall u, v\ \exists n\ (\varepsilon, x, u, v, n, \alpha(n)) \notin G.$$

Το Q είναι προφανώς αναλυτικό σύνολο. Εφαρμόζουμε την Πρόταση 5.3.5 με τον $\mathcal{X} \times \mathcal{N}$ στη θέση του $\mathcal{X}$ και παίρνουμε ένα αναλυτικό σύνολο $T \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{X} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, έτσι ώστε για κάθε ε, x το σύνολο

$$T(\varepsilon, x) = \{(u, v) \mid (\varepsilon, x, u, v) \in T\}$$

να είναι *δένδρο ζευγών*. Για κάθε $\alpha \in \mathcal{N}$ ισχύει

$$(\varepsilon, x, \alpha) \in Q \iff \exists\beta\ (\alpha, \beta) \in [T(\varepsilon, x)], \tag{6.5}$$

και αν $Q_{(\varepsilon,x)} \neq \varnothing$, τότε το δένδρο $T(\varepsilon, x)$ είναι κλαδεμένο.

Ορίζουμε το σύνολο $H \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{X} \times (\mathbb{N}^{<\mathbb{N}})^2 \times \mathbb{N}^2$,

$$(\varepsilon, x, u, v, n, m) \in H \iff \forall(\alpha, \beta)\ [\ (\alpha, \beta) \in [T(\varepsilon, x)_{(u,v)}] \longrightarrow \alpha(n) = m\ ]. \tag{6.6}$$

Το H είναι συναναλυτικό σύνολο και από το Θεώρημα 6.3.1 (Ενοποίηση του Kreisel) υπάρχει συναναλυτικό σύνολο H^* που ενοποιεί το H στην τελευταία μεταβλητή. Αφού το G είναι καλό καθολικό, από το Θεώρημα 6.2.6 (Θεώρημα Αναδρομής του Kleene για σύνολα) υπάρχει $\varepsilon_0 \in \mathcal{N}$ με

$$(\varepsilon_0, x, u, v, n, m) \in H^* \iff (\varepsilon_0, x, u, v, n, m) \in G \tag{6.7}$$

για κάθε x, u, v, n, m. Συμβολίζουμε με $H^*_{u,v}$ την (ε_0, u, v)-τομή του H^*, δηλαδή

$$(x, n, m) \in H^*_{(u,v)} \iff (\varepsilon_0, x, u, v, n, m) \in H^* \tag{6.8}$$

για κάθε x, n, m. Προφανώς τα $H^*_{(u,v)} \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ είναι συναναλυτικά και ενοποιημένα στην τελευταία μεταβλητή.

Τέλος ορίζουμε το $P' \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$

$$\begin{aligned} (x, \alpha) \in P' &\iff (\varepsilon_0, x, \alpha) \in Q \\ &\iff \exists\beta\ (\alpha, \beta) \in [T(\varepsilon_0, x)] \end{aligned} \tag{6.9}$$

όπου στην τελευταία ισοδυναμία χρησιμοποιήσαμε την (6.5). Επομένως $Q_{(\varepsilon_0,x)} = P'_x = \mathrm{pr}[T(\varepsilon_0, x)]$ για κάθε $x \in \mathcal{X}$.

Παρατηρούμε ότι αν $(x, \alpha) \in P'$, από τον ορισμό του Q (6.4) έχουμε ότι $(x, \alpha) \in P$. Άρα $P' \subseteq P$. Επιπλέον πάλι από τον ορισμό του Q καθώς και από την επιλογή του ε_0 (6.7) έχουμε για κάθε $(x, \alpha) \in P$ ότι

$$\begin{aligned} (x, \alpha) \in P' &\iff \forall u, v\ \exists n\ (\varepsilon_0, x, u, v, n, \alpha(n)) \notin G \\ &\iff \forall u, v\ \exists n\ (\varepsilon_0, x, u, v, n, \alpha(n)) \notin H^* \\ &\iff \forall u, v\ \exists n\ (x, n, \alpha(n)) \notin H^*_{(u,v)}. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Επομένως αν θέσουμε

$$A = \{(x, u, v, \alpha) \in \mathcal{X} \times (\mathbb{N}^{<\mathbb{N}})^2 \times \mathcal{N} \mid \forall n\ (x, n, \alpha(n)) \in H^*_{(u,v)}\} \tag{6.11}$$

προκύπτει από την (6.10) ότι

$$P'_x \cap \Big(\bigcup\nolimits_{u,v} A_{x,u,v}\Big) = \varnothing \qquad \text{για κάθε } x \in \mathcal{X}. \tag{6.12}$$

Θα δείξουμε ότι για κάθε $x \in \mathcal{X}$ είτε το P_x περιέχει ένα μη κενό τέλειο υποσύνολο είτε $P_x \subseteq \bigcup_{(u,v)}\{\alpha \mid \forall n\ (x, n, \alpha(n)) \in H^*_{(u,v)}\}$. Θεωρούμε για το υπόλοιπο της απόδειξης ένα $x \in \mathcal{X}$ και διακρίνουμε περιπτώσεις. Αν $P'_x = \varnothing$, τότε για κάθε $\alpha \in P_x$ έχουμε $(x, \alpha) \notin P'$ και άρα από την (6.10) υπάρχουν u, v, έτσι ώστε για κάθε n ισχύει $(x, n, \alpha(n)) \in H^*_{(u,v)}$, δηλαδή ισχύει η περίπτωση (II).

Επομένως υποθέτουμε για το υπόλοιπο της απόδειξης ότι $P'_x \neq \varnothing$ και δείχνουμε ότι υπάρχει συνεχής μονομορφισμός $f : 2^{\mathbb{N}} \to P_x$.

Ισχυρισμός. Για κάθε (u, v) έχουμε

(6.13)

$(u, v) \in T(\varepsilon_0, x) \iff$ η προβολή $\mathrm{pr}[T(\varepsilon_0, x)_{(u,v)}]$ περιέχει τουλάχιστον δύο στοιχεία.

Απόδειξη Ισχυρισμού. Η αντίστροφη συνεπαγωγή της (6.13) είναι προφανής καθώς αν η προβολή $\mathsf{pr}[T(\varepsilon_0, x)_{(u,v)}]$ είναι μη κενή τότε υπάρχει ζεύγος $(\alpha, \beta) \in [T(\varepsilon_0, x)]$ που επεκτείνει το (u, v). Ειδικότερα θα έχουμε $(u, v) \in T(\varepsilon_0, x)$.

Στη συνέχεια δείχνουμε την ευθεία κατεύθυνση. Θεωρούμε $(u, v) \in T(\varepsilon_0, x)$. Επειδή $P'_x = Q_{(\varepsilon_0,x)} \neq \emptyset$, έχουμε από τις ιδιότητες του συνόλου T ότι το $T(\varepsilon_0, x)$ είναι κλαδεμένο. Επομένως το (u, v), ως στοιχείο του $T(\varepsilon_0, x)$, επεκτείνεται σε ένα άπειρο κλαδί του $T(\varepsilon_0, x)$ και άρα $[T(\varepsilon_0, x)_{(u,v)}] \neq \emptyset$. Ειδικότερα το σύνολο $\mathsf{pr}[T(\varepsilon_0, x)_{(u,v)}]$ είναι μη κενό. Υποθέτουμε προς άτοπο ότι είναι μονοσύνολο, δηλαδή ότι υπάρχει $\alpha_0 \in \mathcal{N}$ με $\mathsf{pr}[T(\varepsilon_0, x)_{(u,v)}] = \{\alpha_0\}$. Θεωρούμε επίσης ένα $\beta_0 \in \mathcal{N}$ (το οποίο δεν είναι απαραίτητα μοναδικό) με $(\alpha_0, \beta_0) \in [T(\varepsilon_0, x)_{(u,v)}]$.

Παίρνουμε ένα $n \in \mathbb{N}$ και ελέγχουμε την (6.6): για κάθε $(\alpha, \beta) \in [T(\varepsilon_0, x)_{(u,v)}]$ έχουμε $\alpha \in \mathsf{pr}[T(\varepsilon_0, x)_{(u,v)}]$ και άρα $\alpha = \alpha_0$, επομένως $\alpha(n) = \alpha_0(n)$. Επομένως από την (6.6) προκύπτει ότι $(\varepsilon_0, x, u, v, n, \alpha_0(n)) \in H$.

Επιπλέον αν για κάποιο $m \in \mathbb{N}$ έχουμε $(\varepsilon_0, x, u, v, n, m) \in H$, τότε παίρνοντας $(\alpha, \beta) = (\alpha_0, \beta_0)$, το οποίο ανήκει στο $[T(\varepsilon_0, x)_{(u,v)}]$, έχουμε $\alpha_0(n) = m$. Με άλλα λόγια, το $\alpha_0(n)$ είναι ο μοναδικός φυσικός m με $(\varepsilon_0, x, u, v, n, m) \in H$. Εφόσον το H^* είναι ενοποίηση του H στην τελευταία μεταβλητή, προκύπτει ότι $(\varepsilon_0, x, u, n, n, \alpha_0(n)) \in H^*$. Από την (6.11) παίρνουμε ότι $(x, n, \alpha_0(n)) \in H^*_{(u,v)}$. Εφόσον το n είναι αυθαίρετο έχουμε ότι η τελευταία ιδιότητα ισχύει για κάθε n. Ισοδύναμα το (x, u, v, α_0) ανήκει στο σύνολο A (από τον ορισμό (6.11)), ή αλλιώς $\alpha \in A_{x,u,v}$. Από την (6.12) προκύπτει ότι $\alpha \notin P'_x$. Από την άλλη, $(\alpha_0, \beta_0) \in [T(\varepsilon_0, x)_{(u,v)}] \subseteq [T(\varepsilon_0, x)]$ και επομένως από την (6.9) έχουμε $(x, \alpha) \in P'$, δηλαδή $\alpha \in P'_x$ που είναι άτοπο. Άρα το $\mathsf{pr}[T(\varepsilon_0, x)_{(u,v)}]$ περιέχει τουλάχιστον δύο στοιχεία και αποδείξαμε τον Ισχυρισμό.

Όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος Τέλειου Συνόλου 5.3.6 λέμε ότι ένα ζεύγος (u, v) έχει δύο επεκτάσεις που είναι *ασύμβατες στην πρώτη συντεταγμένη* αν υπάρχουν (u_1, v_1), (u_2, v_2) που επεκτείνουν το (u, v), έτσι ώστε οι τα u_1 και τα u_2 να είναι ασύμβατες πεπερασμένες ακολουθίες. Από τον πιο πάνω Ισχυρισμό έχουμε ότι αν $(u, v) \in T(\varepsilon_0, x)$, τότε υπάρχουν δύο επεκτάσεις (u_l, v_l) και (u_r, v_r) που είναι ασύμβατες στην πρώτη συντεταγμένη και ανήκουν στο $T(\varepsilon_0, x)$. Τώρα μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα τέλειο υποσύνολο του $P'_x \subseteq P_x$ ξεκινώντας από την κενή ακολουθία και κάθε φορά επιλέγοντας επεκτάσεις μέσα στο $T(\varepsilon_0, x)$ που είναι ασύμβατες στην πρώτη μεταβλητή. Αυτό δίνει μια συνάρτηση $\varphi : \{0, 1\}^{<\mathbb{N}} \to T(\varepsilon_0, x)$ όπου για κάθε $w \in \{0, 1\}^{<\mathbb{N}}$ οι ακολουθίες $\varphi(w * (0))$, $\varphi(w * (1))$ επεκτείνουν την $\varphi(w)$ και είναι ασύμβατες στην πρώτη μεταβλητή.

Είναι σαφές ότι για κάθε $\gamma \in 2^{\mathbb{N}}$ η ένωση $\bigcup_n \varphi(\gamma|n)$ είναι ένα άπειρο κλαδί του $[T(\varepsilon_0, x)]$ και πως η συνάρτηση

$$f : 2^{\mathbb{N}} \to \mathcal{N} : f(\gamma) = \mathsf{pr}[\textstyle\bigcup_n \varphi(\gamma|n)]$$

είναι συνεχής, η οποία λαμβάνει τιμές στο $\mathsf{pr}[T(\varepsilon_0, x)] = P'_x \subseteq P_x$. Επομένως το $f[2^{\mathbb{N}}]$ είναι μη κενό συμπαγές και άρα κλειστό υποσύνολο του P_x. Επιπλέον, από την κρίσιμη ιδιότητα της φ το $f[2^{\mathbb{N}}]$ δεν έχει μεμονωμένα σημεία. Είναι συνεπώς ένα μη κενό τέλειο υποσύνολο του P_x. ▫

Μερικά σχόλια πάνω στην προηγούμενη απόδειξη. Στην απόδειξη της κατασκευαστικής θεωρίας, όπως αυτή δόθηκε από τον Mansfield [**25**], παίρνει κανείς ένα δένδρο ζευγών $T \subseteq \mathcal{X} \times (\mathbb{N}^{<\mathbb{N}})^2$, έτσι ώστε για κάθε x το $T(x)$ να είναι δένδρο και

$$(x, \alpha) \in P \iff \exists \beta \ (\alpha, \beta) \in [T(x)].$$

Θα χρειαστεί επίσης να ισχύει $[T(x)_{(u,v)}] \neq \emptyset$ για κάθε $(u,v) \in T$ και αυτό μπορεί να γίνει για κάποιο αναλυτικό σύνολο T (Πρόταση 5.3.4). Στην περίπτωση που το P_x είναι υπεραριθμήσιμο η ιδέα είναι να προχωρήσουμε σε υποδένδρα για τα οποία η προβολή $\mathrm{pr}[T(x)_{(u,v)}]$ περιέχει δύο τουλάχιστον στοιχεία – με αυτό τον τρόπο δημιουργείται ένα μη κενό τέλειο υποσύνολο. Στην «κακή περίπτωση» που το P_x είναι υπεραριθμήσιμο και το $\mathrm{pr}[T(x)_{(u,v)}]$ δεν περιέχει τουλάχιστον δύο στοιχεία, θα είναι αναγκαστικά μονοσύνολο, ας το πούμε $\{\alpha_0\}$. Αυτό το $\{\alpha_0\}$ είναι το μοναδικό στοιχείο $\alpha' \in \mathcal{N}$ με την ιδιότητα

$$\forall n\ \forall(\alpha,\beta) \in [T(x)_{(u,v)}]\ \alpha(n) = \alpha'(n).$$

Αυτό μας καθοδηγεί να ορίσουμε τα $H^*_{(u,v)}$ ως μία ενοποίηση στην τελευταία μεταβλητή των συνόλων

$$H_{(u,v)} = \{(x,n,m) \mid \forall(\alpha,\beta)\ [\ (\alpha,\beta) \in [T(x)_{(u,v)}] \ \longrightarrow\ \alpha(n) = m\ ]\}.$$

Τότε θα έχουμε $\mathrm{pr}[T(x)_{(u,v)}] \cap A_{(u,v,x)} \neq \emptyset$ όπου

$$A_{x,u,v} = \{\alpha \mid \forall n\ (x,n,\alpha(n)) \in H^*_{(u,v)}\}.$$

Από την άλλη, αν έχουμε καταφέρει να εξαιρέσουμε όλα τα $A_{x,u,v}$ από το P_x, καταλήγουμε ότι η κακή περίπτωση δεν θα συμβαίνει. Άρα αντί να ξεκινήσουμε με το P_x, ξεκινάμε με το $P_x \setminus \bigcup_{(u,v)} A_{x,u,v}$ – το τελευταίο σύνολο είναι εύκολα η x-τομή ενός αναλυτικού συνόλου, ας το πούμε P'. Αυτό όμως δημιουργεί το ακόλουθο πρόβλημα: για να ορίσουμε τα σύνολα $H^*_{(u,v)}$ και κατ' επέκταση τα $A_{x,u,v}$ χρειάζεται το σύνολο T που περιγράφει το P. Αν όμως περάσουμε σε ένα αναλυτικό υποσύνολο P', θα χρειαστούμε ένα άλλο T' το οποίο με τη σειρά του δημιουργεί καινούργια $A'_{(x,u,v)}$, τα οποία θα χρειαστεί επίσης να εξαιρέσουμε δημιουργώντας έτσι ένα καινούργιο αναλυτικό υποσύνολο P''. Μοιάζει να δημιουργείται ένας φαύλος κύκλος, το αδιέξοδο του οποίου όμως επιλύεται με μεθόδους της Θεωρίας Αναδρομής. Στη δική μας εκδοχή της απόδειξης εφαρμόζουμε το Θεώρημα Αναδρομής του Kleene για σύνολα, βλ. (6.7).

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι μια χαρακτηριστική εφαρμογή της Borel ενοποίησης. Στην απόδειξή του θα χρησιμοποιήσουμε το Κατασκευαστικό Θεώρημα Τέλειου Συνόλου 6.4.5.

Θεώρημα 6.4.6 (Lusin-Novikov, [**21**, **36**]). *Δίνονται δύο Πολωνικοί χώροι $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ και ένα Borel σύνολο $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ που ικανοποιεί ότι κάθε τομή P_x είναι αριθμήσιμο σύνολο. Τότε η προβολή $\exists^{\mathcal{Y}} P$ είναι Borel σύνολο και το P έχει μια Borel ενοποίηση.*

Απόδειξη. Από το Λήμμα 4.2.9 υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $\pi : \mathcal{N} \twoheadrightarrow \mathcal{Y}$ και ένα G_δ σύνολο $C \subseteq \mathcal{N}$ έτσι ώστε η π να είναι ένα-προς-ένα στο C, $\pi[C] = \mathcal{Y}$, και η $(\pi|C)^{-1} : \mathcal{Y} \to \mathcal{N}$ είναι Borel-μετρήσιμη. Ορίζουμε το σύνολο $Q \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ ως εξής:

$$(x,\alpha) \in Q \iff \alpha \in C\ \&\ (x,\pi(\alpha)) \in P.$$

Παρατηρούμε ότι το Q είναι Borel σύνολο, και επειδή $\pi[C] = \mathcal{Y}$, έχουμε $\exists^{\mathcal{N}} Q = \exists^{\mathcal{Y}} P$. Επιπλέον για κάθε $x \in \mathcal{X}$ υπάρχουν το πολύ αριθμήσιμα το πλήθος $y \in \mathcal{Y}$ με $(x,y) \in P$ και επειδή η π είναι ένα-προς-ένα στο C, υπάρχουν το πολύ αριθμήσιμα το πλήθος $\alpha \in \mathcal{N}$ με $(x,\alpha) \in Q$.

Αν το Q^* είναι ένα Borel σύνολο, το οποίο ενοποιεί το Q, τότε το P^* που ορίζεται ως εξής

$$(x,y) \in P^* \iff (x,(\pi|C)^{-1}(y)) \in Q^*$$

είναι επίσης Borel σύνολο λόγω της Borel-μετρησιμότητας της $(\pi|C)^{-1}$. Επιπλέον είναι σαφές ότι το P^* ενοποιεί το P.

Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι η προβολή $\exists^{\mathcal{N}} Q$ είναι Borel και ότι το Q επιδέχεται Borel uniformization.

Εφαρμόζουμε το Κατασκευαστικό Θεώρημα Τέλειου Συνόλου 6.4.5 στο σύνολο Q που, ως Borel, είναι και αναλυτικό σύνολο. Υπάρχει τότε ακολουθία $(H_i^*)_{i\in\mathbb{N}}$ από συναναλυτικά υποσύνολα του $\mathcal{X}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, έτσι ώστε για κάθε $x\in\mathcal{X}$ είτε (α) το Q_x περιέχει ένα μη κενό τέλειο υποσύνολο είτε (β) $Q_x \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{\alpha \in \mathcal{N} \mid \forall n\ (x,n,\alpha(n)) \in H_i^*\}$. Επειδή κάθε τομή Q_x είναι αριθμήσιμο σύνολο, δεν μπορεί να συμβαίνει το (α), επομένως συμβαίνει το (β).

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε το Θέωρημα Περιορισμένου Ποσοδείκτη 6.4.2. Συγκεκριμένα επαληθεύουμε την ιδιότητα (6.2) για το Q και την ακολουθία $(H_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Αν $x\in\exists^{\mathcal{N}}Q$, παίρνουμε ένα οποιοδήποτε $\alpha\in Q_x$, λόγω του (β) υπάρχει $i\in\mathbb{N}$, έτσι ώστε $\forall n\ ((x,n,\alpha(n))\in H_i^*\ \&\ (x,\alpha)\in Q)$. Αφού το Q είναι Borel σύνολο, έχουμε από το Θεώρημα 6.4.2 ότι η προβολή $\exists^{\mathcal{N}}Q=\exists^{\mathcal{N}}P$ είναι επίσης Borel σύνολο. Επιπλέον από το Κριτήριο Borel Ενοποίησης (Θεώρημα 6.4.4), αφού ικανοποιείται η ιδιότητα (6.2), το Q^* έχει Borel ενοποίηση.

□

Το Θεώρημα 6.4.6 επιδέχεται την ακόλουθη σημαντική βελτίωση.

Θεώρημα 6.4.7 (Lusin-Novikov, [**21, 36**]). *Για κάθε Πολωνικούς χώρους $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ και κάθε Borel σύνολο $P\subseteq\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ για το οποίο κάθε τομή P_x είναι αριθμήσιμο σύνολο, η προβολή $\exists^{\mathcal{N}}P$ είναι Borel και υπάρχει ακολουθία Borel συνόλων $(P_i^*)_{i\in\mathbb{N}}$ με $P=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}P_i^*$. Επιπλέον κάθε P_i^* είναι το γράφημα μιας συνάρτησης $f_i:\exists^{\mathcal{Y}}P\to\mathcal{Y}$.*

Ειδικότερα οποιοδήποτε από τα P_i^* είναι μια Borel ενοποίηση του P.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 6.4.6 η προβολή $\exists^{\mathcal{Y}}P$ είναι Borel σύνολο. Συνεχίζουμε με κάποια στοιχεία της απόδειξης του τελευταίου θεωρήματος. Με εφαρμογή του Λήμματος 4.2.9 μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mathcal{Y}=\mathcal{N}$. Επίσης από το Κατασκευαστικό Θεώρημα Τέλειου Συνόλου 6.4.5 υπάρχει ακολουθία $(H_i^*)_{i\in\mathbb{N}}$ από συναναλυτικά υποσύνολα του $\mathcal{X}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, έτσι ώστε για κάθε $x\in\mathcal{X}$ είτε (α) το P_x περιέχει ένα μη κενό τέλειο υποσύνολο είτε (β) $P_x\subseteq\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{\alpha\in\mathcal{N}\mid\forall n\ (x,n,\alpha(n))\in H_i^*\}$. Επειδή κάθε τομή P_x είναι αριθμήσιμο σύνολο, δεν μπορεί να συμβαίνει το (α), επομένως συμβαίνει το (β).

Η ιδέα για τη συνέχεια της απόδειξης είναι για κάθε $(x,\alpha)\in P$ να επιλέξουμε ένα $i\in\mathbb{N}$, έτσι ώστε $\forall n\ (x,n,\alpha(n))\in H_i^*$ – ένα τέτοιο i υπάρχει πάντα λόγω της (β). Ορίζουμε λοιπόν το σύνολο $R\subseteq\mathcal{X}\times\mathcal{N}\times\mathbb{N}$,

$$(x,\alpha,i)\in R \iff (x,\alpha)\in P\ \&\ \forall n\ (x,n,\alpha(n))\in H_i^*. \tag{6.14}$$

Το R είναι συναναλυτικό σύνολο. Για να το δούμε αυτό παρατηρούμε ότι το σύνολο όλων των τετράδων (i,x,n,m) για τις οποίες ισχύει $(x,n,m)\in H_i^*$, είναι συναναλυτικό σύνολο (δείτε το Λήμμα 3.4.5). Από το Θεώρημα ενοποίησης του Kreisel 6.3.1 υπάρχει ένα συναναλυτικό $R^*\subseteq R$ που ενοποιεί το R στην τελευταία μεταβλητή. Παρατηρούμε ότι λόγω του (β) για κάθε $(x,\alpha)\in P$ υπάρχει $i\in\mathbb{N}$ με $(x,\alpha,i)\in R$. Επομένως υπάρχει μοναδικό i με $(x,\alpha,i)\in R^*$.

Ισχυρισμός 1. Το R^* είναι Borel σύνολο.

Απόδειξη του Ισχυρισμού 1. Από το Θεώρημα του Suslin (Πόρισμα 5.2.2) αρκεί να δείξουμε ότι το R^* είναι αναλυτικό σύνολο. Για να το δούμε αυτό αποδεικνύουμε ότι

$$(x,\alpha,i)\in R^* \iff (x,\alpha)\in P\ \&\ \forall j\ (\ (x,\alpha,j)\in R^*\ \&\ j=i\ ),$$

για κάθε x,α,i. Αφού το R^* είναι συναναλυτικό σύνολο, είναι σαφές ότι το δεξιό σκέλος της πιο πάνω ισοδυναμίας ορίζει ένα αναλυτικό σύνολο. Επομένως αρκεί να δείξουμε την ισοδυναμία.

Για την ευθεία κατεύθυνση υποθέτουμε ότι $(x, \alpha, i) \in R^*$, ειδικότερα $(x, \alpha, i) \in R$ και $(x, \alpha) \in P$. Επιπλέον αν για κάποιο j έχουμε $(x, \alpha, j) \in R^*$, αφού το R^* είναι ενοποιημένο στην τελευταία μεταβλητή, προκύπτει ότι $i = j$. Αντίστροφα υποθέτουμε ότι για κάποια x, α, i έχουμε $(x, \alpha) \in P$ και πως για κάθε j αν $(x, \alpha, j) \in R^*$, τότε $j = i$. Αφού $(x, \alpha) \in P$, όπως αναφέραμε πιο πάνω, υπάρχει μοναδικό i' με $(x, \alpha, i') \in R^*$. Εφαρμόζουμε την υπόθεση για $j = i'$ και καταλήγουμε ότι $i' = j = i$. Άρα $(x, \alpha, i) \in R^*$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του Ισχυρισμού 1.

Παρατηρούμε ότι για κάθε x, i υπάρχει το πολύ ένα α με $(x, \alpha, i) \in R_i^*$. Πράγματι αν έχουμε $(x, \alpha, i) \in R^*$ και $(x, \alpha', i) \in R^*$, τότε αφού $R^* \subseteq R$ έχουμε από τον ορισμό του τελευταίου (6.14) ότι $(x, n, \alpha(n)) \in H_i^*$ και $(x, n, \alpha'(n)) \in H_i^*$ για κάθε n. Άρα $\alpha(n) = \alpha'(n)$ για κάθε n και επομένως $\alpha = \alpha'$.

Μια ιδέα είναι να πάρουμε για P_i το σύνολο όλων των (x, α) για τα οποία $(x, \alpha, i) \in R^*$. Όπως αποδείξαμε πιο πάνω, υπάρχει το πολύ ένα τέτοιο α. Από την άλλη όμως δεν είναι βέβαιο ότι για κάθε $x \in \exists^{\mathcal{N}} P$ υπάρχει ένα τέτοιο α *για το συγκεκριμένο* i (υπάρχουν σίγουρα α, i' με $(x, \alpha, i') \in R^*$, αλλά δεν γνωρίζουμε αν $i' = i$). Για να ξεπεράσουμε αυτό το εμπόδιο θα δείξουμε ότι υπάρχει Borel τρόπος να διακρίνουμε κατά πόσον υπάρχει α με $(x, \alpha, i) \in R^*$ (δοσμένων x, i) και στην περίπτωση που το τελευταίο δεν συμβαίνει, θα πάρουμε κάποιο α σύμφωνα με μια Borel ενοποίηση του P, η οποία ξέρουμε ότι υπάρχει από το Θεώρημα 6.4.6.

Ισχυρισμός 2. Το σύνολο $D \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ με

$$(x, i) \in D \iff \exists \alpha \ (x, \alpha, i) \in R^*$$

είναι Borel.

Απόδειξη του Ισχυρισμού 2. Το D είναι αναλυτικό σύνολο επειδή το R^* είναι Borel (Ισχυρισμός 1). Με εφαρμογή του Θεωρήματος του Suslin (Πόρισμα 5.2.2) αρκεί να δείξουμε ότι το D ικανοποιεί την ακόλουθη ισοδυναμία:

$$\begin{aligned}(x, i) \in D \iff & \forall n \ \exists m \ (x, n, m) \in H_i^* \\ & \& \ \forall \beta \ (\ \exists n', m'(\ (x, n', m') \in H_i^* \ \& \ m' \neq \beta(n') \ ) \ \vee \ (x, \beta, i) \in R^* \ ),\end{aligned}$$

για κάθε x, i. Αυτή δείχνει ότι το D είναι συναναλυτικό σύνολο. Για την ευθεία κατεύθυνση θεωρούμε $(x, i) \in D$ και α με $(x, \alpha, i) \in R^*$. Αφού $R^* \subseteq R$, έχουμε από την (6.14) ότι για κάθε n υπάρχει m, και συγκεκριμένα το $\alpha(n)$ με $(x, n, \alpha(n)) \in H_i^*$. Επιπλέον για κάθε β, για το οποίο δεν ικανοποιείται η συνθήκη $\exists n', m'((x, n', m') \in H_i^* \ \& \ m \neq \beta(n))$, ισχύει $(x, n, \beta(n)) \in H_i^*$ για κάθε n, οπότε $\beta(n) = \alpha(n)$ για κάθε n. Άρα $\beta = \alpha$ και $(x, \beta, i) \in R^*$. Για την αντίστροφη κατεύθυνση της ισοδυναμίας ορίζουμε $\alpha(n) =$ ο ελάχιστος m με $(x, n, m) \in H_i^*$. Παίρνοντας $\beta = \alpha$ και εφαρμόζοντας την υπόθεσή μας έχουμε ότι ισχύει είτε η συνθήκη $\exists n', m'((x, n', m') \in H_i^* \ \& \ m' \neq \alpha(n'))$ είτε η $(x, \alpha, i) \in R^*$. Η πρώτη συνθήκη δεν μπορεί να ισχύει γιατί από τον ορισμό του α έχουμε $(x, n', \alpha(n')) \in H_i^*$ και το H_i^* είναι ενοποιημένο στην τελευταία μεταβλητή. Επομένως ισχύει $(x, \alpha, i) \in R^*$ και από τον ορισμό του D έχουμε $(x, i) \in D$. Αυτό αποδεικνύει τον Ισχυρισμό 2.

Τέλος παίρνουμε ένα Borel σύνολο B^* που ενοποιεί το P Θεώρημα 6.4.6 και για κάθε $i \in \mathbb{N}$ ορίζουμε το σύνολο $P_i^* \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$,

$$(x, \alpha) \in P_i^* \iff (x, \alpha, i) \in R^* \ \vee \ (\ (x, i) \notin D \ \& \ (x, \alpha) \in B^* \ ).$$

Αφού τα R^*, P, D και B^* είναι Borel σύνολα, είναι σαφές ότι κάθε P_i^* είναι επίσης Borel σύνολο. Αν $(x, \alpha, i) \in R^* \subseteq R$, έχουμε από τον ορισμό του R ότι $(x, \alpha) \in P$. Αν $(x, \alpha) \in B^*$ επειδή το $B^* \subseteq P$, έχουμε πάλι $(x, \alpha) \in P$. Καταλήγουμε ότι $P_i^* \subseteq P$ για κάθε i.

Απομένει να δείξουμε ότι για κάθε i ισχύει $\exists^{\mathcal{N}} P_i^* = \exists^{\mathcal{N}} P$ και πως το P_i^* είναι ενοποιημένο στην τελευταία μεταβλητή. Σταθεροποιούμε ένα $i \in \mathbb{N}$. Είναι σαφές ότι $\exists^{\mathcal{N}} P_i^* \subseteq \exists^{\mathcal{N}} P$, οπότε δείχνουμε τον αντίστροφο εγκλεισμό. Παίρνουμε ένα $x \in \exists^{\mathcal{N}} P$ και διακρίνουμε περιπτώσεις. Αν $(x,i) \notin D$, τότε αφού το B^* είναι ενοποίηση του P υπάρχει ειδικότερα α με $(x,\alpha) \in B^*$, και επομένως $(x,\alpha) \in P_i^*$. Αν $(x,i) \in D$, από τον ορισμό του D υπάρχει α με $(x,\alpha,i) \in R^*$, άρα έχουμε πάλι $(x,\alpha) \in P_i^*$. Σε κάθε περίπτωση καταλήγουμε ότι $x \in \exists^{\mathcal{N}} P_i^*$.

Για να δείξουμε ότι το P_i^* είναι ενοποιημένο στην τελευταία μεταβλητή θεωρούμε x, α, α' με $(x,\alpha) \in P_i^*$ και $(x,\alpha') \in P_i^*$. Η βασική παρατήρηση είναι ότι δεν μπορούν να ισχύουν διαφορετικές συνθήκες για τα (x,α), (x,α') στη διάζευξη που ορίζει το P_i^*. Δηλαδή αν έχουμε $(x,\alpha,i) \in R^*$, τότε $(x,i) \in D$, επομένως θα έχουμε από τον ορισμό του P_i^* ότι $(x,\alpha',i) \in R^*$. Όμοια αν ισχύει η δεύτερη συνθήκη για το (x,α), τότε $(x,i) \notin D$ και $(x,\alpha) \in B^*$. Αλλά τότε δεν γίνεται να έχουμε $(x,\alpha',i) \in R^*$ (γιατί αλλιώς θα είχαμε $(x,i) \in D$). Άρα ισχύει η δεύτερη συνθήκη για το (x,α') στον ορισμό του P_i^*, ειδικότερα έχουμε $(x,\alpha') \in B$.

Καταλήγουμε ότι είτε $(x,\alpha,i) \in R^*$ και $(x,\alpha',i) \in R^*$ είτε $(x,\alpha) \in B^*$ και $(x,\alpha') \in B^*$. Όπως αποδείξαμε πιο πάνω, υπάρχει το πολύ ένα στοιχείο $\beta \in \mathcal{N}$ με $(x,\beta,i) \in R^*$, επομένως στην πρώτη περίπτωση έχουμε $\alpha = \alpha'$. Στη δεύτερη περίπτωση εφαρμόζουμε ότι το B^* είναι ενοποιημένο στην τελευταία μεταβλητή, οπότε πάλι έχουμε $\alpha = \alpha'$. Επομένως το P_i^* είναι ενοποιημένο στην τελευταία μεταβλητή. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Ασκήσεις

Άσκηση 6.4.8. Για κάθε Πολωνικούς χώρους $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ και κάθε αναλυτικό $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ το σύνολο

$$C = \{x \in \mathcal{X} \mid \text{η τομή } P_x \text{ είναι αριθμήσιμο σύνολο}\}$$

είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}{}^1_1$.

Άσκηση 6.4.9. Για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και κάθε αναλυτικό σύνολο $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ υπάρχει μια συνάρτηση $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}^{\mathbb{N}}$, η οποία έχει συναναλυτικό γράφημα, και για κάθε $x \in \mathcal{X}$ για το οποίο το P_x είναι αριθμήσιμο σύνολο ισχύει $P_x \subseteq \{f(x)(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Άσκηση 6.4.10. Μια συνάρτηση $f : X \to Y$ ονομάζεται **αριθμήσιμου-συνόλου-προς-ένα** (countable-to-one) αν για κάθε $y \in Y$ η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}[\{y\}] = \{x \in X \mid f(x) = y\}$ είναι αριθμήσιμο σύνολο.

Δείξτε ότι για κάθε Πολωνικούς χώρους $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ κάθε Borel-μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ και κάθε Borel σύνολο $B \subseteq \mathcal{X}$, για το οποίο ο περιορισμός $f|B$ είναι αριθμήσιμου-συνόλου-προς-ένα, η εικόνα $f[B]$ είναι Borel σύνολο και υπάρχει Borel-μετρήσιμη συνάρτηση $g : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ με την ιδιότητα $f(g(y))) = y$ για κάθε $y \in f[B]$.

Άσκηση 6.4.11. Αποδείξτε το Θεώρημα 4.3.3 (η Borel-μετρήσιμη ένα-προς-ένα εικόνα ενός Borel συνόλου είναι Borel σύνολο) με τους ακόλουθους τρόπους:

(i) Με εφαρμογή του Θεωρήματος 6.4.6.

(ii) Με εφαρμογή του Θεωρήματος Ενοποίησης του Kreisel (Θεώρημα 6.3.1) χωρίς να επικαλεστείτε το Θεώρημα 6.4.6.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Εφαρμογές της Θεωρίας Παιγνίων

Σύνοψη:
- Βασικές έννοιες και αποτελέσματα από τη θεωρία παιγνίων.
- Προσδιοριστότητα και Τέλεια σύνολα.

Προαπαιτούμενη γνώση:
- Δένδρα.
- Στοιχειώδεις ιδιότητες προβολικών συνόλων.
- Επιθυμητή η εξοικείωση με τη θεωρία παιγνίων.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με κάποιες στοιχειώδεις εφαρμογές της θεωρίας παιγνίων στην περιγραφική θεωρία συνόλων. Οι εφαρμογές αυτού του είδους αποτελούν ένα ευρύ και δραστήριο πεδίο μελέτης. Δεν σκοπεύουμε να παρουσιάσουμε το θέμα σε μεγάλη έκταση. Αντί αυτού επιχειρούμε να παρουσιάσουμε τις βασικές έννοιες μαζί με κάποιες εφαρμογές, οι οποίες δίνουν τα εφόδια στον αναγνώστη για περαιτέρω εμβάθυνση στο αντικείμενο.

7.1. Βασικές έννοιες και αποτελέσματα

Το καινούργιο στοιχείο της μελέτης μας είναι το *παίγνιο Gale-Stewart* και οι συναφείς με αυτό έννοιες. Σε αυτό θεωρούμε ότι έχουμε δύο άτομα που θα τα αποκαλούμε παίκτες, συγκεκριμένα τον Παίκτη I και την Παίκτρια II. Οι δύο παίκτες παίζουν εναλλάξ κάποιο στοιχείο ενός δοσμένου συνόλου X, ξεκινώντας (από σύμβαση) από τον Παίκτη I και αυτή η διαδικασία συνεχίζεται επ' άπειρον. Έτσι δημιουργείται μια άπειρη ακολουθία $\overline{a} = (a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n}, a_{2n+1}, \dots)$, την οποία θα αποκαλούμε *γύρο* του παιγνίου, όπου a_0 είναι η πρώτη κίνηση του Παίκτη I, a_1 είναι η πρώτη κίνηση της Παίκτριας II, a_2 είναι η δεύτερη κίνηση του Παίκτη I, και ούτω καθεξής, (βλ. το Διάγραμμα 1). Το παίγνιο περιέχει και ένα *σύνολο απόδοσης* A που είναι υποσύνολο του $X^{\mathbb{N}}$. Ο Παίκτης I *κερδίζει τον γύρο* $\overline{a}$, ακριβώς όταν $\overline{a} \in A$. Στην άλλη περίπτωση, όπου $\overline{a} \notin A$ κερδίζει η Παίκτρια II. Είναι σαφές ότι κάθε γύρος κερδίζεται από ακριβώς έναν/μία από τους δύο παίκτες, όχι όμως απαραίτητα πάντα από το ίδιο άτομο: αν $\emptyset \neq A \subsetneq X^{\mathbb{N}}$, τότε υπάρχουν γύροι $\overline{a}$ και $\overline{b}$ όπου ο Παίκτης I κερδίζει τον $\overline{a}$ και η Παίκτρια II κερδίζει τον $\overline{b}$. Μας ενδιαφέρει ιδιαίτερα αν ένας/μία από τους δύο παίκτες έχει έναν τρόπο να κανονίζει τις κινήσεις του/της ώστε να κερδίζει *κάθε γύρο*. Για να μπορέσουμε να το εκφράσουμε αυτό με ακρίβεια, θα χρειαστούμε την έννοια της *στρατηγικής* για τον/την παίκτη/ρια. Η στρατηγική υπαγορεύει πώς θα παίξει ο παίκτης/ρια την κάθε του/της κίνηση δεδομένων όλων των προηγούμενων κινήσεων και από τους δύο παίκτες. Ακριβώς επειδή όλες οι προηγούμενες κινήσεις είναι δεδομένες και προσβάσιμες από τους δύο παίκτες, αυτά τα παίγνια ονομάζονται *παίγνια τέλειας πληροφορίας*. Επίσης τονίζουμε ότι η στρατηγική καθορίζει με μοναδικό τρόπο την κίνηση που θα ακολουθήσει

$$G_X(A) \left| \begin{array}{llllll} \mathrm{I} & a_0 & & a_2 & & \\ & & & & & \cdots \\ \mathrm{II} & & a_1 & & a_3 & \end{array} \right.$$

Διαγραμμα 1. Ένα γύρος στο παίγνιο $G_X(A)$.

ο/η παίκτης/ρια, δηλαδή δεν υπάρχει τυχαιότητα στη στρατηγική. Όλα αυτά ορίζονται ακριβώς ως ακολούθως:

Ορισμός 7.1.1 (Παίγνιο και συναφείς έννοιες). Θεωρούμε ένα μη κενό σύνολο X και ένα σύνολο $A \subseteq X^{\mathbb{N}}$.

(i) Το ζεύγος (X, A) καλείται **παίγνιο Gale-Stewart** ή πιο απλά **παίγνιο** στο σύνολο X και συμβολίζεται επίσης με $G_X(A)$. Το σύνολο A καλείται **σύνολο απόδοσης (payoff set)**.

(ii) Μια άπειρη ακολουθία $(a_0, a_1, \dots, a_{2n}, a_{2n+1}, \dots) \in X^{\mathbb{N}}$ καλείται γύρος στο $G_X(A)$. Είναι σαφές ότι κάθε άπειρη ακολουθία στοιχείων του X είναι γύρος σε κάθε παίγνιο.

(iii) Αν έχουμε έναν γύρο $\overline{a} \in X^{\mathbb{N}}$ λέμε ότι **ο Παίκτης I κερδίζει τον γύρο** $\overline{a}$ στο παίγνιο $G_X(A)$ αν $\overline{a} \in A$, και ότι **η Παίκτρια II κερδίζει τον γύρο** $\overline{a}$ στο παίγνιο $G_X(A)$ αν $\overline{a} \notin A$. Προφανώς για κάθε γύρο $\overline{a}$ είτε ο Παίκτης I κερδίζει τον γύρο $\overline{a}$ είτε η Παίκτρια II κερδίζει τον γύρο $\overline{a}$ στο $G_X(A)$.

(iv) Συμβολίζουμε με X^{even} το σύνολο όλων των πεπερασμένων ακολουθιών στο X άρτιου μήκους και με X^{odd} το σύνολο όλων των πεπερασμένων ακολουθιών στο X περιττού μήκους.

Μια συνάρτηση $\sigma : X^{\mathrm{even}} \to X$ καλείται **στρατηγική για τον Παίκτη I** στο παίγνιο $G_X(A)$. Ομοίως μια συνάρτηση $\tau : X^{\mathrm{odd}} \to X$ καλείται **στρατηγική για την Παίκτρια II** στο παίγνιο $G_X(A)$.

Διαισθητικά μια στρατηγική για κάποιον/α από τους δύο παίκτες υπαγορεύει σε αυτό το άτομο τι θα παίξει στην επόμενη κίνηση. Για παράδειγμα, αν έχουμε μια στρατηγική σ για τον Παίκτη I, τότε η πρώτη κίνηση του Παίκτη I σύμφωνα με τη σ είναι η $a_0 = \sigma(\Lambda)$, όπου Λ είναι η κενή ακολουθία η οποία φυσικά έχει μήκος 0. Υποθέτοντας ότι η Παίκτρια II έχει απαντήσει με a_1, τότε η σ υπαγορεύει στον Παίκτη I να παίξει το $a_2 = \sigma(a_0, a_1)$. Ομοίως αν έχουμε μια στρατηγική τ για την Παίκτρια II και υποθέτοντας ότι a_0 είναι η πρώτη κίνηση του Παίκτη I, τότε η τ λέει στην Παίκτρια II να απαντήσει με $a_1 = \tau(a_0)$. Στη συνέχεια, αν ο Παίκτης I παίξει a_2, τότε η Παίκτρια II απαντά σύμφωνα με την τ το $a_3 = \tau(a_0, a_1, a_2)$.

Παρατηρούμε ότι οι πιο πάνω στρατηγικές $\sigma : X^{\mathrm{even}} \to X$ και $\tau : X^{\mathrm{odd}} \to X$ δεν έχουν απαραίτητα κάποια σχέση με το σύνολο απόδοσης A. Με άλλα λόγια, η σ είναι στρατηγική για τον Παίκτη I σε *κάθε παίγνιο* και ομοίως η $\tau : X^{\mathrm{odd}} \to X$ είναι στρατηγική για την Παίκτρια II σε κάθε παίγνιο. Γι' αυτό τον λόγο θα λέμε συνήθως «στρατηγική» αντί για «στρατηγική στο παίγνιο $G_X(A)$». Φυσικά μας ενδιαφέρουν περισσότερο οι περιπτώσεις που οι στρατηγικές καθορίζονται με τη βοήθεια του A.

(v) Θεωρούμε ότι έχουμε έναν γύρο $\overline{a} = (a_0, a_1, \dots)$ και δύο στρατηγικές $\sigma : X^{\mathrm{even}} \to X$ και $\tau : X^{\mathrm{odd}} \to X$ για τον Παίκτη I και την Παίκτρια II αντίστοιχα. Λέμε ότι **ο Παίκτης I ακολουθεί τη σ στον γύρο** $\overline{a}$ αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το a_{2n} (δηλαδή η n-στη κίνηση του Παίκτη I) καθορίζεται σύμφωνα με τη σ και την πεπερασμένη ακολουθία όλων των προηγούμενων κινήσεων. Με άλλα λόγια για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $a_{2n} = \sigma(a_0, \dots, a_{2n-1})$. (Παρατηρούμε ότι

$$
G_X(A) \quad \begin{array}{|lcccccc}
\mathrm{I} & a_0 = \sigma(\Lambda) & & a_2 = \sigma(a_0, a_1) & & & \\
 & & & & & & \cdots \\
\mathrm{II} & & a_1 & & a_3 & &
\end{array}
$$

$$
G_X(A) \quad \begin{array}{|lcccccc}
\mathrm{I} & b_0 & & b_2 & & & \\
 & & & & & & \cdots \\
\mathrm{II} & & b_1 = \tau(b_0) & & b_3 = \tau(b_0, b_1, b_2) & &
\end{array}
$$

Διαγραμμα 2. Ο Παίκτης Ι ακολουθεί τη σ στον γύρο $\overline{a}$ και η Παίκτρια ΙΙ ακολουθεί την τ στον γύρο $\overline{b}$.

τα a_{2n+1}, $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή οι κινήσεις της Παίκτριας ΙΙ δεν έχουν απαραίτητα κάποια σχέση με τη σ.)

Ομοίως λέμε ότι **η Παίκτρια ΙΙ ακολουθεί την τ στον γύρο** $\overline{a}$ αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $a_{2n+1} = \tau(a_0, \ldots, a_{2n})$. (Παρομοίως παρατηρούμε ότι τα a_{2n}, $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή οι κινήσεις του Παίκτη Ι δεν έχουν απαραίτητα κάποια σχέση με την τ.)

Δείτε το Διάγραμμα 2.

(vi) Αν έχουμε δύο στρατηγικές $\sigma : X^{\text{even}} \to X$ και $\tau : X^{\text{odd}} \to X$ για τον Παίκτη Ι και την Παίκτρια ΙΙ αντίστοιχα τότε υπάρχει ακριβώς ένας γύρος στον οποίο ο Παίκτης Ι ακολουθεί τη σ και η Παίκτρια ΙΙ την τ, συγκεκριμένα ο $(a_0, a_1, \ldots, a_{2n}, a_{2n+1}, \ldots)$, όπου

$$
\begin{aligned}
a_{2n} =& \sigma(a_0, a_1, \ldots, a_{2n-2}, a_{2n-1}) \\
a_{2n+1} =& \tau(a_0, a_1, \ldots, a_{2n-2}, a_{2n-1}, a_{2n}), \quad n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Ειδικότερα έχουμε $a_0 = \sigma(\Lambda)$, $a_1 = \tau(a_0)$, $a_2 = \sigma(a_0, a_1)$, $a_3 = \tau(a_0, a_1, a_2)$, ... Συμβολίζουμε αυτόν τον γύρο $(a_0, a_1, \ldots, a_{2n}, a_{2n+1}, \ldots)$ με $\sigma * \tau$.

Δείτε το Διάγραμμα 3.

Σχόλιο. Η «τέλεια πληροφορία» στην οποία αναφερθήκαμε πιο πάνω, υλοποιείται από το γεγονός ότι οι στρατηγικές ορίζονται πάνω στο σύνολο όλων των ακολουθιών κατάλληλου μήκους, δηλαδή η ακολουθία που αποτελείται από όλες τις προηγούμενες κινήσεις ανήκει στο πεδίο ορισμού της στρατηγικής του ατόμου που πρόκειται να παίξει. Η έλλειψη τυχαιότητας οφείλεται στο γεγονός ότι οι στρατηγικές είναι συναρτήσεις, αποδίδουν δηλαδή ακριβώς μία τιμή σε μια δεδομένη πεπερασμένη ακολουθία κατάλληλου μήκους.

Μέχρι στιγμής έχουμε απλώς διατυπώσει μια καινούργια ορολογία γνωστών εννοιών και κάναμε μερικές εύκολες παρατηρήσεις. Η ουσία της έννοιας του παιγνίου βρίσκεται στην απαίτηση το ένα άτομο από τους δύο παίκτες να μπορεί να κερδίζει οποιονδήποτε γύρο ακολουθώντας μια κατάλληλη στρατηγική.

Ορισμός 7.1.2 (Νικητήρια Στρατηγική). Θεωρούμε ένα παίγνιο $G_X(A)$.

(i) Μία συνάρτηση $\sigma : X^{\text{even}} \to X$ ονομάζεται **νικητήρια στρατηγική για τον Παίκτη Ι στο παίγνιο** $G_X(A)$ αν για κάθε στρατηγική $\tau : X^{\text{odd}} \to X$ για την Παίκτρια ΙΙ ισχύει $\sigma * \tau \in A$. Με άλλα λόγια, όπως και να παίξει η Παίκτρια ΙΙ, ο Παίκτης Ι μπορεί να διαμορφώσει έτσι τις κινήσεις του ώστε να κερδίζει στο $G_X(A)$ τον γύρο που προκύπτει.

Ισοδύναμα η σ είναι νικητήρια στρατηγική για τον Παίκτη Ι στο παίγνιο $G_X(A)$ αν για κάθε γύρο $\overline{a}$, στον οποίο ο Παίκτης Ι ακολουθεί τη σ, έχουμε

$$
G_X(A) \quad \left| \begin{array}{lllll} \mathrm{I} & a_0 = \sigma(\Lambda) & & a_2 = \sigma(a_0, a_1) & \\ & & & & \dots \\ \mathrm{II} & & a_1 = \tau(a_0) & & a_3 = \tau(a_0, a_1, a_2) \end{array} \right.
$$

Διαγραμμα 3. Ο γύρος $\sigma * \tau$.

$\overline{a} \in A$. Αυτό συμβαίνει γιατί μπορούμε να θεωρήσουμε ότι στον γύρο $\overline{a}$ η Παίκτρια II έχει ακολουθήσει μια στρατηγική τ, δηλαδή ισχύει ότι για κάθε γύρο $\overline{a}$ υπάρχει μια στρατηγική τ για την Παίκτρια II, έτσι ώστε η τελευταία να ακολουθεί την τ στον $\overline{a}$.

(ii) Παρομοίως μια συνάρτηση $\tau : X^{\text{odd}} \to X$ ονομάζεται **νικητήρια στρατηγική για την Παίκτρια II στο παίγνιο** $G_X(A)$ αν για κάθε στρατηγική $\sigma : X^{\text{even}} \to X$ του Παίκτη I ισχύει $\sigma * \tau \notin A$. Ισοδύναμα για κάθε γύρο $\overline{a}$ στον οποίο η Παίκτρια II ακολουθεί την τ έχουμε $\overline{a} \notin A$.

(iii) Λέμε ότι ο Παίκτης I ή η Παίκτρια II **κερδίζει το παίγνιο** $G_X(A)$ αν το αντίστοιχο άτομο έχει νικητήρια στρατηγική στο παίγνιο $G_X(A)$. Με άλλα λόγια

$$\text{ο Παίκτης I κερδίζει το } G_X(A) \iff \exists \sigma \ \forall \tau \ (\sigma * \tau \in A) \tag{7.1}$$

$$\text{η Παίκτρια II κερδίζει το } G_X(A) \iff \exists \tau \ \forall \sigma \ (\sigma * \tau \notin A) \tag{7.2}$$

όπου πιο πάνω οι σ και τ είναι στρατηγικές για τον Παίκτη I και την Παίκτρια II αντίστοιχα.

Είναι σαφές από τους ορισμούς ότι δεν μπορούν και οι δύο παίκτες να κερδίζουν το ίδιο παίγνιο $G_X(A)$. *Δεν είναι όμως προφανές ότι κερδίζει τουλάχιστον ένα από τα δύο άτομα.* Για να το δούμε αυτό ας υποθέσουμε ότι ο Παίκτης I δεν κερδίζει το παίγνιο $G_X(A)$. Ισχύει δηλαδή η άρνηση του δεξιού σκέλους της (7.1), ισοδύναμα

$$\forall \sigma \ \exists \ \tau \ (\sigma * \tau \notin A).$$

Αυτό είναι αρκετά ασθενέστερο από την (7.2), δηλαδή από το ότι η Παίκτρια II κερδίζει: στην τελευταία περίπτωση έχουμε ότι για κάθε σ υπάρχει μια στρατηγική τ, *η οποία μπορεί να εξαρτάται από τη* σ, ώστε η Παίκτρια II να κερδίζει τον γύρο $\sigma * \tau$, ενώ στην (7.2) έχουμε ότι υπάρχει μια στρατηγική τ ώστε *για κάθε* σ η Παίκτρια II να κερδίζει τον γύρο $\sigma * \tau$. Με άλλα λόγια, η συνθήκη «*ο Παίκτης I δεν κερδίζει το παίγνιο* $G_X(A)$» δεν φαίνεται επαρκής για να μπορέσουμε να συμπεράνουμε ότι η Παίκτρια II κερδίζει το παίγνιο. Αυτό αφήνει ανοικτό το ενδεχόμενο κανένα άτομο από τους δύο παίκτες να μην κερδίζει το $G_X(A)$. Με τη χρήση του Αξιώματος Επιλογής μπορούμε να δούμε ότι όντως υπάρχει ένα τέτοιο παίγνιο (Πρόταση 7.1.3).

Η έννοια της νίκης σε ένα παίγνιο μπορεί επίσης να περιγραφεί διαισθητικά με τη βοήθεια άπειρων ακολουθιών ποσοδεικτών. Συγκεκριμένα ο Παίκτης I κερδίζει το $G_X(A)$ αν έχει μια κίνηση a_0, έτσι ώστε για κάθε κίνηση a_1 της Παίκτριας II έχει μια κίνηση a_2, έτσι ώστε για κάθε κίνηση a_3 της Παίκτριας II και ούτω καθεξής – τελικά η άπειρη ακολουθία $(a_0, a_1, a_2, a_3, \dots)$ πρέπει ανήκει στο A. Δηλαδή

$$\text{ο Παίκτης I κερδίζει το } G_X(A) \iff «\exists a_0 \ \forall a_1 \ \exists a_2 \ \forall a_3 \dots \ (a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) \in A».$$

(Τα εισαγωγικά « » μπαίνουν γιατί δεν έχουμε ορίσει την έννοια της λογικής πρότασης με άπειρους ποσοδείκτες.) Όμοια

η Παίκτρια II κερδίζει το $G_X(A) \iff$ «$\forall a_0\ \exists a_1\ \forall a_2\ \exists a_3 \dots\ (a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) \notin A$».

Υπενθυμίζουμε τον λογικό τελεστή της άρνησης $\neg$. Όπως θα δούμε με βάση το Αξίωμα Επιλογής, ο $\neg$ μπροστά από μια άπειρη ακολουθία ποσοδεικτών μπορεί να μετακινηθεί *πεπερασμένες* θέσεις προς τα δεξιά εναλλάσσοντας τα $\exists$ και $\forall$ μεταξύ τους (Λήμμα 7.1.7). Για παράδειγμα:

$$\begin{aligned} &« \ \neg\big(\exists a_0\ \forall a_1\ \exists a_2\ \forall a_3 \dots\ (a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) \in A\big) \ » \\ \iff &« \ \forall a_0\ \exists a_1\ \neg\big(\exists a_2\ \forall a_3 \dots\ (a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) \in A\big) \ ». \end{aligned}$$

Σύμφωνα με τα πιο πάνω, ο ισχυρισμός ότι ένας/μία από τους δύο παίκτες κερδίζει το παίγνιο $G_X(A)$ είναι ισοδύναμος με το να πούμε ότι η άρνηση της «πρότασης»

$$\exists a_0\ \forall a_1\ \exists a_2\ \forall a_3 \dots\ (a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) \in A$$

είναι η

$$\forall a_0\ \exists a_1\ \forall a_2\ \exists a_3 \dots\ (a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) \notin A.$$

Με άλλα λόγια, ο τελεστής $\neg$ να μπορεί να μετακινηθεί προς τα δεξιά όχι μόνο πεπερασμένες αλλά τελικά *άπειρες* θέσεις. Όπως αναφέραμε πιο πάνω, αυτό δεν είναι πάντα δυνατό.

Πρόταση 7.1.3 (Gale-Stewart [**4**]). *Υπάρχει $A \subseteq \{0,1\}^{\mathbb{N}} = 2^{\mathbb{N}}$, έτσι ώστε κανένας από τους δύο παίκτες να μην κερδίζει το παίγνιο $G_{\{0,1\}}(A)$.*

Απόδειξη. Επικαλούμαστε το Αξίωμα Επιλογής. Σύμφωνα με το τελευταίο, κάθε σύνολο επιδέχεται μια καλή διάταξη, είναι δηλαδή καλά διατάξιμο. Όπως είναι γνωστό από τη θεωρία συνόλων, υπάρχει μια αντιστοιχία μεταξύ ενός καλά διατάξιμου συνόλου με έναν διατακτικό αριθμό. Ο ελάχιστος τέτοιος διατακτικός είναι γνωστός ως *von Neumann πληθάριθμος* ή πιο απλά πληθάριθμος αυτού του συνόλου. Επομένως, σύμφωνα με το Αξίωμα Επιλογής κάθε σύνολο έχει πληθάριθμο. Συμβολίζουμε με $2^{\aleph_0}$ τον πληθάριθμο του $2^{\mathbb{N}}$.

Στη συνέχεια θεωρούμε τα σύνολα $\{0,1\}^{\{0,1\}^{\text{even}}}$ και $\{0,1\}^{\{0,1\}^{\text{odd}}}$. Αυτά είναι ισοπληθικά με το $2^{\mathbb{N}}$, επομένως έχουν τον ίδιο πληθάριθμο $2^{\aleph_0}$.

Γράφουμε λοιπόν $\{0,1\}^{\{0,1\}^{\text{even}}} = \{\sigma_\xi \mid \xi < 2^{\aleph_0}\}$ και $\{0,1\}^{\{0,1\}^{\text{odd}}} = \{\tau_\xi \mid \xi < 2^{\aleph_0}\}$.

Θα ορίσουμε στοιχεία $\alpha_\xi, \beta_\xi \in 2^{\mathbb{N}}$, $\xi < 2^{\aleph_0}$, έτσι ώστε για κάθε ξ να ισχύει

$$\{\alpha_{\xi'} \mid \xi' \leqslant \xi\} \cap \{\beta_{\xi'} \mid \xi' \leqslant \xi\} = \varnothing, \tag{7.3}$$

$$\exists \tau\ (\sigma_\xi * \tau = \beta_\xi), \tag{7.4}$$

$$\exists \sigma\ (\sigma * \tau_\xi = \alpha_\xi). \tag{7.5}$$

Αν ορίσουμε τα πιο πάνω α_ξ, β_ξ τότε η απόδειξη ολοκληρώνεται ως ακολούθως: παίρνουμε $A = \{\alpha_\xi \mid \xi < 2^{\aleph_0}\} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ και $B = \{\beta_\xi \mid \xi < 2^{\aleph_0}\} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$. Από την (7.3) έχουμε $A \cap B = \varnothing$. Για κάθε στρατηγική $\sigma = \sigma_\xi$ του Παίκτη I θεωρούμε μια στρατηγική τ για την Παίκτρια II, όπως στην (7.4), έτσι που $\sigma_\xi * \tau \in B$. Επομένως $\sigma_\xi * \tau \notin A$, δηλαδή ο Παίκτης I δεν κερδίζει τον γύρο $\sigma_\xi * \tau$. Επιπλέον, για κάθε στρατηγική $\tau = \tau_\xi$ της Παίκτριας II θεωρούμε μια στρατηγική σ για τον Παίκτη I όπως στην (7.5), έτσι που $\sigma * \tau_\xi \in A$ και άρα η Παίκτρια II δεν κερδίζει τον γύρο $\sigma * \tau_\xi$. Καταλήγουμε ότι κανένα άτομο από τους δύο παίκτες δεν κερδίζει το παίγνιο $G_{\{0,1\}}(A)$.

Επομένως, αρκεί να ορίσουμε τα πιο πάνω α_ξ, β_ξ, $\xi < 2^{\aleph_0}$. Αυτό γίνεται με υπερπεπερασμένη αναδρομή στο $\xi < 2^{\aleph_0}$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $\xi < 2^{\aleph_0}$

έχουν οριστεί για κάθε $\eta < \xi$ τα $\alpha_\eta, \beta_\eta \in 2^{\mathbb{N}}$, όπως πιο πάνω, και ορίζουμε τα α_ξ, β_ξ.

Θεωρούμε τις στρατηγικές σ_ξ και τ_ξ, όπως και τα σύνολα

$$C = \{\sigma_\xi * \tau \mid \tau \in \{0,1\}^{\{0,1\}^{\text{odd}}}\}, \quad D = \{\sigma * \tau_\xi \mid \sigma \in \{0,1\}^{\{0,1\}^{\text{even}}}\}.$$

Ισχυριζόμαστε ότι υπάρχουν ένα-προς-ένα συναρτήσεις $f : 2^{\mathbb{N}} \rightarrowtail C$ και $g : 2^{\mathbb{N}} \rightarrowtail D$, απ' όπου προκύπτει ότι τα C και D είναι ισοπληθικά με το $2^{\mathbb{N}}$, έχουν δηλαδή πληθάριθμο $2^{\aleph_0}$. Σχετικά με την f ορίζουμε για κάθε $\gamma \in 2^{\mathbb{N}}$ τη στρατηγική τ^γ για την Παίκτρια II, σύμφωνα με την οποία η τελευταία παίζει τις τιμές του γ ανεξαρτήτως των κινήσεων του Παίκτη I, δηλαδή

$$\tau^\gamma : \{0,1\}^{\text{odd}} \to \{0,1\} : \tau^\gamma(a_0, \ldots, a_{2n}) = \gamma(n).$$

Ειδικότερα οι τιμές του $\sigma_\xi * \tau^\gamma$ στις περιττές θέσεις είναι ακριβώς οι τιμές του γ, συγκεκριμένα $(\sigma_\xi * \tau^\gamma)(2n+1) = \gamma(n)$. Επομένως η $f : 2^{\mathbb{N}} \to C : f(\gamma) = \sigma_\xi * \tau^\gamma$ είναι ένα-προς-ένα.

Ομοίως για κάθε $\gamma \in 2^{\mathbb{N}}$ θεωρούμε τη στρατηγική σ^γ του Παίκτη I σύμφωνα με την οποία ο τελευταίος παίζει τις τιμές του γ ανεξαρτήτως των κινήσεων της Παίκτριας II, δηλαδή

$$\sigma^\gamma : \{0,1\}^{\text{even}} \to \{0,1\} : \sigma^\gamma(a_0, \ldots, a_{2n-1}) = \gamma(n).$$

Τότε $(\sigma^\gamma * \tau_\xi)(2n) = \gamma(n)$ και άρα η $g : 2^{\mathbb{N}} \to D : g(\gamma) = \sigma^\gamma * \tau_\xi$ είναι ένα-προς-ένα.

Στο επόμενο βήμα ισχυριζόμαστε ότι υπάρχει $\sigma \in \{0,1\}^{\{0,1\}^{\text{even}}}$ έτσι ώστε $\sigma * \tau_\xi \notin \{\beta_{\xi'} \mid \xi' < \xi\}$. Πράγματι, σε αντίθετη περίπτωση θα είχαμε $D \subseteq \{\beta_{\xi'} \mid \xi' < \xi\}$, και επομένως ο πληθάριθμος του D που είναι $2^{\aleph_0}$ θα ήταν μικρότερος ή ίσος του πληθάριθμου του $\{\beta_{\xi'} \mid \xi' < \xi\}$. Από την άλλη, ο πληθάριθμος του τελευταίου συνόλου είναι το πολύ ο πληθάριθμος του ξ, ο οποίος είναι μικρότερος ή ίσος του ξ, το οποίο είναι μικρότερο του $2^{\aleph_0}$, που είναι άτοπο. Επομένως υπάρχει $\sigma \in \{0,1\}^{\{0,1\}^{\text{even}}}$ έτσι ώστε $\sigma * \tau_\xi \notin \{\beta_{\xi'} \mid \xi' < \xi\}$. Παίρνουμε ένα τέτοιο σ. Συγκεκριμένα θέτουμε $\eta_\xi =$ ο ελάχιστος ζ με $\sigma_\zeta * \tau_\xi \notin \{\beta_\eta \mid \eta < \xi\}$ και θεωρούμε το σ_{η_ξ}. Ορίζουμε

$$\alpha_\xi = \sigma_{\eta_\xi} * \tau_\xi, \quad \text{έτσι που } \alpha_\xi \notin \{\beta_\eta \mid \eta < \xi\}.$$

Παρομοίως, χρησιμοποιώντας ότι ο πληθάριθμος του C είναι $2^{\aleph_0}$ βρίσκουμε ζ_ξ με $\sigma_\xi * \tau_{\zeta_\xi} \notin \{\alpha_\eta \mid \eta < \xi\} \cup \{\alpha_\xi\}$. Το τελευταίο σύνολο έχει πληθάριθμο μικρότερο ή ίσο του πληθαρίθμου του $\xi + 1$ που είναι μικρότερος του $2^{\aleph_0}$. Έπειτα ορίζουμε

$$\beta_\xi = \sigma_\xi * \tau_{\zeta_\xi}, \quad \text{έτσι που } \beta_\xi \notin \{\alpha_\eta \mid \eta < \xi\} \text{ και } \beta_\xi \neq \alpha_\xi.$$

Επαληθεύουμε τις ιδιότητες (7.3), (7.4) και (7.5) για τα α_ξ, β_ξ. Οι δύο τελευταίες ιδιότητες είναι άμεσες από τον ορισμό των α_ξ, β_ξ. Επαληθεύουμε λοιπόν την πρώτη από αυτές, δηλαδή ότι $\{\alpha_{\xi'} \mid \xi' \leqslant \xi\} \cap \{\beta_{\xi'} \mid \xi' \leqslant \xi\} = \varnothing$. Από την Επαγωγική Υπόθεση έχουμε ότι για κάθε $\eta < \xi$ ισχύει

$$\{\alpha_{\xi'} \mid \xi' \leqslant \eta\} \cap \{\beta_{\xi'} \mid \xi' \leqslant \eta\} = \varnothing,$$

απ' όπου είναι άμεσο ότι

$$\{\alpha_{\xi'} \mid \xi' < \xi\} \cap \{\beta_{\xi'} \mid \xi' < \xi\} = \varnothing, \tag{7.6}$$

καθώς αν είχαμε $\alpha_{\xi_0} = \beta_{\xi_1} = \alpha$ για κάποια $\xi_0, \xi_1 < \xi$, τότε για $\eta = \max\{\xi_0, \xi_1\} < \xi$ θα είχαμε $\alpha \in \{\alpha_{\xi'} \mid \xi' \leqslant \eta\} \cap \{\beta_{\xi'} \mid \xi' \leqslant \eta\}$ που είναι άτοπο.

Επιπλέον, από την επιλογή των α_ξ και β_ξ έχουμε ότι $\alpha_\xi \notin \{\beta_{\xi'} \mid \xi' < \xi\}$, $\beta_\xi \notin \{\alpha_{\xi'} \mid \xi' < \xi\}$ και $\alpha_\xi \neq \beta_\xi$. Με τη βοήθεια της (7.6) καταλήγουμε ότι$\{\alpha_{\xi'} \mid \xi' \leqslant \xi\} \cap \{\beta_{\xi'} \mid \xi' \leqslant \xi\} = \varnothing$. Αυτό ολοκληρώνει το επαγωγικό βήμα και η απόδειξη είναι πλήρης.

□

Ορισμός 7.1.4. Θεωρούμε ένα μη κενό σύνολο X και $A \subseteq X^{\mathbb{N}}$. Λέμε ότι το A είναι **προσδιοριστό** (determined) αν ένα άτομο από τους δύο παίκτες κερδίζει το $G_X(A)$.

Αποδεικνύεται ότι αν η Γ είναι κλάση συνόλων σε μετρικούς χώρους και κάθε σύνολο $A \in \Gamma(X^{\mathbb{N}})$ είναι προσδιοριστό τότε κάθε $B \in (\mathrm{c}\Gamma)(X^{\mathbb{N}})$ είναι προσδιοριστό, όπου το X είναι μη κενό σύνολο (Άσκηση 7.1.12).

Η Πρόταση 7.1.3 λέει ότι υπάρχει $A \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ που δεν είναι προσδιοριστό. Τίθεται εύλογα το ερώτημα ποια είναι τα προσδιοριστά σύνολα. Το ακόλουθο είναι ένα βαθύ αποτέλεσμα του D. Martin, που το παραθέτουμε χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 7.1.5 (Borel προσδιοριστότητας, Martin [**27, 28**]). *Θεωρούμε ένα μη κενό σύνολο X με τη διακριτή μετρική καθώς και τον μετρικό χώρο γινόμενο $X^{\mathbb{N}}$. Τότε κάθε Borel σύνολο $A \subseteq X^{\mathbb{N}}$ είναι προσδιοριστό.*

Το πιο πάνω αποτέλεσμα είναι ό,τι καλύτερο μπορούμε να πετύχουμε στα πλαίσια των κλασικών αξιωμάτων της θεωρίας συνόλων όσον αφορά τις κλάσεις που μελετάμε. Ήδη στο αμέσως επόμενο βήμα μετά τα Borel σύνολα δεν έχουμε κάποιο συμπέρασμα. Συγκεκριμένα η πρόταση «κάθε αναλυτικό υποσύνολο του $\mathcal{N}$ είναι προσδιοριστό», είναι ανεξάρτητη από τα αξιώματα των Zermelo-Fraenkel.

Θα αποδείξουμε όμως την προσδιοριστότητα των συνόλων στο πρώτο βήμα της Borel ιεραρχίας. Πριν το κάνουμε όμως αυτό, είναι χρήσιμο να απομονώσουμε μερικές ακόμα ιδιότητες.

Ορισμός 7.1.6. Αν το X είναι μη κενό σύνολο, το A είναι υποσύνολο του $X^{\mathbb{N}}$ και το u είναι μια πεπερασμένη ακολουθία στοιχείων του X, ορίζουμε

$$A_{u*} = \{f \in X^{\mathbb{N}} \mid u * (f(0), f(1), \dots, f(n), \dots) \in A\}.$$

Είναι σαφές ότι $(A_{u*})_{v*} = A_{(u*v)*}$ για κάθε $u, v \in X^{<\mathbb{N}}$.

Το νόημα του ακόλουθου αποτελέσματος είναι ότι αν πάρουμε την άρνηση της πρότασης άπειρων ποσοδεικτών που εκφράζει την έννοια της νίκης, μπορούμε να μετακινήσουμε τον τελεστή της άρνησης κατά πεπερασμένες θέσεις δεξιά. Σημειώνουμε ότι σε κάποιο σημείο κατά τη μετακίνηση χρειαζόμαστε γενικά το Αξίωμα Επιλογής.

Λήμμα 7.1.7. *Ισχύουν τα εξής:*

(i) *Για κάθε παίγνιο $G_X(A)$, αν ο Παίκτης I δεν κερδίζει το $G_X(A)$, τότε για κάθε $a_0 \in X$ η Παίκτρια II δεν κερδίζει το παίγνιο $G_X(X^{\mathbb{N}} \setminus A_{(a_0)*})$. Με άπειρους ποσοδείκτες:*

$$\neg\big(\exists a_0\, \forall a_1\, \exists a_2\, \forall a_3 \dots (a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) \in A\big) \iff \forall a_0\, \neg\big(\forall a_1\, \exists a_2\, \forall a_3 \dots (a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) \in A\big).$$

(Παρατηρούμε ότι $(a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) \in A \iff (a_1, a_2, a_3, \dots) \notin X^{\mathbb{N}} \setminus A_{(a_0)*}$, εξού και το σύνολο απόδοσης $X^{\mathbb{N}} \setminus A_{(a_0)*}$.)

(ii) *Για κάθε παίγνιο $G_X(B)$, αν η Παίκτρια II δεν κερδίζει το $G_X(B)$, τότε υπάρχει $b_0 \in X$, έτσι ώστε ο Παίκτης I δεν κερδίζει το παίγνιο $G_X(X^{\mathbb{N}} \setminus B_{(b_0)*})$. Με άπειρους ποσοδείκτες:*

$$\neg\big(\forall b_0\, \exists b_1\, \forall b_2\, \exists b_3 \dots (b_0, b_1, b_2, b_3, \dots) \in X^{\mathbb{N}} \setminus B\big) \iff \exists b_0\, \neg\big(\exists b_1\, \forall b_2\, \exists b_3 \dots (b_0, b_1, b_2, b_3, \dots) \in X^{\mathbb{N}} \setminus B\big).$$

(iii) *Για κάθε παίγνιο $G_X(A)$, αν ο Παίκτης I δεν κερδίζει το $G_X(A)$, τότε για κάθε $a_0 \in X$ υπάρχει $a_1 \in X$ έτσι ώστε ο Παίκτης I δεν κερδίζει το παίγνιο $G_X(A_{(a_0,a_1)*})$. Με άπειρους ποσοδείκτες:*

$$\neg\big(\exists a_0\, \forall a_1\, \exists a_2\, \forall a_3 \dots (a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) \in A\big) \iff \forall a_0\, \exists a_1\, \neg\big(\exists a_2\, \forall a_3 \dots (a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) \in A\big).$$

$$
\begin{array}{c|c|ccccc}
G_X(A) & \mathrm{I} & a_0 & & a_2 & & \\
 & & & & & & \dots \\
 & \mathrm{II} & & a_1 & & a_3 & \\
\hline
G_X(X^{\mathbb{N}} \setminus A_{(a_0)*}) & \mathrm{I} & a_1 & & a_3 & & \\
 & & & & & & \dots \\
 & \mathrm{II} & & a_2 = \tau(a_1) & & \dots &
\end{array}
$$

Διαγραμμα 4. Από το $G_X(X^{\mathbb{N}} \setminus A_{(a_0)*})$ στο $G_X(A)$.

(iv) *Για κάθε παίγνιο $G_X(B)$, αν η Παίκτρια ΙΙ δεν κερδίζει το $G_X(B)$, τότε υπάρχει $b_0 \in X$, έτσι ώστε για κάθε $b_1 \in X$, η Παίκτρια ΙΙ δεν κερδίζει το παίγνιο $G_X(B_{(b_0,b_1)*})$. Με άπειρους ποσοδείκτες:*

$$\neg\big(\forall b_0\, \exists b_1\, \forall b_2\, \exists b_3 \dots\, (b_0, b_1, b_2, b_3, \dots) \in X^{\mathbb{N}} \setminus B\big) \iff \exists b_0\, \forall b_1\, \neg\big(\forall b_2\, \exists b_3 \dots\, (b_0, b_1, b_2, b_3, \dots) \in X^{\mathbb{N}} \setminus B\big).$$

Απόδειξη. (i) Υποθέτουμε ότι υπάρχει $a_0 \in X$, έτσι ώστε η Παίκτρια ΙΙ να κερδίζει το παίγνιο $G_X(X^{\mathbb{N}} \setminus A_{(a_0)*})$ μέσω μιας στρατηγικής τ, και δείχνουμε ότι ο Παίκτης Ι κερδίζει το παίγνιο $G_X(A)$. Η ιδέα είναι ο Παίκτης Ι να ακολουθεί τις κινήσεις της Παίκτριας ΙΙ στο παίγνιο $G_X(X^{\mathbb{N}} \setminus A_{(a_0)*})$ η οποία υπαγορεύεται από την τ.

Συγκεκριμένα, ο Παίκτης Ι ξεκινά το παίγνιο $G_X(A)$ με a_0. Υποθέτουμε ότι η Παίκτρια ΙΙ απαντά με a_1. Πηγαίνουμε στο παίγνιο $G_X(X^{\mathbb{N}} \setminus A_{(a_0)*})$ και θεωρούμε ότι ο Παίκτης Ι έχει ξεκινήσει έναν γύρο παίζοντας a_1 (την κίνηση της Παίκτριας ΙΙ στο $G_X(A)$). Τότε η Παίκτρια ΙΙ απαντά στην κίνηση a_1 με την $a_2 = \tau(a_1)$. Πίσω στο παίγνιο $G_X(A)$ η απάντηση του Παίκτη Ι είναι η a_2. Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο, (βλ. Διάγραμμα 4).

Στην ουσία έχουμε περιγράψει τη στρατηγική σ για τον Παίκτη Ι, η οποία ορίζεται με αναδρομή ως εξής:

$$
\begin{aligned}
\sigma(\Lambda) &= a_0 \\
\sigma(a'_0, a'_1, \dots, a'_{2n-1}) &= \tau(a'_1, \dots, a'_{2n-1}), \quad n \geqslant 1.
\end{aligned}
$$

(Συνήθως θα αποφεύγουμε να δίνουμε τον λεπτομερή ορισμό όπως πιο πάνω. Αντί αυτού θα περιγράφουμε τη στρατηγική, όπως στην προηγούμενη παράγραφο.)

Ισχυριζόμαστε ότι η σ είναι νικητήρια στρατηγική για τον Παίκτη Ι στο $G_X(A)$. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι έχουμε έναν γύρο $\overline{a}$, όπου ο Παίκτης Ι ακολουθεί τη στρατηγική σ. Τότε αυτός ο γύρος έχει τη μορφή $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ και η Παίκτρια ΙΙ ακολουθεί την τ στον γύρο $(a_1, a_2, \dots)$. Επειδή η τ είναι νικητήρια για την Παίκτρια ΙΙ στο $G_X(X^{\mathbb{N}} \setminus A_{(a_0)*})$, έχουμε

$$(a_1, a_2, \dots) \notin X^{\mathbb{N}} \setminus A_{(a_0)*}, \quad \text{δηλαδή} \quad (a_1, a_2, \dots) \in A_{(a_0)*}.$$

Επομένως $\overline{a} = (a_0, a_1, a_2, \dots) \in A$ και έτσι ο Παίκτης Ι κερδίζει τον γύρο $\overline{a}$. Καταλήγουμε ότι η σ είναι νικητήρια στρατηγική για τον Παίκτη Ι στο $G_X(A)$.

(ii) Υποθέτουμε ότι για κάθε $b_0 \in X$ ο Παίκτης Ι κερδίζει το παίγνιο $G_X(X^{\mathbb{N}} \setminus B_{(b_0)*})$ και δείχνουμε ότι η Παίκτρια ΙΙ κερδίζει το $G_X(B)$. Από το Αξίωμα Επιλογής υπάρχει συνάρτηση $b_0 \in X \mapsto \sigma^{b_0}$ έτσι ώστε για κάθε $b_0 \in X$ το σ^{b_0} να είναι νικητήρια στρατηγική για τον Παίκτη Ι στο παίγνιο $G_X(X^{\mathbb{N}} \setminus B_{(b_0)*})$.

$$
\begin{array}{c|lllll}
 & \mathrm{I} & b_0 & & b_2 & & \\
G_X(B) & & & & & & \cdots \\
 & \mathrm{II} & & b_1 = \sigma^{b_0}(\Lambda) & & b_3 = \sigma(b_1, b_2) & \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|lllll}
 & \mathrm{I} & \sigma^{b_0}(\Lambda) & & \sigma(b_1, b_2) & & \\
G_X(X^{\mathbb{N}} \setminus B_{(b_0)*}) & & & & & & \cdots \\
 & \mathrm{II} & & b_2 & & \cdots & \\
\end{array}
$$

Διαγραμμα 5. Από το $G_X(X^{\mathbb{N}} \setminus B_{(b_0)*})$ στο $G_X(B)$.

Περιγράφουμε μια στρατηγική τ για την Παίκτρια II και δείχνουμε ότι είναι νικητήρια για το $G_X(B)$. Υποθέτουμε ότι ο Παίκτης I ξεκινά έναν γύρο με b_0. Η απάντηση της Παίκτριας II είναι η πρώτη κίνηση του Παίκτη I στο παίγνιο $G_X(X^{\mathbb{N}} \setminus B_{(b_0)*})$ σύμφωνα με τη στρατηγική σ^{b_0}. Δηλαδή η Παίκτρια II απαντά με $b_1 = \sigma^{b_0}(\Lambda)$. Υποθέτουμε ότι ο Παίκτης I παίζει b_2, η Παίκτρια II απαντά με την κίνηση του Παίκτη I σύμφωνα με την σ^{b_0} θεωρώντας ότι στο παίγνιο $G_X(X^{\mathbb{N}} \setminus B_{(b_0)*})$ έχουν παιχτεί οι κινήσεις (b_1, b_2). Δηλαδή η Παίκτρια II απαντά με $b_3 = \sigma^{b_0}(b_1, b_2)$. Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο, (βλ. Διάγραμμα 5).

Ο λόγος που επικαλούμαστε το Αξίωμα Επιλογής είναι γιατί θέλουμε η πιο πάνω διαδικασία ορισμού της στρατηγικής για την Παίκτρια II να δίνει όντως μια *συνάρτηση*, συγκεκριμένα την τ που ορίζεται με την αναδρομή:

$$
\begin{aligned}
\tau(b_0) &= \sigma^{b_0}(\Lambda) \\
\tau(b_0, \ldots, b_{2n}) &= \sigma^{b_0}(b_1, \ldots, b_{2n}), \quad n \geqslant 1.
\end{aligned}
$$

Δείχνουμε ότι αυτή η τ είναι νικητήρια για την Παίκτρια II στο παίγνιο $G_X(B)$. Θεωρούμε ότι έχουμε έναν γύρο $\overline{b} = (b_0, b_1, b_2, \ldots)$, όπου η Παίκτρια II ακολουθεί την τ. Σύμφωνα με τον ορισμό της τ, ο Παίκτης I ακολουθεί τη σ^{b_0} στον γύρο $(b_1, b_2, \ldots)$ και επειδή η σ^{b_0} είναι νικητήρια για αυτόν στο παίγνιο $G_X(X^{\mathbb{N}} \setminus B_{(b_0)*})$ έχουμε

$$
(b_1, b_2, \ldots) \in X^{\mathbb{N}} \setminus B_{(b_0)*}, \quad \text{δηλαδή} \quad (b_0, b_1, b_2, \ldots) \in X^{\mathbb{N}} \setminus B.
$$

Επομένως η Παίκτρια II κερδίζει τον γύρο $\overline{b} = (b_0, b_1, b_2 \ldots)$ στο παίγνιο $G_X(B)$ και άρα η τ είναι νικητήρια στρατηγική για την Παίκτρια II στο τελευταίο παίγνιο.

(iii) Ο ισχυρισμός είναι άμεσος από τα (i) και (ii) παίρνοντας $B = X^{\mathbb{N}} \setminus A_{(a_0)*}$ και $a_1 = b_0$. Παρατηρούμε ότι $X^{\mathbb{N}} \setminus B_{(a_1)*} = A_{(a_0,a_1)*}$.

(iv) Όμοια με το (iii), εφαρμόζουμε τα (ii) και (i) (με αυτή τη σειρά) παίρνοντας $A = X^{\mathbb{N}} \setminus B_{(b_0)*}$ και $a_0 = b_1$. Παρατηρούμε ότι $X^{\mathbb{N}} \setminus A_{(b_1)*} = B_{(b_0,b_1)*}$.

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. Κλείνοντας σχολιάζουμε ότι τα (iii) και (iv) μπορούν να αποδειχθούν και κατευθείαν, δηλαδή χωρίς την επίκληση των (i) και (ii), βλ. Άσκηση 7.1.13. □

Θεώρημα 7.1.8 (Gale-Stewart [**4**]). *Αν το X είναι μη κενό σύνολο, τότε κάθε κλειστό $F \subseteq X^{\mathbb{N}}$ είναι προσδιοριστό.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η Παίκτρια II δεν κερδίζει το παίγνιο $G_X(F)$ και δείχνουμε ότι ο Παίκτης I έχει νικητήρια στρατηγική στο $G_X(F)$.

Αρχικά περιγράφουμε την ιδέα. Εφόσον η Παίκτρια II δεν κερδίζει το $G_X(F)$, από το (iv) του Λήμματος 7.1.7 υπάρχει $b_0 \in X$, έτσι ώστε για κάθε $b_1 \in X$ η Παίκτρια II δεν κερδίζει το παίγνιο $G_X(F_{(b_0,b_1)*})$. Επιλέγουμε ένα τέτοιο b_0 και για κάθε b_1 εφαρμόζουμε ξανά το (iv) του Λήμματος 7.1.7 στο σύνολο $F_{(b_0,b_1)*}$: υπάρχει $b_2 \equiv b_2(b_0, b_1) \in X$, έτσι ώστε για κάθε $b_3 \in X$ η Παίκτρια II δεν κερδίζει το παίγνιο $G_X(F_{(b_0,b_1,b_2,b_3)*})$. Συνεχίζουμε ομοίως. Η στρατηγική του Παίκτη I είναι να παίζει τα b_0, b_2, ...

Δίνουμε αυστηρά τον ορισμό της στρατηγικής του Παίκτη I, όπως την περιγράψαμε πιο πάνω. Από το Αξίωμα Επιλογής και το (iv) του Λήμματος 7.1.7 υπάρχει μια συνάρτηση $\pi : X^{<\mathbb{N}} \to X$, έτσι ώστε για κάθε $u = (b_0, b_1, \ldots, b_{2n-1}) \in X^{<\mathbb{N}}$ (άρτιου μήκους), αν η Παίκτρια II δεν κερδίζει το παίγνιο $G_X(F_{u*})$ τότε για κάθε $b_{2n+1} \in X$ έχουμε ότι η Παίκτρια II δεν κερδίζει το παίγνιο $G_X(F_{u*(\pi(u),b_{2n+1})*})$. Με άλλα λόγια, αν η u είναι άρτιου μήκους και η Παίκτρια II δεν κερδίζει το $G_X(F_{u*})$, το $\pi(u)$ είναι το $b_{2n} \in X$ που υπάρχει από το (iv) του Λήμματος 7.1.7 εφαρμοσμένο στο σύνολο F_{u*}. Η στρατηγική σ για τον Παίκτη I είναι ακριβώς ο περιορισμός της π πάνω στο σύνολο όλων των πεπερασμένων ακολουθιών άρτιου μήκους (χωρίς να εξετάζουμε αν η Παίκτρια II κερδίζει το $G_X(F_{u*})$),

$$\sigma : X^{\text{even}} \to X : \sigma(u) = \pi(u).$$

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι η σ είναι νικητήρια στρατηγική για τον Παίκτη I στο παίγνιο $G_X(F)$. Για να το δούμε αυτό θεωρούμε έναν γύρο $f = (b_0, b_1, \ldots) \in X^{\mathbb{N}}$ όπου ο Παίκτης I ακολουθεί τη σ και δείχνουμε ότι $f \in F$. Παρατηρούμε ότι $b_0 = \pi(\Lambda)$ και επομένως η Παίκτρια II δεν κερδίζει το παίγνιο $G_X(F_{(b_0,b_1)*})$. Επειδή $b_2 = \sigma(b_0, b_1) = \pi(b_0, b_1)$, έχουμε από την κρίσιμη ιδιότητα της π ότι η Παίκτρια II δεν κερδίζει το παίγνιο $G_X(F_{(b_0,b_1,b_2,b_3)*})$. Προκύπτει εύκολα με επαγωγή στο $n \in \mathbb{N}$ ότι η Παίκτρια II δεν κερδίζει το παίγνιο $G_X(F_{(f|(2n-1))*})$, όπου $f|(2n-1) = (f(0), \ldots, f(2n-1)) = (b_0, \ldots, b_{2n-1})$.

Στη συνέχεια ισχυριζόμαστε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $f_n \in F$ με $f|(2n-1) \sqsubseteq f_n$. Πράγματι, αν για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ δεν υπήρχε τέτοιο f_n, τότε θα είχαμε

$$F \cap \{(f|(2n-1)) * g \mid g \in X^{\mathbb{N}}\} = \varnothing,$$

οπότε η Παίκτρια II θα μπορούσε να κερδίσει το παίγνιο $G_X(F_{(f|(2n-1))*})$ παίζοντας τυχαία ένα οποιοδήποτε σημείο του μη κενού συνόλου X. Αυτό όμως είναι άτοπο, γιατί η Παίκτρια II δεν κερδίζει το $G_X(F_{(f|(2n-1))*})$.

Επομένως, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $f_n \in F$ με $f|(2n-1) \sqsubseteq f_n$. Επιλέγοντας μια τέτοια ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι τότε άμεσο ότι $f_n \to f$ στον χώρο $X^{\mathbb{N}}$. Εφόσον η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αποτελείται από στοιχεία του F και το F είναι κλειστό υποσύνολο του $X^{\mathbb{N}}$, καταλήγουμε ότι $f \in F$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Παίγνια με κανόνες. Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με παίγνια στα οποία οι κινήσεις των δύο παικτών δεν θα πρέπει απλώς να ανήκουν στο δοσμένο σύνολο X, αλλά θα πρέπει επίσης να υπακούν και σε κάποιους πρόσθετους κανόνες. Αυτοί οι κανόνες υλοποιούνται μέσω ενός δένδρου T στο X. Συγκεκριμένα θα ζητήσουμε οι γύροι να είναι άπειρα κλαδιά του T. Επιπλέον θέλουμε το δένδρο T να μην έχει τερματικούς κόμβους, δηλαδή να είναι κλαδεμένο, προκειμένου να εξασφαλίσουμε ότι ο/η Παίκτης/τρια έχει πάντα κάποια διαθέσιμη κίνηση για να παίξει ώστε να μπορεί παραχθεί μια άπειρη ακολουθία.

Τα παίγνια με κανόνες μπορούν εύκολα να αναχθούν στα συνήθη παίγνια που είδαμε προηγουμένως με κάποια μικρή αλλαγή στο σύνολο απόδοσης

(Άσκηση 7.1.14). Παρόλα αυτά είναι χρήσιμο να τα απομονώσουμε ως ξεχωριστή έννοια.

Ορισμός 7.1.9 (Παίγνιο με κανόνες και συναφείς έννοιες). Θεωρούμε ένα μη κενό σύνολο X, ένα *κλαδεμένο* δένδρο στο X και ένα $A \subseteq [T] \subseteq X^{\mathbb{N}}$.

(i) Η τριάδα (X, A, T) καλείται **παίγνιο Gale-Stewart με κανόνες στο** T ή πιο απλά **παίγνιο στο** T και συμβολίζεται επίσης με $G_X(T, A)$. Το σύνολο A καλείται **σύνολο απόδοσης** (payoff set).

(ii) Ένας **γύρος στο** $G_X(T, A)$ είναι ένα άπειρο κλαδί $(a_0, a_1, \dots, a_{2n}, a_{2n+1}, \dots)$ του T. Διαισθητικά οι δύο παίκτες καθορίζουν τις κινήσεις τους, έτσι ώστε να παραμένουν στο T. Παρατηρούμε ότι κάθε $\overline{a} \in [T]$ είναι γύρος σε κάθε παίγνιο με κανόνες στο T.

(iii) Αν έχουμε έναν γύρο $\overline{a}$ στο $G_X(T, A)$, λέμε ότι **ο Παίκτης I κερδίζει τον γύρο** $\overline{a}$ στο παίγνιο $G_X(T, A)$ αν $\overline{a} \in A$, και ότι **η Παίκτρια II κερδίζει τον γύρο** $\overline{a}$ στο παίγνιο $G_X(T, A)$ αν $\overline{a} \notin A$. Προφανώς, για κάθε γύρο $\overline{a} \in [T]$ είτε ο Παίκτης I κερδίζει τον γύρο $\overline{a}$ είτε η Παίκτρια II κερδίζει τον γύρο $\overline{a}$ στο $G_X(T, A)$.

(iv) Θα καλούμε μια πεπερασμένη ακολουθία u στοιχείων του X **νόμιμη** στο $G_X(T, A)$ αν $u \in T$. Ένα $x \in X$ καλείται **νόμιμη κίνηση για τον Παίκτη I στο** $G_X(T, A)$ **ως προς τη** u αν $u * (x) \in T$, και ομοίως το x καλείται **νόμιμη κίνηση για την Παίκτρια II στο** $G_X(T, A)$ **ως προς τη** u αν $u * (x) \in T$.

(v) **Στρατηγική για τον Παίκτη I στο** $G_X(T, A)$ είναι μια συνάρτηση $\sigma : X^{\text{even}} \cap T \to X$ που ικανοποιεί επιπλέον ότι $u * (\sigma(u)) \in T$ για κάθε $u \in X^{\text{even}} \cap T$. Όμοια **στρατηγική για την Παίκτρια II** στο παίγνιο $G_X(T, A)$ είναι μια συνάρτηση $\tau : X^{\text{odd}} \cap T \to X$ που ικανοποιεί ότι $u * (\tau(u)) \in T$ για κάθε $u \in X^{\text{odd}} \cap T$. Η πρόσθετη απαίτηση που θέλουμε για τις στρατηγικές είναι να διασφαλίσουμε ότι παράγουν νόμιμες κινήσεις.

(vi) Θεωρούμε ότι έχουμε έναν γύρο $\overline{a} = (a_0, a_1, \dots)$ στο $G_X(T, A)$ και δύο στρατηγικές $\sigma : X^{\text{even}} \cap T \to X$ και $\tau : X^{\text{odd}} \cap T \to X$ για τον Παίκτη I και την Παίκτρια II στο $G_X(T, A)$ αντίστοιχα.

Λέμε ότι **ο Παίκτης I ακολουθεί τη** σ **στον γύρο** $\overline{a}$ αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $a_{2n} = \sigma(a_0, \dots, a_{2n-1})$. Ομοίως λέμε ότι **η Παίκτρια II ακολουθεί την** τ **στον γύρο** $\overline{a}$ αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $a_{2n+1} = \tau(a_0, \dots, a_{2n})$. (Παρατηρούμε ότι οι πεπερασμένες ακολουθίες $(a_0, \dots, a_{2n-1})$ και $(a_0, \dots, a_{2n})$ ανήκουν στο T, επομένως ανήκουν στα πεδία ορισμού των σ και τ αντίστοιχα).

(vii) Αν έχουμε δύο στρατηγικές $\sigma : X^{\text{even}} \cap T \to X$ και $\tau : X^{\text{odd}} \cap T \to X$ για τον Παίκτη I και την Παίκτρια II αντίστοιχα, συμβολίζουμε όπως και πριν με $\sigma * \tau$ τον μοναδικό γύρο $\overline{a}$, στον οποίο ο Παίκτης I ακολουθεί τη σ και η Παίκτρια II ακολουθεί την τ. Επειδή οι στρατηγικές παράγουν νόμιμες κινήσεις, έχουμε $\sigma * \tau \in [T]$.

(viii) Μια στρατηγική σ για τον Παίκτη I στο $G_X(T, A)$ καλείται **νικητήρια για αυτόν στο** $G_X(T, A)$ αν για κάθε στρατηγική τ για την Παίκτρια II στο $G_X(T, A)$ έχουμε $\sigma * \tau \in A$. Ισοδύναμα η σ είναι νικητήρια στρατηγική για τον Παίκτη I στο $G_X(T, A)$ αν για κάθε γύρο $\overline{a}$ στο $G_X(T, A)$, στον οποίο ο Παίκτης I ακολουθεί τη σ, έχουμε $\overline{a} \in [T]$.

Ομοίως μια στρατηγική τ για την Παίκτρια II στο $G_X(T, A)$ καλείται **νικητήρια για αυτήν στο** $G_X(T, A)$ αν για κάθε στρατηγική σ για τον Παίκτη I στο $G_X(T, A)$ έχουμε $\sigma * \tau \notin A$. Ισοδύναμα η τ είναι νικητήρια στρατηγική για την Παίκτρια II στο $G_X(T, A)$ αν για κάθε γύρο $\overline{a}$ στο $G_X(T, A)$, στον οποίο η Παίκτρια II ακολουθεί την τ, έχουμε $\overline{a} \notin [T]$.

(ix) Λέμε ότι **ο Παίκτης I κερδίζει το παίγνιο** $G_X(T, A)$ αν έχει νικητήρια στρατηγική σε αυτό το παίγνιο και όμοια **η Παίκτρια II κερδίζει το παίγνιο** $G_X(T, A)$ αν έχει νικητήρια στρατηγική στο τελευταίο.

(x) Το παίγνιο $G_X(T, A)$ καλείται **προσδιοριστό** αν ένα άτομο από τους δύο παίκτες έχει νικητήρια στρατηγική.

Είναι σαφές ότι κάθε παίγνιο $G_X(A)$ είναι στην ουσία ένα παίγνιο $G_X(T, A)$ όπου $T = X^{<\mathbb{N}}$. Τα πιο πάνω αποτελέσματα των Martin και Gale-Stewart (Θεωρήματα theorem Martin Borel determinacy και 7.1.8) ισχύουν και σε παίγνια σε δένδρα.

Θεώρημα 7.1.10 (Borel προσδιοριστότητας, Martin). *Για κάθε μη κενό σύνολο X, κάθε κλαδεμένο δένδρο T στο X και κάθε Borel $A \subseteq X^{\mathbb{N}}$ με $A \subseteq [T]$, το παίγνιο $G_X(T, A)$ είναι προσδιοριστό.*

Απόδειξη. Παραλείπουμε την απόδειξη, αναφέρουμε όμως ότι αυτό το αποτέλεσμα είναι άμεση συνέπεια της Borel προσδιοριστότητας σε παίγνια χωρίς κανόνες (Θεώρημα 7.1.5, βλ. Άσκηση 7.1.15). ▫

Θεώρημα 7.1.11 (Gale-Stewart). *Για κάθε μη κενό σύνολο X, κάθε κλαδεμένο δένδρο T στο X και κάθε κλειστό $F \subseteq X^{\mathbb{N}}$ με $F \subseteq [T]$, το παίγνιο $G_X(T, F)$ είναι προσδιοριστό.*

Απόδειξη. Όπως η απόδειξη του Θεωρήματος 7.1.8. Ισχύει το αποτέλεσμα που είναι ανάλογο με το (iv) του Λήμματος 7.1.7 και μάλιστα με ουσιαστικά την ίδια απόδειξη. Σε κάποιο σημείο πρέπει να δειχθεί πως αν έχουμε έναν γύρο $f = (b_0, b_1, \dots) \in [T]$ και πως αν για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$F \cap \{(f|(2n-1)) * g \mid g \in [T]\} = \varnothing$$

τότε η Παίκτρια II κερδίζει το παίγνιο $G_X(T, F_{(f|(2n-1))*})$. Γι' αυτό γίνεται ουσιαστική χρήση του ότι το δένδρο T είναι κλαδεμένο, καθώς τότε η Παίκτρια II μπορεί να συνεχίζει να παίζει παραμένοντας στο T. ▫

Ασκήσεις

Άσκηση 7.1.12. Για κάθε μη κενό σύνολο X και κάθε $B \subseteq X^{\mathbb{N}}$ ορίζουμε το σύνολο

$$A_B = \{(x) * f \mid x \in X \text{ και } f \in B\}.$$

Δείξτε τις εξής συνεπαγωγές.

$$\text{Ο Παίκτης I κερδίζει το } G_X(A_B) \implies \text{η Παίκτρια II κερδίζει το } G_X(X \setminus B).$$
$$\text{Η Παίκτρια II κερδίζει το } G_X(A_B) \implies \text{ο Παίκτης I κερδίζει το } G_X(X \setminus B).$$

Συμπεράνετε ότι αν η Γ είναι κλάση συνόλων σε μετρικούς χώρους, η οποία είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση, και αν κάθε σύνολο $A \in \Gamma(X^{\mathbb{N}})$ είναι προσδιοριστό, τότε κάθε $B \in (\mathrm{c}\Gamma)(X^{\mathbb{N}})$ είναι προσδιοριστό, όπου το X είναι μη κενό σύνολο.

Άσκηση 7.1.13. Για κάθε μη κενό σύνολο X και κάθε $A \subseteq X^{\mathbb{N}}$ αν ο Παίκτης I δεν κερδίζει το παίγνιο $G_X(A)$, τότε για κάθε $a \in A$ υπάρχει $b \in X$, έτσι ώστε ο Παίκτης I δεν κερδίζει το παίγνιο $G_X(A_{(a,b)*})$.

Ομοίως για κάθε μη κενό σύνολο X και κάθε $B \subseteq X^{\mathbb{N}}$ αν η Παίκτρια II δεν κερδίζει το παίγνιο $G_X(B)$, τότε υπάρχει $a \in A$, έτσι ώστε για κάθε $b \in X$ η Παίκτρια II δεν κερδίζει το παίγνιο $G_X(B_{(a,b)*})$.

Τα παίγνια με κανόνες μπορούν να αναχθούν εύκολα στα συνήθη παίγνια. Η ιδέα είναι το πρώτο από τα δύο άτομα που παραβαίνει τους κανόνες (εφόσον αυτό συμβεί) να χάνει αυτόματα ανεξαρτήτως των επόμενων κινήσεων.

$$
G^*_{un}(F) \quad \left|\begin{array}{lllll} \mathrm{I} & (V_{s^0_0}, V_{s^1_0}, a_0) & & (V_{s^0_1}, V_{s^1_1}, a_1) & \\ & & & & \cdots \\ \mathrm{II} & & i_0 & & i_1 \end{array}\right.
$$

Διαγραμμα 6. Ο γύρος $\sigma * \tau$.

Άσκηση 7.1.14. Για κάθε μη κενό σύνολο X, κάθε κλαδεμένο δένδρο T στο X και κάθε $A \subseteq X^{\mathbb{N}}$ θέτουμε

$$A_T = \{\overline{a} \in X^{\mathbb{N}} \mid \exists n \ (\ \overline{a}|2n \notin T \ \& \ \forall k < 2n \ \overline{a}|k \in T \ ) \ \vee \ (\ \overline{a} \in [T] \ \& \ \overline{a} \in A \ )\}.$$

Τότε ο Παίκτης I κερδίζει το παίγνιο $G_X(T, A)$ αν και μόνο αν ο Παίκτης I κερδίζει το παίγνιο $G_X(A_T)$. Ομοίως η Παίκτρια II κερδίζει το παίγνιο $G_X(T, A)$ αν και μόνο αν η Παίκτρια II κερδίζει το παίγνιο $G_X(A_T)$.

Άσκηση 7.1.15. Εξηγείστε πώς μπορούμε να συμπεράνουμε το Θεώρημα Borel προσδιοριστότητας με κανόνες (Θεώρημα 7.1.10) από το φαινομενικά απλούστερο Θεώρημα Borel προσδιοριστότητας (Θεώρημα 7.1.5).

7.2. Προσδιοριστότητα και Τέλεια Σύνολα

Εδώ θα ασχοληθούμε με μια ειδική κατηγορία παιγνίων με κανόνες η οποία μας επιτρέπει να εξάγουμε συμπεράσματα σχετικά με την Υπόθεση του Συνεχούς.

Ορισμός 7.2.1 (Το ξεδιπλωμένο *-παίγνιο - [**8**]-21.B). Θεωρούμε έναν τέλειο Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$, μια συμβατή μετρική d στον $\mathcal{X}$, μια αριθμήσιμη βάση $\mathcal{V} = \{V_s \mid s \in \mathbb{N}\}$ του $\mathcal{X}$ και ένα κλειστό $F \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$. Θα ορίσουμε ένα παίγνιο στο $\mathbb{N}$ με κανόνες, το οποίο ονομάζουμε **ξεδιπλωμένο *-παίγνιο** (unfolded *-game) και θα το συμβολίζουμε με $G^*_{un}(\mathcal{X}, d, \mathcal{V}, F)$ ή πιο απλά με $G^*_{un}(F)$. Πριν δώσουμε τον αυστηρό ορισμό είναι χρήσιμο να περιγράψουμε την ιδέα πίσω από αυτό.

Ο Παίκτης I παίζει δύο μη κενά βασικά ανοικτά σύνολα (V_{s^0}, V_{s^1}), καθώς και έναν φυσικό αριθμό a. Η Παίκτρια II παίζει έναν αριθμό $i \in \{0, 1\}$ (βλ. Διάγραμμα 6).

Ένας γύρος $(V_{s^0_n}, V_{s^1_n}, a_n, i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο παίγνιο πρέπει επιπλέον να ικανοποιεί τους εξής κανόνες: α) κάθε $V_{s^p_n}$, $p = 0, 1$, να είναι μη κενό και έχει d-διάμετρο $< 2^{-n}$, β) η κλειστότητα της ένωσης $V_{s^0_{n+1}} \cup V_{s^1_{n+1}}$ να περιέχεται στο $V_{s^{i_n}_n}$, και γ) οι κλειστότητες των $V_{s^0_n}$, $V_{s^1_n}$ να αποτελούν ξένα σύνολα.

Η ιδέα για τους κανόνες είναι ότι ο Παίκτης I παίζει αρχικά δύο μη κενά βασικά σύνολα με ξένες κλειστότητες, καθώς και έναν φυσικό αριθμό. Μετά η Παίκτρια II επιλέγει ένα από αυτά τα σύνολα (παίζει 0 για το ένα και 1 για το άλλο). Τότε ο Παίκτης I πρέπει να παίξει δύο μη κενά βασικά σύνολα, των οποίων οι κλειστότητες να είναι ξένες και να είναι υποσύνολα του συνόλου που επέλεξε η Παίκτρια II στην προηγούμενη κίνηση, καθώς και έναν ακόμα φυσικό αριθμό. Επιπλέον η διάμετρος των βασικών συνόλων πρέπει να γίνεται ολοένα και πιο μικρή.

Από έναν γύρο $(V_{s^0_n}, V_{s^1_n}, a_n, i_n)_{n\in\mathbb{N}}$, όπως πιο πάνω, παίρνουμε την ακολουθία κλειστών συνόλων $(\overline{V_{s^{i_n}_n}})_{n\in\mathbb{N}}$, η οποία είναι φθίνουσα και η ακολουθία των διαμέτρων συγκλίνει στο 0, καθώς και μια ακολουθία $\alpha = (a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots) \in \mathcal{N}$. Θεωρούμε το μοναδικό στοιχείο της τομής $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{V_{s^{i_n}_n}}$ και το συμβολίζουμε προσωρινά με x. Θα λέμε ότι ο Παίκτης I κερδίζει τον γύρο αν $(x, \alpha) \in F$, όπου F είναι το κλειστό σύνολο που έχουμε πιο πάνω. Με άλλα λόγια, ο Παίκτης Ι προσπαθεί να δημιουργήσει ένα στοιχείο (x, α) του F, ενώ η Παίκτρια ΙΙ κατευθύνει τον Παίκτη Ι στην επιλογή του x (προσπαθώντας να πετύχει $(x, \alpha) \notin F$).

Αυστηρά θα πρέπει να ορίσουμε ένα κλαδεμένο δένδρο T που περιγράφει τους πιο πάνω κανόνες, καθώς και το σύνολο απόδοσης A^F. (Όπως θα δούμε πιο κάτω, το δένδρο T είναι ανεξάρτητο του F.)

Ορισμός του δένδρου T. Αρχικά θεωρούμε όλες τις πεπερασμένες ακολουθίες $u = (j_0, i_0, j_{n-1}, i_{n-1})$, οι οποίες ικανοποιούν τα εξής για κάθε $k < n$:

(i) το j_k είναι ο κωδικός μιας πεπερασμένης ακολουθίας φυσικών αριθμών μήκους 3, θα συμβολίζουμε την τελευταία με (s_k^0, s_k^1, a_k),

(ii) $V_{s_k^p} \neq \emptyset$, για $p = 0, 1$,

(iii) d-διάμετρος$(V_{s_k^p}) < 2^{-k}$, για $p = 0, 1$,

(iv) $\overline{V_{s_k^0} \cup V_{s_k^1}} \subseteq V_{s_{k-1}^{i_{k-1}}}$, (όταν $1 \leqslant k < n$),

(v) $\overline{V_{s_k^0}} \cap \overline{V_{s_k^1}} = \emptyset$,

(vi) $i_k \in \{0, 1\}$.

Το T είναι το δένδρο που παράγεται από όλες αυτές τις ακολουθίες, δηλαδή το T αποτελείται ακριβώς από τα αρχικά τμήματα των πιο πάνω u (βλ. την Άσκηση 2.5.20 για τον ορισμό). Το T είναι κλαδεμένο: η Παίκτρια ΙΙ ακολουθεί εύκολα τους κανόνες, αρκεί να επιλέξει έναν φυσικό $i \in \{0, 1\}$, ενώ ο Παίκτης Ι μπορεί πάντα να βρει ένα κατάλληλο ζεύγος βασικών συνόλων επειδή ο χώρος $\mathcal{X}$ είναι τέλειος.

Ορισμός του συνόλου απόδοσης A^F. Το σύνολο $A^F \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ αποτελείται από όλα τα

$$\gamma = (\langle s_0^0, s_0^1, a_0 \rangle, i_0, \dots, \langle s_n^0, s_n^1, a_n \rangle, i_n, \dots) \in [T]$$

για τα οποία ισχύει $(x_\gamma, \alpha_\gamma) \in F$, όπου x_γ είναι το μοναδικό στοιχείο της τομής $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{V_{s_n^{i_n}}}$ και $\alpha_\gamma = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Το **ξεδιπλωμένο** $*$**-παίγνιο** είναι το παίγνιο με κανόνες $G_{\mathbb{N}}(T, A^F)$ όπου T και A^F είναι όπως πιο πάνω. Όπως αναφέραμε, θα συμβολίζουμε το $G_{\mathbb{N}}(T, A^F)$ με $G^*_{un}(\mathcal{X}, d, \mathcal{V}, F)$ ή πιο απλά με $G^*_{un}(F)$.

Θεώρημα 7.2.2 ([**8**] - 21.2). *Θεωρούμε έναν τέλειο Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$, μια συμβατή μετρική d στον $\mathcal{X}$, μια αριθμήσιμη βάση $\mathcal{V} = \{V_s \mid s \in \mathbb{N}\}$ της τοπολογίας του $\mathcal{X}$ και ένα κλειστό $F \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$. Τότε ισχύουν τα εξής.*

(i) *Αν ο Παίκτης Ι κερδίζει το παίγνιο $G^*_{un}(F)$, τότε υπάρχει συνεχής μονομορφισμός $f : 2^{\mathbb{N}} \rightarrowtail \mathcal{X}$ με $f[2^{\mathbb{N}}] \subseteq \exists^{\mathcal{N}} F$, δηλαδή το $\exists^{\mathcal{N}} F \subseteq \mathcal{X}$ περιέχει ένα μη κενό τέλειο υποσύνολο.*

(ii) *Αν η Παίκτρια ΙΙ κερδίζει το παίγνιο $G^*_{un}(F)$, τότε το σύνολο $\exists^{\mathcal{N}} F$ είναι αριθμήσιμο.*

Απόδειξη. (i) Υποθέτουμε ότι ο Παίκτης Ι έχει μια νικητήρια στρατηγική σ στο παίγνιο $G^*_{un}(F)$. Για κάθε $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$ συμβολίζουμε με τ_α τη στρατηγική της Παίκτριας ΙΙ κατά την οποία παίζει διαδοχικά $\alpha(0), \alpha(1), \dots$ – προφανώς αυτές είναι νόμιμες κινήσεις στο παίγνιο $G^*_{un}(F)$. Ο γύρος $\sigma * \tau_\alpha$ έχει λοιπόν στις περιττές θέσεις τα $\alpha(0)$, $\alpha(1), \dots$ και στις περιττές θέσεις φυσικούς αριθμούς της μορφής $\langle s^0, s^1, a \rangle$. Αν έχουμε $\alpha, \beta \in 2^{\mathbb{N}}$ και $n \in \mathbb{N}$ με $\alpha | n = \beta | n$, τότε οι πρώτες $n+1$ κινήσεις του Παίκτη Ι στους γύρους $\sigma * \tau_\alpha$ και $\sigma * \tau_\beta$ θα είναι οι ίδιες καθώς αυτές εξαρτώνται μόνο από τις πρώτες k κινήσεις της Παίκτριας ΙΙ για $k < n$ (και από τη σ). Με άλλα λόγια, υπάρχουν συναρτήσεις

$$\widehat{s}^0, \widehat{s}^1, \widehat{a} : \{0,1\}^{<\mathbb{N}} \to \mathbb{N} : \widehat{s}^0(u) \equiv s_u^0, \widehat{s}^1(u) \equiv s_u^1, \widehat{a}(u) \equiv a_u$$

έτσι που για κάθε $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$ ισχύει

$$\sigma * \tau_\alpha = (\langle s^0_\Lambda, s^1_\Lambda, a_\Lambda\rangle, \alpha(0), \langle s^0_{(\alpha(0))}, s^1_{(\alpha(0))}, a_{(\alpha(0))}\rangle, \alpha(1)\dots,$$
$$\langle s^0_{(\alpha(0),\dots,\alpha(n-1))}, s^1_{(\alpha(0),\dots,\alpha(n-1))}, a_{(\alpha(0),\dots,\alpha(n-1))}\rangle, \alpha(n), \dots).$$

Για κάθε $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$, επειδή ο Παίκτης I ακολουθεί τους κανόνες στον γύρο $\sigma * \tau_\alpha$ είναι σαφές ότι η $(\overline{V_{s^{\alpha(n)}_{\alpha|n}}})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια φθίνουσα ακολουθία μη κενών κλειστών συνόλων των οποίων η διάμετρος συγκλίνει στο 0. Ορίζουμε

$$f : 2^{\mathbb{N}} \to \mathcal{X} : f(\alpha) = \text{το μοναδικό στοιχείο της τομής } \textstyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{V_{s^{\alpha(n)}_{\alpha|n}}}$$

και

$$g : 2^{\mathbb{N}} \to \mathcal{N} : g(\alpha) = (a_\Lambda, a_{(\alpha(0))}, \dots, a_{\alpha|n}, \dots).$$

Αφού η σ είναι νικητήρια στρατηγική για τον Παίκτη I, έχουμε $(f(\alpha), g(\alpha)) \in F$ και ειδικότερα $f(\alpha) \in \exists^{\mathcal{N}} F$ για κάθε $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$.

Μένει να δείξουμε ότι η f είναι συνεχής μονομορφισμός. Αν έχουμε $\alpha, \beta \in 2^{\mathbb{N}}$ και $n \in \mathbb{N}$ με $\alpha|n = \beta|n$ και $\alpha(n) \neq \beta(n)$, τότε για κάθε $k < n$

$$s^0_{\alpha|k} = s^0_{\beta|k}, \quad s^1_{\alpha|k} = s^1_{\beta|k}, \quad a_{\alpha|k} = a_{\beta|k}.$$

Ειδικότερα ισχύει $s^{\alpha(k)}_{\alpha|k} = s^{\beta(k)}_{\beta|k}$ για κάθε $k < n$. Αφού $f(\alpha) \in \overline{V_{s^{\alpha(n-1)}_{\alpha|(n-1)}}}$ και $f(\beta) \in \overline{V_{s^{\beta(n-1)}_{\beta|(n-1)}}} = \overline{V_{s^{\alpha(n-1)}_{\alpha|(n-1)}}}$ έχουμε

$$d(f(\alpha), f(\beta)) \leqslant d-\text{διάμετρος}(\overline{V_{s^{\alpha(n-1)}_{\alpha|(n-1)}}}) < 2^{n-1}$$

όπου στην τελευταία ανίσωση χρησιμοποιήσαμε τους κανόνες του παιγνίου. Αυτό εξασφαλίζει ότι η f είναι συνεχής. Επιπλέον για α, β, n, όπως προηγουμένως, έχουμε

$$f(\alpha) \in \overline{V_{s^{\alpha(n)}_{\alpha|(n)}}} \quad \text{και} \quad f(\beta) \in \overline{V_{s^{\beta(n)}_{\beta|(n)}}}$$

και πάλι από τους κανόνες του παιγνίου εφόσον $\alpha(n) \neq \beta(n)$ ισχύει $\overline{V_{s^{\alpha(n)}_{\alpha|(n)}}} \cap \overline{V_{s^{\beta(n)}_{\beta|(n)}}} = \varnothing$. Επομένως $f(\alpha) \neq f(\beta)$ και η f είναι μονομορφισμός.

(ii) Θεωρούμε μια νικητήρια στρατηγική τ για την Παίκτρια II στο παίγνιο $G^*_{un}(F)$. Συμβολίζουμε με T το δένδρο των κανόνων του τελευταίου παιγνίου σύμφωνα με τον Ορισμό 7.2.1. Εφαρμόζουμε το Βασικό Λήμμα Αναπαράστασης κλειστών συνόλων (Λήμμα 2.5.14) στο $F \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ και παίρνουμε ένα κλειστό σύνολο $S \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ έτσι ώστε για κάθε $x \in \mathcal{X}$ το σύνολο $S(x) = \{u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \mid (x, u) \in S\}$ να είναι δένδρο και $F_x = [S(x)]$.

Για κάθε $x \in \mathcal{X}$ θα λέμε ότι μια πεπερασμένη ακολουθία

$$u = (\langle s^0_0, s^1_0, a_0\rangle, i_0, \dots, \langle s^0_{n-1}, s^1_{n-1}, a_{n-1}\rangle, i_{n-1}) \in T$$

είναι *καλή ως προς* x αν: α) $i_k = \tau(\langle s^0_0, s^1_0\rangle, i_0, \dots, \langle s^0_{k-1}, s^1_{k-1}\rangle)$ για κάθε $k < n$, δηλαδή το i_k είναι η απάντηση της Παίκτριας II σύμφωνα με την τ δεδομένων των προηγούμενων κινήσεων, β) ισχύει $[S(x)_{(a_0,\dots,a_{n-1})}] \neq \varnothing$ και γ) $x \in V_{s^{i_{n-1}}_{n-1}}$. Όταν $n = 0$, εννοούμε ότι οι α) και γ) ισχύουν τετριμμένα ενώ η β) σημαίνει ότι $[S(x)] \neq \varnothing$. Ειδικότερα η κενή ακολουθία είναι καλή ως προς x για κάθε $x \in \exists^{\mathcal{N}} F$ καθώς τότε θα έχουμε $\varnothing \neq F_x = [S(x)]$.

Ισχυριζόμαστε ότι για κάθε $x \in \exists^{\mathcal{N}} F$ υπάρχει $\sqsubseteq$-μεγιστική πεπερασμένη ακολουθία $u \in T$ άρτιου μήκους που είναι καλή ως προς x. Πράγματι, αν δεν συνέβαινε αυτό, δεδομένου ότι $x \in \exists^{\mathcal{N}} F$, και συνεπώς η κενή ακολουθία είναι καλή ως προς x, θα βρίσκαμε ένα

$$\gamma = (\langle s^0_0, s^1_0, a_0\rangle, i_0, \dots, \langle s^0_n, s^1_n, a_n\rangle, i_n, \dots) \in [T]$$

έτσι ώστε η $\gamma|(2n)$ να είναι καλή ως προς x για άπειρα (και συνεπώς για όλα τα) $n \in \mathbb{N}$. Τότε όμως $x \in V_{s_n^{i_n}}$ για κάθε n. Επομένως το x είναι το μοναδικό στοιχείο της τομής $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{V_{s_n^{i_n}}}$. Επιπλέον από την ιδιότητα β) της καλής ως προς x ακολουθίας έχουμε ότι $[S(x)_{(a_0,\ldots,a_n)}] \neq \varnothing$ και ειδικότερα $(a_0,\ldots,a_n) \in S(x)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα $(a_0,\ldots,a_n,\ldots) \in [S(x)] = F_x$ και άρα $(x,(a_0,\ldots,a_n,\ldots)) \in F$. Αυτό όμως σημαίνει ότι ο Παίκτης Ι κερδίζει τον γύρο γ. Από την άλλη, η Παίκτρια ΙΙ ακολουθεί τη στρατηγική τ στον γύρο γ και η τ είναι νικητήρια στρατηγική της Παίκτριας ΙΙ στο παίγνιο $G^*_{un}(F)$. Επομένως θα έπρεπε να είχαμε $(x,(a_0,\ldots,a_n,\ldots)) \notin F$, πράγμα που είναι άτοπο.

Στη συνέχεια για κάθε $u = (\langle s_0^0, s_0^1, a_0\rangle, i_0, \ldots, \langle s_{n-1}^0, s_{n-1}^1, a_{n-1}\rangle, i_{n-1}) \in T$ ορίζουμε το σύνολο $A_u \subseteq \mathcal{X}$ ως εξής,

$$\begin{aligned} x \in A_u \iff x \in V_{s_{n-1}^{i_{n-1}}} \ \& \ &[S(x)_{(a_0,\ldots,a_{n-1})}] \neq \varnothing \\ &\text{και για κάθε } \langle s_n^0, s_n^1, a_n\rangle \text{ που είναι νόμιμη κίνηση ως προς } u \\ &\text{αν } [S(x)_{(a_0,\ldots,a_{n-1},a_n)}] \neq \varnothing \text{ τότε } x \notin V_{s_n^{i_n}} \\ &\text{όπου } i_n = \tau(u * (\langle s_n^0, s_n^1, a_n\rangle)). \end{aligned}$$

Αν έχουμε $x \in \exists^{\mathcal{N}} F$ και πάρουμε $u = (\langle s_0^0, s_0^1, a_0\rangle, i_0, \ldots, \langle s_{n-1}^0, s_{n-1}^1, a_{n-1}\rangle, i_{n-1}) \in T$, που είναι $\sqsubseteq$-μεγιστική καλή ως προς x, τότε θα έχουμε $x \in A_u$. Σε διαφορετική περίπτωση, δεδομένου ότι η u είναι καλή ως προς x, θα υπήρχε $\langle s_n^0, s_n^1, a_n\rangle$ που είναι νόμιμη κίνηση ως προς u έτσι ώστε $[S(x)_{(a_0,\ldots,a_{n-1},a_n)}] \neq \varnothing$ και $x \notin V_{s_n^{i_n}}$ όπου $i_n = \tau(u * (\langle s_n^0, s_n^1, a_n\rangle))$. Αλλά τότε η $u * (\langle s_n^0, s_n^1, a_n\rangle, i_n)$ θα ήταν γνήσια επέκταση της u που και καλή ως προς x, που είναι άτοπο. Επομένως $x \in A_u$. Προκύπτει ότι

$$\exists^{\mathcal{N}} F \subseteq \bigcup_{u\in T\cap\mathbb{N}^{\mathrm{even}}} A_u.$$

Τέλος ισχυριζόμαστε ότι για κάθε $u \in T$ άρτιου μήκους το σύνολο A_u είναι το πολύ μονοσύνολο. Υποθέτουμε προς άτοπο ότι υπάρχουν $x_0, x_1 \in A_u$ με $x_0 \neq x_1$ και γράφουμε $u = (\langle s_0^0, s_0^1, a_0\rangle, i_0, \ldots, \langle s_{n-1}^0, s_{n-1}^1, a_{n-1}\rangle, i_{n-1})$. Τότε $x_0, x_1 \in V_{s_{n-1}^{i_{n-1}}}$ και $[S(x)_{(a_0,\ldots,a_{n-1})}] \neq \varnothing$. Βρίσκουμε βασικά ανοικτά $V_{s_n^0}$, $V_{s_n^1}$ με ξένες κλειστότητες, η ένωση των οποίων περιέχεται στο $V_{s_{n-1}^{i_{n-1}}}$ και με $(x_0, x_1) \in V_{s_n^0} \times V_{s_n^1}$. (Αν $n = 0$ τότε παραλείπουμε τις συνθήκες που αφορούν το $V_{s_{n-1}^{i_{n-1}}}$.) Εφόσον το A_u είναι μη κενό, έχουμε ειδικότερα ότι $[S(x)_{(a_0,\ldots,a_{n-1})}] \neq \varnothing$, επομένως υπάρχει $a_n \in \mathbb{N}$ με $[S(x)_{(a_0,\ldots,a_{n-1},a_n)}] \neq \varnothing$. Είναι σαφές ότι η $\langle s_n^0, s_n^1, a_n\rangle$ είναι νόμιμη κίνηση ως προς u. Επιπλέον, αν θέσουμε $i_n = \tau(u * \langle s_n^0, s_n^1, a_n\rangle)$ αφού $[S(x)_{(a_0,\ldots,a_{n-1},a_n)}] \neq \varnothing$, προκύπτει από τον ορισμό του A_u ότι $x_0, x_1 \notin V_{s_n^{i_n}}$. Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί ένα από τα x_0, x_1 ανήκει στο $V_{s_n^{i_n}}$ και συγκεκριμένα έχουμε $x_{i_n} \in V_{s_n^{i_n}}$.

Καταλήγουμε ότι το $\exists^{\mathcal{N}} F \subseteq \bigcup_{u\in T\cap\mathbb{N}^{\mathrm{even}}} A_u$ περιέχεται σε μια αριθμήσιμη ένωση συνόλων που περιέχουν το πολύ ένα στοιχείο. Συνεπώς, το $\exists^{\mathcal{N}} F$ είναι αριθμήσιμο σύνολο. ▫

Πόρισμα 7.2.3 (Προσδιοριστότητα και Υπόθεση του Συνεχούς). *Θεωρούμε $n \geqslant 1$. Αν για κάθε $B \in \utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^1_n(\mathcal{N})$ το παίγνιο $G_{\mathbb{N}}(B)$ είναι προσδιοριστό, τότε για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και κάθε $P \in \utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^1_{n+1}(\mathcal{X})$ είτε το P είναι αριθμήσιμο, είτε υπάρχει συνεχής μονορφισμός $f : 2^{\mathbb{N}} \rightarrowtail \mathcal{X}$ με $f[2^{\mathbb{N}}] \subseteq P$. Επομένως το P ικανοποιεί την Υπόθεση του Συνεχούς.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι για κάθε $B \in \utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^1_n(\mathcal{N})$ το παίγνιο $G_{\mathbb{N}}(B)$ είναι προσδιοριστό και παίρνουμε $P \in \utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^1_{n+1}(\mathcal{X})$, όπου $\mathcal{X}$ είναι Πολωνικός χώρος. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο $\mathcal{X}$ είναι τέλειος: αλλιώς θεωρούμε τον τέλειο πυρήνα $\mathcal{X}_p$ του $\mathcal{X}$ και αντικαθιστούμε το P με το $\mathcal{X}_p \cap P$, το οποίο ανήκει επίσης στην $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_{n+1}(\mathcal{X})$ και άρα και στην $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_{n+1}(\mathcal{X}_p)$ (Άσκηση 3.4.15). Αν το $\mathcal{X}_p \cap P$ είναι αριθμήσιμο, τότε και το P είναι αριθμήσιμο καθώς το σύνολο $\mathcal{X} \setminus \mathcal{X}_p$ είναι αριθμήσιμο. Αν το $\mathcal{X}_p \cap P$ περιέχει ένα μη κενό τέλειο σύνολο, τότε και το P περιέχει το ίδιο σύνολο.

Στη συνέχεια θεωρούμε ότι ο $\mathcal{X}$ είναι τέλειος. Εφόσον το P είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_{n+1}$ υποσύνολο του $\mathcal{X}$, υπάρχει ένα $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n$ σύνολο $F \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ με $P = \exists^{\mathcal{N}} F$. Θεωρούμε το παίγνιο $G^*_{un}(F)$, δηλαδή το παίγνιο με κανόνες $G_{\mathbb{N}}(T, A^F)$, όπου τα T και A^F είναι όπως στον Ορισμό 7.2.1. Χρησιμοποιούμε έναν ακόμα συμβολισμό από τον τελευταίο: δοσμένου $\gamma = (\langle s^0_0, s^1_0, a_0\rangle, i_0, \dots, \langle s^0_n, s^1_n, a_n\rangle, i_n, \dots) \in [T]$ συμβολίζουμε με x_γ το μοναδικό στοιχείο της τομής $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{V_{s^{i_n}_n}}$ και με α_γ την ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Προκύπτει άμεσα ότι οι συναρτήσεις

$$\gamma \in [T] \mapsto x_\gamma \in \mathcal{X}, \quad \gamma \in [T] \mapsto \alpha_\gamma \in \mathcal{N}$$

είναι συνεχείς, επομένως και η συνάρτηση $g : [T] \to \mathcal{X} \times \mathcal{N} : g(\gamma) = (x_\gamma, \alpha_\gamma)$ είναι συνεχής. Ισχύει $A^F = g^{-1}[F]$, επομένως το A είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n$ υποσύνολο του $[T]$, και άρα $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n$ υποσύνολο του $\mathcal{N}$.

Σύμφωνα με την Άσκηση 7.1.14 το παίγνιο με κανόνες $G_{\mathbb{N}}(T, A^F)$ προσομοιώνεται από το παίγνιο $G_{\mathbb{N}}(B)$, όπου

$$B = \{\gamma \in \mathcal{N} \mid \exists n\ (\gamma|(2n) \notin T \ \&\ \forall k < 2n\ \gamma|k \in T) \ \vee\ (\gamma \in [T] \ \&\ \gamma \in A^F)\},$$

όπου με τον όρο «προσομοίωση» εννοούμε ότι ένα άτομο από τους δύο παίκτες έχει νικητήρια στρατηγική στο ένα παίγνιο αν και μόνο αν έχει νικητήρια στρατηγική στο άλλο.

Είναι άμεσο ότι το πιο πάνω σύνολο B είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n$ υποσύνολο του $\mathcal{N}$. Από την υπόθεσή μας κάθε $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ υποσύνολο του $\mathcal{N}$ είναι προσδιοριστό, άρα από την Άσκηση 7.1.12 κάθε $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n$ υποσύνολο του $\mathcal{N}$ είναι προσδιοριστό. Ειδικότερα ένα άτομο από τους δύο παίκτες έχει νικητήρια στρατηγική στο $G_{\mathbb{N}}(B)$ και σύμφωνα με τα πιο πάνω συμβαίνει το ίδιο στο παίγνιο με κανόνες $G_{\mathbb{N}}(T, A^F)$.

Αν ο Παίκτης Ι έχει νικητήρια στρατηγική στο $G_{\mathbb{N}}(T, A) = G^*_{un}(F)$ από το Θεώρημα 7.2.2, υπάρχει συνεχής μονομορφισμός $f : 2^{\mathbb{N}} \rightarrowtail \mathcal{X}$ με $f[2^{\mathbb{N}}] \subseteq \exists^{\mathcal{N}} F = P$. Αν η Παίκτρια ΙΙ έχει νικητήρια στρατηγική στο $G_{\mathbb{N}}(T, A) = G^*_{un}(F)$ πάλι από το Θεώρημα 7.2.2, το σύνολο $\exists^{\mathcal{N}} F = P$ είναι αριθμήσιμο. $\square$

Χρησιμοποιώντας την ίδιο μέθοδο με πιο πάνω μπορεί κανείς να δώσει μία ακόμα απόδειξη του Θεωρήματος Τέλειου Συνόλου (Θεώρημα 5.3.6), (βλ.την Άσκηση 7.2.4). Επομένως *μπορούμε να αποδείξουμε μια δομική ιδιότητα της* $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_1$, συγκεκριμένα την ιδιότητα του Τέλειου Συνόλου, *εφαρμόζοντας ένα αποτέλεσμα για τις κλάσεις* $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ *που στηρίζεται σε υποθέσεις προσδιοριστότητας*. Μάλιστα για την περίπτωση της $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_1$ χρειαζόμαστε μόνο την προσδιοριστότητα των κλειστών συνόλων, το οποίο είναι θεώρημα.

Το φαινόμενο επαλήθευσης δομικών ιδιοτήτων της κλάσης $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_1$ από αποτελέσματα για τις κλάσεις $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ που στηρίζονται σε υποθέσεις προσδιοριστότητας (όχι απαραίτητα συνόλων που ανήκουν σε απλούστερες κλάσεις) επαναλαμβάνεται και σε άλλες δομικές ιδιότητες της $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_1$, όπως για παράδειγμα η μετρησιμότητα ως προς σ-πεπερασμένο μέτρο ή η ιδιότητα του Baire. Αυτό μας οδηγεί να υποθέσουμε ότι η προσδιοριστότητα των συνόλων στις κλάσεις $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ είναι ένα «φυσιολογικό» αξίωμα για να υποθέσουμε. Χάρη σε μια βαθιά δουλειά των Martin-Steel [**29**] αυτό το αξίωμα προκύπτει από την υπόθεση ύπαρξης αρκετά μεγάλων πληθαρίθμων.

Ασκήσεις

Άσκηση 7.2.4. Το Θεώρημα Τέλειου Συνόλου (Θεώρημα 5.3.6: κάθε υπεραριθμήσιμο αναλυτικό υποσύνολο ενός Πολωνικού χώρου περιέχει ένα μη κενό τέλειο υποσύνολο) προκύπτει ως εφαρμογή του Θεωρήματος 7.2.2.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

Μερικές Σύγχρονες Εφαρμογές

Σύνοψη:
- Η Διχοτομία των Kechris-Solecki-Todorcevic.

Προαπαιτούμενη γνώση:
- Στοιχεία από το Κεφάλαιο 2 με έμφαση στις πεπερασμένες ακολουθίες.
- Αναλυτικά σύνολα σε Πολωνικούς χώρους.
- Έννοιες συναφείς με το Θεώρημα Κατηγορίας του Baire.
- Το Θεώρημα Τέλειου Συνόλου και τα Θεωρήματα Borel ενοποίησης από το Κεφάλαιο 6.

Μια σύγχρονη κατεύθυνση της περιγραφικής θεωρίας συνόλων είναι η σύνδεση με τη θεωρία γραφημάτων.

8.1. Η Διχοτομία των Kechris-Solecki-Todorcevic

Τα διχοτομικά αποτελέσματα είναι κεντρικά στην περιγραφική θεωρία συνόλων. Για παράδειγμα, το Θεώρημα Τέλειου Συνόλου είναι ένα τέτοιο αποτέλεσμα: κάθε αναλυτικό σύνολο είναι είτε αριθμήσιμο είτε περιέχει ένα μη κενό τέλειο σύνολο. Εδώ θα δούμε ένα χαρακτηριστικό αποτέλεσμα διχοτομίας των Kechris-Solecki-Todorcevic [**7**], το οποίο αφορά τα αναλυτικά γραφήματα και είναι γνωστή ως KST-διχοτομία ή $\mathcal{G}_0$-διχοτομία. Η αρχική απόδειξη στηρίζεται σε μεθόδους της κατασκευαστικής περιγραφικής θεωρίας συνόλων, όμως ο Miller [**31, 30**] ανακάλυψε μια κλασική απόδειξη. Πιο κάτω θα παρουσιάσουμε την απόδειξη του Miller στο στιλ των σημειώσεων του Bernshteyn [**2**]. Συνεχίζουμε με τους βασικούς ορισμούς.

Ορισμός 8.1.1 (Σχέσεις και Ομομορφισμοί). Θεωρούμε μη κενά σύνολα X και Y, έναν φυσικό $n \geqslant 1$ και διμελείς σχέσεις $R \subseteq X \times X$, $S \subseteq X \times X$.

(i) Η σχέση R λέγεται: **αυτοπαθής** (**reflexive**) αν για κάθε $x \in X$ ισχύει $(x,x) \in R$, **μεταβατική** (**transitive**) αν για κάθε $x,y,z \in X$ με $(x,y) \in R$ και $(y,z) \in R$ ισχύει $(x,z) \in R$ (αυτές οι έννοιες έχουν επίσης οριστεί στον Ορισμό 5.4.1), **συμμετρική** (**symmetric**) αν για κάθε $(x,y) \in R$ έχουμε επίσης $(y,x) \in R$, και **αντι-αυτοπαθής** (**irreflexive**) αν για κάθε $x \in X$ ισχύει $(x,x) \notin R$.

(ii) Μια συνάρτηση $\varphi : X \to Y$ λέγεται **ομομορφισμός** (**homomorphism**) από την R στην S αν για κάθε $x,y \in X$ με $(x,y) \in R$ ισχύει $(\varphi(x),\varphi(y)) \in S$.

Ορισμός 8.1.2 (Γραφήματα και χρωματικοί αριθμοί). Θεωρούμε ένα μη κενό σύνολο X και ένα $G \subseteq X \times X$. Το G είναι **γράφημα στο** X αν είναι συμμετρική και αντι-αυτοπαθής διμελή σχέση, ενδεχομένως $G = \varnothing$.

(Για τους αναγνώστες που έχουν εξοικείωση με την έννοια του γραφήματος ως ένα ζεύγος (V,E) από σύνολα «κορυφών» και «ακμών» διευκρινίζουμε ότι εδώ το σύνολο E των ακμών είναι το ίδιο το G ενώ το σύνολο των κορυφών V είναι το $\{x \in X \mid \exists y \in X\ (x, y) \in G\}$.)

Στη συνέχεια του ορισμού θεωρούμε ότι το G είναι γράφημα στο X. Αν έχουμε $Y \subseteq X$, θα λέμε ότι το Y είναι G-**ανεξάρτητο** (G-**independent**) αν για κάθε $x, y \in Y$ ισχύει $(x, y) \notin G$.

Μια συνάρτηση $c : X \to I$ είναι **γνήσιος χρωματισμός (proper coloring) του γραφήματος** G αν για κάθε $i \in I$ το σύνολο $c^{-1}[\{i\}]$ είναι G-ανεξάρτητο, δηλαδή αν για κάθε $x, y \in X$ με $c(x) = c(y)$ έχουμε $(x, y) \notin G$ (το κενό σύνολο είναι προφανώς ανεξάρτητο). Ισοδύναμα για κάθε $(x, y) \in G$ ισχύει $c(x) \neq c(y)$. Δεδομένου ότι κάθε γράφημα είναι αντι-αυτοπαθής διμελή σχέση είναι άμεσο ότι η ταυτοτική συνάρτηση $\mathrm{id} : X \to X : \mathrm{id}(x) = x$, είναι γνήσιος χρωματισμός του G. Επομένως το γράφημα G έχει πάντα έναν γνήσιο χρωματισμό.

Ο **χρωματικός αριθμός** (**chromatic number**) $\chi(G)$ του G είναι ο ελάχιστος πληθάριθμός κ για τον οποίο υπάρχει σύνολο I με πληθάριθμο κ και ένας γνήσιος χρωματισμός $c : X \to I$ του γραφήματος G. Δεδομένου του Αξιώματος Επιλογής κάθε σύνολο έχει πληθάριθμο, επομένως με βάση τα πιο πάνω ο χρωματικός αριθμός ορίζεται πάντα και μάλιστα $\chi(G) \leqslant |X| =$ ο πληθάριθμος του X.

Παρατηρούμε ότι $\chi(G) \leqslant \aleph_0 =$ ο πληθάριθμος των φυσικών αριθμών, αν και μόνο αν υπάρχει *αριθμήσιμο σύνολο* I και ένας γνήσιος χρωματισμός $c : X \to I$ του G. (Μάλιστα σε αυτή την περίπτωση δεν χρειάζεται το Αξίωμα Επιλογής για να οριστεί ο χρωματικός αριθμός καθώς κάθε αριθμήσιμο σύνολο είναι καλά διατάξιμο.)

Στην περίπτωση όπου το X είναι Πολωνικός χώρος ορίζουμε τον **Borel χρωματικό αριθμό** (**Borel chromatic number**) $\chi_B(G)$ του G ως τον ελάχιστο πληθάριθμο κ για τον οποίο υπάρχει *Πολωνικός χώρος* Y με πληθάριθμο κ και μια Borel-μετρήσιμη συνάρτηση $c : X \to Y$, η οποία είναι γνήσιος Borel χρωματισμός του γραφήματος G. Δεδομένου ότι η ταυτοτική συνάρτηση $\mathrm{id} : X \to X : \mathrm{id}(x) = x$ είναι συνεχής (και συνεπώς Borel-μετρήσιμη), έχουμε όπως πιο πάνω και με βάση το Αξίωμα Επιλογής ότι ο Borel χρωματικός αριθμός ορίζεται πάντα όταν ο X είναι Πολωνικός χώρος και μάλιστα ισχύει $\chi_B(G) \leqslant |X| =$ ο πληθάριθμος του X.

Όπως είδαμε στο Πόρισμα 2.4.5, οι Πολωνικοί χώροι ικανοποιούν την Υπόθεση του Συνεχούς επομένως ο $\chi_B(G)$ είτε είναι $\leqslant \aleph_0$ είτε είναι ίσος με $2^{\aleph_0} =$ ο πληθάριθμος του $2^{\mathbb{N}}$. Φυσικά αντί του $2^{\mathbb{N}}$ μπορούμε να έχουμε έναν οποιονδήποτε υπεραριθμήσιμο Πολωνικό χώρο καθώς όλοι οι υπεραριθμήσιμοι Πολωνικοί χώροι είναι ισοπληθικοί μεταξύ τους (αυτό μπορούμε να το δούμε είτε από την απόδειξη του Πορίσματος 2.4.5, όπου δείχνουμε ότι κάθε υπεραριθμήσιμος Πολωνικός χώρος είναι ισοπληθικός με το $\mathbb{R}$, είτε από το Πόρισμα 4.2.13).

Μας ενδιαφέρει η περίπτωση όπου $\chi_B(G) \leqslant \aleph_0$. Ισοδύναμα η περίπτωση που υπάρχει ένας αριθμήσιμος Πολωνικός χώρος Y και μια Borel-μετρήσιμη συνάρτηση $c : X \to Y$, η οποία είναι γνήσιος χρωματισμός του G. Οι αριθμήσιμοι Πολωνικοί χώροι είτε είναι πεπερασμένα σύνολα (τα οποία με τη διακριτή μετρική είναι Borel-ισομορφικά με σύνολα της μορφής $\{k \in \mathbb{N} \mid k < n\}$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$), είτε είναι Borel-ισομορφικοί με το $\mathbb{N}$ (Άσκηση 4.2.21). Είναι τότε άμεσο ότι $\chi_B(G) \leqslant \aleph_0$ αν και μόνο αν υπάρχει Borel-μετρήσιμη συνάρτηση $c : X \to \mathbb{N}$, η οποία είναι γνήσιος χρωματισμός του G. Όπως πιο πάνω, παρατηρούμε ότι σε αυτή την περίπτωση δεν χρειάζεται το Αξίωμα Επιλογής για να οριστεί ο Borel χρωματικός αριθμός.

Ορισμός 8.1.3 (Το γράφημα $\mathcal{G}_S(2^{\mathbb{N}})$). Θεωρούμε ένα $S \subseteq \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ και ορίζουμε το σύνολο

$$\mathcal{G}_S(2^{\mathbb{N}}) = \{(u * (i) * \alpha, u * (1-i) * \alpha) \in 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}} \mid u \in S,\ i \in \{0,1\},\ \alpha \in 2^{\mathbb{N}}\}.$$

Είναι σαφές ότι το $\mathcal{G}_S(2^{\mathbb{N}})$ είναι γράφημα στο $2^{\mathbb{N}}$.

Θεωρούμε επίσης τις «πεπερασμένες προσεγγίσεις» του πιο πάνω, για κάθε $n \geqslant 1$ ορίζουμε το γράφημα στο 2^n,

$$\mathcal{G}_S(2^n) = \{(u * (i) * v, u * (1-i) * v) \in 2^n \times 2^n \mid u \in S,\ i \in \{0,1\},\ v \in 2^{n-(|u|+1)}\},$$

όπου $2^m \equiv \{0,1\}^m$ για κάθε $m \geqslant 1$. (Θα είναι σαφές από το κείμενο αν με το 2^m εννοούμε το σύνολο $\{0,1\}^m$ ή τον φυσικό της ύψωσης σε δύναμη.)

Το S λέγεται **αραιό** (**sparse**) αν για κάθε n υπάρχει το πολύ ένα $u \in S$ με $|u| = n$, **πλήρους μήκους** αν για κάθε n υπάρχει $u \in S$ με $|u| = n$ και **πυκνό** (**dense**) αν για κάθε $w \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ υπάρχει $u \in S$ με $w \sqsubseteq u$.

Προφανώς ένα $S \subseteq \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ είναι αραιό πλήρους μήκους αν για κάθε n υπάρχει *ακριβώς ένα* $u \in S$ με $|u| = n$. Δεν είναι δύσκολο να δει κανείς ότι υπάρχει $S \subseteq \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ που είναι αραιό, πλήρους μήκους και πυκνό, (βλ. την Άσκηση 8.1.17).

Στη συνέχεια θα χρειαστούμε κάποιες ακόμα γνωστές τοπολογικές έννοιες. Σταθεροποιούμε έναν μετρικό χώρο (X,d). Ένα υποσύνολο A του X είναι **πουθενά πυκνό** (**nowhere dense**) αν $(\overline{A})^\circ = \emptyset$, δηλαδή το εσωτερικό της κλειστότητάς του είναι κενό σύνολο (εννοείται ότι το εσωτερικό και η κλειστότητα λαμβάνονται στον (X,d)). Το A είναι **ισχνό (meager)** ή **πρώτης κατηγορίας** αν $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ για μια ακολουθία ισχνών συνόλων $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι το A είναι ισχνό αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από κλειστά σύνολα έτσι ώστε $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ και $F_n^\circ = \emptyset$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ένα σύνολο $B \subseteq X$ είναι **συνισχνό (comeager)** ή **δεύτερης κατηγορίας** αν το συμπλήρωμά του $X \setminus B$ είναι ισχνό. Είναι επίσης εύκολο να δει κανείς ότι το B είναι συνισχνό αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από ανοικτά και πυκνά υποσύνολα του X έτσι ώστε $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n \subseteq B$.

Η έννοια του ισχνού συνόλου ερμηνεύεται ως σύνολο που είναι «μικρό από τοπολογικής» άποψης: αν το A είναι ισχνό και $A' \subseteq A$ τότε και το A' είναι ισχνό, ενώ η αριθμήσιμη ένωση ισχνών συνόλων είναι ισχνό. Στον αντίποδα τα συνισχνά σύνολα θεωρούνται «μεγάλα»: ένα υπερσύνολο ενός συνισχνού συνόλου είναι συνισχνό και η αριθμήσιμη τομή συνισχνών συνόλων είναι συνισχνό.

Το γνωστό *Θεώρημα Κατηγορίας του Baire* (Baire Category Theorem) λέει ότι κάθε μη κενό ανοικτό υποσύνολο ενός πλήρους μετρικού χώρου δεν είναι ισχνό.

Λέμε ότι ένα σύνολο $C \subseteq X$ **έχει την ιδιότητα του Baire** ή αλλιώς **έχει την BP** (**Baire Property**) αν υπάρχει ανοικτό $U \subseteq X$ έτσι ώστε η *συμμετρική διαφορά* $C \triangle U = (C \setminus U) \cup (U \setminus C)$ να είναι ισχνό σύνολο. Προφανώς κάθε ανοικτό σύνολο έχει την BP. Επίσης δεν είναι δύσκολο να αποδειχθεί ότι η οικογένεια όλων των υποσυνόλων του X που έχουν την BP αποτελεί σ-άλγεβρα. Προκύπτει ότι κάθε Borel σύνολο έχει την BP.

Όλες οι πιο πάνω έννοιες είναι τοπολογικές, δηλαδή διατηρούνται κάτω από τοπολογικούς ισομορφισμούς.

Είναι χρήσιμο να θεωρήσουμε τον περιορισμό των εννοιών του ισχνού και συνισχνού σε ανοικτά σύνολα. Θεωρούμε ένα ανοικτό $U \subseteq X$ και ένα $C \subseteq X$. Θα λέμε ότι το C είναι **ισχνό στο** U αν το σύνολο $C \cap U$ είναι ισχνό, διαισθητικά το C είναι «μικρό στο U». Θα λέμε επίσης ότι το C είναι **συνισχνό στο** U αν το σύνολο $U \setminus C$ είναι ισχνό, διαισθητικά το C είναι «μεγάλο στο U». Προκύπτει άμεσα ότι η αριθμήσιμη *ένωση* συνόλων που είναι *ισχνά* στο U

αποτελεί σύνολο που είναι επίσης ισχνό στο U και πως η αριθμήσιμη *τομή* συνόλων που είναι *συνισχνά* στο U αποτελεί σύνολο που είναι επίσης συνισχνό στο U.

Αν ένα $C \subseteq X$ έχει την BP και είναι μη ισχνό, τότε υπάρχει ένα *μη κενό* ανοικτό σύνολο U έτσι ώστε το σύνολο $U \setminus C$ να είναι ισχνό. Με άλλα λόγια, ένα σύνολο που έχει την BP και δεν είναι «μικρό» θα είναι «μεγάλο» μέσα σε ένα μη κενό ανοικτό σύνολο U. Για να δούμε το τελευταίο ας θεωρήσουμε ένα ανοικτό U με το $C \triangle U$ να είναι ισχνό, τότε και το σύνολο $U \setminus C$ είναι ισχνό. Αν το U ήταν κενό, τότε $C \triangle U = C$ και άρα το C θα ήταν ισχνό, άρα $U \neq \emptyset$.

Αν ο (X, d) είναι πλήρης και το U είναι μη κενό ανοικτό, τότε για κάθε C που είναι συνισχνό στο U έχουμε ότι $C \cap U \neq \emptyset$. Για να το δούμε αυτό παρατηρούμε ότι

$$U = (U \cap C) \ \cup \ (U \setminus C),$$

άρα αν είχαμε $U \cap C = \emptyset$ τότε θα ίσχυε $U = U \setminus C$ και άρα το U θα ήταν ισχνό, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με το Θεώρημα Κατηγορίας του Baire.

Τέλος λέμε ότι μια συνάρτηση $f : (X, d) \to (Y, \rho)$, όπου ο (Y, ρ) είναι μετρικός χώρος, είναι **BP-μετρήσιμη** (**BP-measureable**) αν για κάθε ανοικτό $V \subseteq V$ το σύνολο $f^{-1}[V]$ έχει την BP. Επειδή κάθε Borel σύνολο έχει την BP, είναι σαφές ότι κάθε Borel-μετρήσιμη συνάρτηση είναι και BP-μετρήσιμη.

Το ακόλουθο αποτέλεσμα συνδέει τις πιο πάνω έννοιες με τα γραφήματα της μορφής $\mathcal{G}_S(2^{\mathbb{N}})$.

Πρόταση 8.1.4. *Θεωρούμε ένα πυκνό $S \subseteq \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$. Τότε κάθε μη ισχνό υποσύνολο του $2^{\mathbb{N}}$ που έχει την BP δεν είναι $\mathcal{G}_S(2^{\mathbb{N}})$-ανεξάρτητο.*

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα μη ισχνό $B \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ που έχει την BP και δείχνουμε ότι υπάρχουν $(\alpha, \beta) \in B$ με $\alpha, \beta \in \mathcal{G}_S(2^{\mathbb{N}})$. Από τα προηγούμενα υπάρχει ένα μη κενό ανοικτό $U \subseteq 2^{\mathbb{N}}$, έτσι ώστε το σύνολο $U \setminus B$ να είναι ισχνό. Προφανώς υπάρχει $u \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ με $\mathcal{N}_u \cap 2^{\mathbb{N}} = \mathcal{N}_u^{2^{\mathbb{N}}} \subseteq U$ και από την πυκνότητα του S υπάρχει $v \in S$ με $u \sqsubseteq v$. Συνεπώς υπάρχει $v \in S$ με $\mathcal{N}_v \cap 2^{\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{N}_u^{2^{\mathbb{N}}} \subseteq U$ και το σύνολο $\mathcal{N}_v^{2^{\mathbb{N}}} \setminus B$ είναι ισχνό στο $2^{\mathbb{N}}$.

Στη συνέχεια παίρνουμε τη συνάρτηση από το $\mathcal{N}_v^{2^{\mathbb{N}}}$ στο $\mathcal{N}_v^{2^{\mathbb{N}}}$, η οποία παίρνει το $v * (i) * \gamma$ και δίνει το $v * (1-i) * \gamma$. Με άλλα λόγια, η συνάρτηση εναλλάσσει το 0 με το 1 στη θέση με δείκτη n, όπου $n = |v|$. Για να μην χρειαστεί να περάσουμε στον υπόχωρο $\mathcal{N}_v^{2^{\mathbb{N}}}$ θα θεωρήσουμε μια κατάλληλη συνεχή επέκταση της τελευταίας συνάρτησης, συγκεκριμένα την $f : 2^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}}$:

$$f(\alpha) = \begin{cases} v * (1 - \alpha(n)) * \gamma, & \text{αν } \alpha \in \mathcal{N}_v^{2^{\mathbb{N}}}, \\ \alpha, & \text{αν } \alpha \notin \mathcal{N}_v^{2^{\mathbb{N}}}. \end{cases}$$

Η f είναι εύκολα τοπολογικός ισομορφισμός και $f[\mathcal{N}_v^{2^{\mathbb{N}}}] = \mathcal{N}_v^{2^{\mathbb{N}}}$. Επειδή το B είναι συνισχνό στο $\mathcal{N}_v^{2^{\mathbb{N}}}$ τότε και το $f[B]$ είναι συνισχνό στο $f[\mathcal{N}_v^{2^{\mathbb{N}}}] = \mathcal{N}_v^{2^{\mathbb{N}}}$. Άρα και η τομή $B \cap f[B]$ είναι συνισχνό στο $\mathcal{N}_v^{2^{\mathbb{N}}}$. Επειδή ο $2^{\mathbb{N}}$ είναι πλήρης μετρικός χώρος και το $\mathcal{N}_v^{2^{\mathbb{N}}}$ είναι μη κενό ανοικτό, έχουμε σύμφωνα με τα προηγούμενα ότι $B \cap f[B] \cap \mathcal{N}_v^{2^{\mathbb{N}}} \neq \emptyset$.

Θεωρούμε λοιπόν $\alpha \in \mathcal{N}_v^{2^{\mathbb{N}}}$ με $\alpha \in B \cap f[B]$. Τότε $\alpha = v * (i) * \gamma$ για κάποιο $i \in \{0,1\}$ και κάποιο $\gamma \in 2^{\mathbb{N}}$. Επιπλέον $\alpha = f(\beta)$ για κάποιο $\beta \in B$. Το β είναι αναγκαστικά στοιχείο του $\mathcal{N}_v^{2^{\mathbb{N}}}$ επειδή $\alpha = f(\beta) \in \mathcal{N}_v^{2^{\mathbb{N}}}$ και η f απεικονίζει στοιχεία εκτός του $\mathcal{N}_v^{2^{\mathbb{N}}}$ σε στοιχεία εκτός του $\mathcal{N}_v^{2^{\mathbb{N}}}$. Άρα $\beta = v * (j) * \gamma'$ για κάποιο $j \in \{0,1\}$ και κάποιο $\gamma' \in 2^{\mathbb{N}}$. Άρα

$$v * (i) * \gamma = \alpha = f(\beta) = v * (1-j) * \gamma',$$

απ' όπου προκύπτει ότι $i = 1-j$ και $\gamma = \gamma'$. Καταλήγουμε ότι $\beta = v*(1-i)*\gamma$ και άρα $(\alpha, \beta) \in \mathcal{G}_S(2^{\mathbb{N}})$. ▫

Πόρισμα 8.1.5. *Αν το $S \subseteq \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ είναι πυκνό τότε το γράφημα $\mathcal{G}_S(2^{\mathbb{N}})$ δεν έχει γνήσιο χρωματισμό $c : 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ που να είναι BP-μετρήσιμη συνάρτηση. Ειδικότερα $\chi_B(\mathcal{G}_S(2^{\mathbb{N}})) \not\leqslant \aleph_0$.*

Απόδειξη. Αν είχαμε έναν γνήσιο χρωματισμό $c : 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ του $\mathcal{G}_S(2^{\mathbb{N}})$ που θα ήταν και BP-μετρήσιμη συνάρτηση, τότε για κάθε $i \in \mathbb{N}$ το σύνολο $c^{-1}[\{i\}]$ θα είχε την BP και θα ήταν και $\mathcal{G}_S(2^{\mathbb{N}})$-ανεξάρτητο (από τον ορισμό του γνήσιου χρωματισμού). Προφανώς $2^{\mathbb{N}} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} c^{-1}[\{i\}]$ και επειδή ο $2^{\mathbb{N}}$ είναι μη ισχνός (Θεώρημα Κατηγορίας του Baire) θα υπήρχε ένα $i \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε το $c^{-1}[\{i\}]$ να είναι μη ισχνό.

Επομένως θα υπήρχε ένα μη ισχνό $\mathcal{G}_S(2^{\mathbb{N}})$-ανεξάρτητο σύνολο που θα είχε την BP, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την Πρόταση 8.1.4.

Το συμπέρασμα ότι $\chi_B(\mathcal{G}_S(2^{\mathbb{N}})) \not\leqslant \aleph_0$ προκύπτει από το ότι κάθε Borel-μετρήσιμη συνάρτηση $c : 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ είναι επίσης BP-μετρήσιμη. ▫

Ορισμός 8.1.6 (Άθροισμα γραφημάτων στο 2^n). Θεωρούμε ένα $n \in \mathbb{N}$, ένα πεπερασμένο γράφημα H στο $2^n \equiv \{0,1\}^n$ και ένα $u \in H$. Τότε ορίζεται το **άθροισμα** $H +_u H \subseteq 2^{n+1} \times 2^{n+1}$ ως εξής:

$$(v*(i), w*(j)) \in H +_u H \iff (i = j \;\&\; (v,w) \in H) \;\vee\; (i \neq j \;\&\; v = w = u).$$

Προκύπτει άμεσα ότι το $H +_u H$ είναι ένα πεπερασμένο γράφημα στο 2^{n+1}. Διαισθητικά το $H +_u H$ προέρχεται από δύο ξένα αντίτυπα του H προσθέτοντας μία ακόμα ακμή που συνδέει τα δύο αντίτυπα του $u \in H$.

Προφανώς, η έννοια του αθροίσματος $H +_u H$ μπορεί να επεκταθεί σε όλα τα πεπερασμένα γραφήματα H (δηλαδή που δεν είναι απαραίτητα γραφήματα στο 2^n) αντικαθιστώντας το $v*(i)$ με το ζεύγος $(v,i) \in H \times \{0,1\}$. Παρόλα αυτά, μας ενδιαφέρει η περίπτωση του 2^n.

Θεωρούμε ένα $S \subseteq \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ και ένα $n \in \mathbb{N}$ καθώς και το $\mathcal{G}_S(2^n)$, το οποίο είναι γράφημα στο 2^n. Παρατηρούμε ότι για κάθε $u \in 2^n$ ορίζεται το άθροισμα $\mathcal{G}_S(2^n) +_u \mathcal{G}_S(2^n)$ σύμφωνα με τον Ορισμό 8.1.6. Στην περίπτωση που το $S \subseteq \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ είναι αραιό τότε για κάθε n για το οποίο υπάρχει (αναγκαστικά μοναδικό) $u_n \in S$ με $|u_n| = n$ ισχύει

$$\mathcal{G}_S(2^{n+1}) = \mathcal{G}_S(2^n) +_{u_n} \mathcal{G}_S(2^n), \tag{8.1}$$

(βλ. την Άσκηση 8.1.20).

Ορισμός 8.1.7 (Ξεδιπλωμένος Ομομορφισμός). Θεωρούμε γραφήματα H και G στο 2^n και στον $\mathcal{X}$ αντίστοιχα, όπου $n \in \mathbb{N}$ και $\mathcal{X}$ Πολωνικός χώρος. Υποθέτουμε ότι το G είναι αναλυτικό υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ και παίρνουμε ένα κλειστό $F \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{X} \times \mathcal{N}$, έτσι ώστε $G = \exists^{\mathcal{N}} F$.

Υπενθυμίζουμε ότι μια συνάρτηση $\varphi : X \to Y$ είναι ομομορφισμός από το H στο G αν για κάθε $(x_1, x_2) \in H$ ισχύει $(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) \in G$ (Ορισμός 8.1.1).

Αν έχουμε συναρτήσεις $\varphi : 2^n \to \mathcal{X}$ και $\psi : 2^n \times 2^n \to \mathcal{N}$ θα λέμε ότι το ζεύγος των συναρτήσεων (φ, ψ) είναι **ξεδιπλωμένος ομομορφισμός** (**unfolded homomorphism**) από το H στο G ως προς το σύνολο F αν για κάθε $(u,v) \in H$ ισχύει

$$(\varphi(u), \varphi(v), \psi(u,v)) \in F.$$

Το σύνολο όλων των ξεδιπλωμένων ομομορφισμών από το H στο G ως προς το κλειστό σύνολο F θα συμβολίζεται με $\mathsf{Hom}^{\mathsf{u}}(H, G)$. Θα ήταν ακριβέστερο να χρησιμοποιούσαμε το σύμβολο F αντί του G, αλλά κρίνουμε σκόπιμο να διατηρήσουμε το G, καθώς αυτό συμβολίζει το γράφημα που μας ενδιαφέρει και επιπλέον το F θα είναι σαφές από το κείμενο.

Παρατήρηση 8.1.8. Θεωρούμε H, G, F, n όπως στον Ορισμό 8.1.7.

(i) Παρατηρούμε ότι για κάθε $(\varphi, \psi) \in \mathsf{Hom}^{\mathsf{u}}(H, G)$ η φ είναι ομομορφισμός από το H στο G. Ένας ξεδιπλωμένος ομομορφισμός είναι στην ουσία ένας ομομορφισμός ο οποίος παράγει και ένα στοιχείο του $\mathcal{N}$ το οποίο υλοποιεί ότι βρισκόμαστε στο αναλυτικό γράφημα G.

(ii) Είναι σαφές ότι $\mathsf{Hom}^{\mathsf{u}}(H, G) \subseteq \mathcal{X}^{\{0,1\}^n} \times \mathcal{N}^{\{0,1\}^n \times \{0,1\}^n}$. Υπάρχει μια προφανής ταύτιση του $\mathcal{X}^{\{0,1\}^n}$ με το γινόμενο $\mathcal{X}^{2^n}$ (όπου με το τελευταίο 2^n εννοούμε τον φυσικό αριθμό της ύψωσης σε δύναμη) και του $\mathcal{N}^{\{0,1\}^n \times \{0,1\}^n}$ με τον $\mathcal{N}^{2^n \cdot 2^n} = \mathcal{N}^{2^{2n}}$. Επομένως μπορούμε μέσω των πιο πάνω ταυτίσεων να υποθέσουμε ότι

$$\mathsf{Hom}^{\mathsf{u}}(H, G) \subseteq \mathcal{X}^{2^n} \times \mathcal{N}^{2^{2n}}. \tag{8.2}$$

(iii) Στην περίπτωση που $n = 0$ το $\{0,1\}^0$ είναι το σύνολο όλων των δυαδικών ακολουθιών μήκους 0, συνεπώς είναι το $\{\Lambda\}$. Εφόσον το H είναι γράφημα στο 2^n, έχουμε λόγω της αντι-αυτοπάθειας ότι $H = \varnothing$. Επιπλέον ισχύει $\mathcal{X}^{\{0,1\}^n} \times \mathcal{N}^{\{0,1\}^n \times \{0,1\}^n} = \mathcal{X}^{\{\Lambda\}} \times \mathcal{N}^{\{(\Lambda,\Lambda)\}}$, επομένως $\mathsf{Hom}^{\mathsf{u}}(H, G) \subseteq \mathcal{X}^{\{\Lambda\}} \times \mathcal{N}^{\{(\Lambda,\Lambda)\}}$. Μάλιστα επειδή $H = \varnothing$ κάθε $(\varphi, \psi) \in \mathcal{X}^{\{\Lambda\}} \times \mathcal{N}^{\{(\Lambda,\Lambda)\}}$ είναι ξεδιπλωμένος ομομορφισμός από το H στο G. Με άλλα λόγια έχουμε ότι $\mathsf{Hom}^{\mathsf{u}}(H, G) = \mathcal{X}^{\{\Lambda\}} \times \mathcal{N}^{\{(\Lambda,\Lambda)\}}$.

Όπως αναφέραμε πιο πάνω, ο τελευταίος χώρος ταυτίζεται με τον $\mathcal{X} \times \mathcal{N}$. Καταλήγουμε λοιπόν στο εξής:

(8.3) Αν το H είναι το κενό γράφημα στο $\{\Lambda\}$, τότε $\mathsf{Hom}^{\mathsf{u}}(H, G) = \mathcal{X} \times \mathcal{N}$.

Μάλιστα είναι χρήσιμο για τη συνέχεια να αναφέρουμε τον ορισμό της πιο πάνω ταύτισης:

$$(\varphi, \psi) \in \mathsf{Hom}^{\mathsf{u}}(H, G) \mapsto (\varphi(\Lambda), \psi(\Lambda, \Lambda)).$$

Η αντίστροφη της πιο πάνω συνάρτησης είναι η

$$(x, \alpha) \mapsto (\varphi_x, \psi_\alpha)$$

όπου $\varphi_x : \{\Lambda\} \to \mathcal{X} : \varphi_x(\Lambda) = x$ και $\psi_\alpha : \{(\Lambda, \Lambda)\} \to \mathcal{N} : \psi_\alpha(\Lambda, \Lambda) = \alpha$.

(iv) Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι το $\mathsf{Hom}^{\mathsf{u}}(H, G)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{X}^{2^n} \times \mathcal{N}^{2^{2n}}$, (βλ. Άσκηση 8.1.15).

Ορισμός 8.1.9. Θεωρούμε γραφήματα H και G στο $2^n \equiv \{0,1\}^n$ και στον $\mathcal{X}$ αντίστοιχα, όπου $n \in \mathbb{N}$ και $\mathcal{X}$ Πολωνικός χώρος. Υποθέτουμε ότι το G είναι αναλυτικό υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ και παίρνουμε ένα κλειστό $F \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ με $G = \exists^{\mathcal{N}} F$.

Προειδοποιούμε τους αναγνώστες ότι οι έννοιες που αναφέρονται σε αυτόν τον ορισμό εξαρτώνται και από το F, αλλά όπως στην περίπτωση του $\mathsf{Hom}^{\mathsf{u}}(H, G)$*, στον Ορισμό 8.1.7 θα διατηρήσουμε το σύμβολο G.*

(i) Με χρήση της (8.2) θα λέμε ότι ένα $\mathcal{H} \subseteq \mathsf{Hom}^{\mathsf{u}}(H, G)$ είναι **Borel** όταν το $\mathcal{H}$ είναι Borel υποσύνολο του $\mathcal{X}^{2^n} \times \mathcal{N}^{2^{2n}}$.

(ii) Για κάθε $\mathcal{H} \subseteq \mathsf{Hom}^{\mathsf{u}}(H, G)$ και κάθε $u \in 2^n$ ορίζουμε

$$\mathcal{H}^{I}(u) = \{\varphi(u) \in \mathcal{X} \mid \exists \psi \ (\varphi, \psi) \in \mathcal{H}\}.$$

Επίσης για κάθε $\mathcal{H} \subseteq \mathsf{Hom}^{\mathsf{u}}(H, G)$ και κάθε $u, v \in 2^n$ ορίζουμε

$$\mathcal{H}^{II}(u, v) = \{\psi(u, v) \in \mathcal{N} \mid \exists \varphi \ (\varphi, \psi) \in \mathcal{H}\}.$$

(iii) Θα λέμε ότι ένα Borel σύνολο $\mathcal{H} \subseteq \mathsf{Hom}^{\mathsf{u}}(H,G)$ είναι **μικροσκοπικό** (**tiny**) αν υπάρχει $u \in 2^n$, έτσι ώστε το $\mathcal{H}^I(u)$ να είναι G-ανεξάρτητο, δηλαδή αν υπάρχει $u \in 2^n$, έτσι ώστε για κάθε $(\varphi_0,\psi_0),(\varphi_1,\psi_1) \in \mathcal{H}$ να έχουμε $(\varphi_0(u),\varphi_1(u)) \notin G$. Το κενό σύνολο είναι εξ ορισμού μικροσκοπικό.

(iv) Ορίζουμε

$$\mathcal{I}_{H,G} = \{\mathcal{H} \subseteq \mathsf{Hom}^{\mathsf{u}}(H,G) \mid \text{υπάρχει ακολουθία } (\mathcal{H}_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ από Borel μικροσκοπικά υποσύνολα του } \mathsf{Hom}^{\mathsf{u}}(H,G) \text{ με } \mathcal{H} \subseteq \textstyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_n\}.$$

Είναι σαφές ότι το $\mathcal{I}_{H,G}$ περιέχει όλα τα υποσύνολα ενός στοιχείου του και είναι κλειστό ως προς την αριθμήσιμη ένωση υποσυνόλων του. Δεδομένου ότι $\varnothing \in \mathcal{I}_{H,G}$ έχουμε ότι το $\mathcal{I}_{H,G}$ είναι σ-ιδεώδες στο $\mathsf{Hom}^{\mathsf{u}}(H,G)$.

(v) Ένα $\mathcal{H} \subseteq \mathsf{Hom}^{\mathsf{u}}(H,G)$ με $\mathcal{H} \notin \mathcal{I}_{H,G}$ θα λέγεται $\mathcal{I}_{H,G}$-**θετικό** ($\mathcal{I}_{H,G}$-**positive**).

(vi) Θεωρούμε $u \in H$ και $(\varphi,\psi) \in \mathsf{Hom}^{\mathsf{u}}(H +_u H, G)$. Ορίζουμε τις συναρτήσεις $\varphi^{[0]},\varphi^{[1]} : 2^n \to G$ και $\psi^{[0]},\psi^{[1]} : 2^n \times 2^n \to G$ ως εξής:

$$\varphi^{[i]}(v) = \varphi(v * (i)),$$
$$\psi^{[i]}(v,w) = \psi(v*(i), w*(i)), \quad v,w \in 2^n,\ i \in \{0,1\}.$$

Προκύπτει άμεσα από τους ορισμούς ότι $(\varphi^{[0]},\psi^{[0]}),(\varphi^{[1]},\psi^{[1]}) \in \mathsf{Hom}^{\mathsf{u}}(H,G)$.

(vii) Για κάθε $u \in H$ και κάθε $\mathcal{H} \subseteq \mathsf{Hom}^{\mathsf{u}}(H,G)$ θέτουμε

$$\mathcal{H} +_u \mathcal{H} = \{(\varphi,\psi) \in \mathsf{Hom}^{\mathsf{u}}(H +_u H, G) \mid (\varphi^{[0]},\psi^{[0]}),(\varphi^{[1]},\psi^{[1]}) \in \mathcal{H}\}.$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι αν το $\mathcal{H}$ είναι Borel υποσύνολο του $\mathsf{Hom}^{\mathsf{u}}(H,G)$, τότε και ο $\mathcal{H} +_u \mathcal{H}$ είναι Borel υποσύνολο του $\mathsf{Hom}^{\mathsf{u}}(H,G)$, (βλ. την Άσκηση 8.1.15).

Το επόμενο λήμμα είναι το κεντρικό εργαλείο για την απόδειξη της $\mathcal{G}_0$-διχοτομίας από τον B. Miller.

Λήμμα 8.1.10. *Θεωρούμε ένα $n \in \mathbb{N}$, έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και γραφήματα H, G στο $2^n \equiv \{0,1\}^n$ και στον $\mathcal{X}$ αντίστοιχα, με το G αναλυτικό. Σταθεροποιούμε ένα κλειστό $F \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ με $G = \exists^{\mathcal{N}} F$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) *Αν το $\mathcal{H} \subseteq \mathsf{Hom}^{\mathsf{u}}(H,G)$ δεν είναι μικροσκοπικό υποσύνολο του $\mathsf{Hom}^{\mathsf{u}}(H,G)$, τότε για κάθε $u \in 2^n$ ισχύει $\mathcal{H} +_u \mathcal{H} \neq \varnothing$.*

(ii) *Αν το $\mathcal{H} \subseteq \mathsf{Hom}^{\mathsf{u}}(H,G)$, είναι Borel $\mathcal{I}_{H,G}$-θετικό υποσύνολο του $\mathsf{Hom}^{\mathsf{u}}(H,G)$ τότε για κάθε $u \in 2^n$ το $\mathcal{H} +_u \mathcal{H}$ είναι $\mathcal{I}_{(H+_u H),G}$-θετικό υποσύνολο του $\mathsf{Hom}^{\mathsf{u}}(H +_u H, G)$.*

(iii) *Αν το $\mathcal{H} \subseteq \mathsf{Hom}^{\mathsf{u}}(H,G)$, είναι Borel $\mathcal{I}_{H,G}$-θετικό υποσύνολο του $\mathsf{Hom}^{\mathsf{u}}(H,G)$ τότε για κάθε $r > 0$ υπάρχει ένα Borel $\mathcal{I}_{H,G}$-θετικό $\mathcal{H}_* \subseteq \mathcal{H}$ έτσι ώστε για κάθε $v,w \in 2^n$ να έχουμε*

$$d\text{-διάμετρος}(\overline{\mathcal{H}_*^I(v)}) < r \quad \text{και} \quad d_{\mathcal{N}}\text{-διάμετρος}(\overline{\mathcal{H}_*^{II}(v,w)}) < r,$$

όπου d είναι μια κατάλληλη μετρική στον $\mathcal{X}$.

Απόδειξη. (i) Αφού το $\mathcal{H}$ δεν είναι μικροσκοπικό, έχουμε ειδικότερα για το $u \in 2^n$ ότι το $\mathcal{H}^I(u)$ δεν είναι G-ανεξάρτητο. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν $(\varphi_0,\psi_0),(\varphi_1,\psi_1) \in \mathcal{H}$ με $(\varphi_0(u),\varphi_1(u)) \in G$. Παίρνουμε ένα $\alpha \in \mathcal{N}$ με $(\varphi_0(u),\varphi_1(u),\alpha) \in F$. Αφού το G είναι συμμετρικό, έχουμε και $(\varphi_1(u),\varphi_0(u)) \in G$, οπότε παίρνουμε ένα $\beta \in \mathcal{N}$ με $(\varphi_1(u),\varphi_0(u),\beta) \in F$. (Με βάση την Άσκηση 8.1.14 θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι $\beta = \alpha$. Αυτό κάνει τους επόμενους συλλογισμούς κάπως πιο απλούς, αλλά εδώ δεν θα κάνουμε μια τέτοια υπόθεση.)

Ορίζουμε τις συναρτήσεις $\varphi : 2^{n+1} \to \mathcal{X}$ και $\psi : 2^{n+1} \times 2^{n+1} \to \mathcal{N}$ ως εξής:

$$\varphi(v * (i)) = \varphi_i(v)$$

$$\psi(v * (i), w * (j)) = \begin{cases} \psi_i(v, w), & \text{αν } i = j, \\ \alpha, & \text{αν } i = 0 \ \& \ j = 1, \\ \beta, & \text{αν } i = 1 \ \& \ j = 0. \end{cases}$$

Το ζεύγος (φ, ψ) είναι ένας ξεδιπλωμένος ομομορφισμός από το $H +_u H$ στο G: αν $(v * (i), w * (j)) \in H +_u H$, τότε είτε $i = j$ και $(v, w) \in H$ οπότε

$$(\varphi(v * (i)), \varphi(w * (j)), \psi(v * (i), w * (j))) = (\varphi_i(v), \varphi_i(w), \psi_i(v, w)) \in G$$
$$(\text{γιατί } (\varphi_i, \psi_i) \in \mathcal{H} \subseteq \mathsf{Hom}^{\mathsf{u}}(H, G)),$$

είτε $i \neq j$ οπότε $v = w = u$ και

$$(\varphi(v*(i)), \varphi(w*(j)), \psi(v*(i), w*(j))) = \begin{cases} (\varphi_0(u), \varphi_1(u), \alpha) \in F, & \text{αν } i = 0 \ \& \ j = 1, \\ (\varphi_1(u), \varphi_0(u), \beta) \in F, & \text{αν } i = 1 \ \& \ j = 0. \end{cases}$$

Επιπλέον είναι σαφές ότι για κάθε $i \in \{0, 1\}$ και κάθε $v, w \in 2^n$ ισχύει

$$\varphi^{[i]}(v) = \varphi(v * (i)) = \varphi_i(v), \quad \text{και}$$
$$\psi^{[i]}(v, w) = \psi(v * (i), w * (i)) = \psi_i(v, w).$$

Άρα $\varphi^{[i]} = \varphi_i$ και $\psi^{[i]} = \psi_i$, $i \in \{0, 1\}$. Επομένως ισχύει $(\varphi^{[0]}, \psi^{[0]}), (\varphi^{[1]}, \psi^{[1]}) \in \mathcal{H}$, δηλαδή $(\varphi, \psi) \in \mathcal{H} +_u \mathcal{H}$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του (i).

(ii) Θεωρούμε ένα $\mathcal{H} \subseteq \mathsf{Hom}^{\mathsf{u}}(H, G)$ που είναι Borel και $\mathcal{I}_{H,G}$-θετικό καθώς και ένα $u \in 2^n$. Υποθέτουμε προς άτοπο ότι το $\mathcal{H} +_u \mathcal{H}$ δεν είναι $\mathcal{I}_{(H+_u H),G}$-θετικό, δηλαδή ότι $\mathcal{H} +_u \mathcal{H} \in \mathcal{I}_{(H+_u H),G}$. Τότε υπάρχει ακολουθία $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από Borel μικροσκοπικά υποσύνολα του $\mathsf{Hom}^{\mathsf{u}}(H +_u H, G)$ με

(8.4) $$\mathcal{H} +_u \mathcal{H} \subseteq \textstyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n.$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, επειδή το Borel σύνολο $\mathcal{F}_n$ είναι μικροσκοπικό υπάρχει $v'_n = v_n * (i_n) \in 2^{n+1}$ έτσι ώστε το σύνολο

$$\mathcal{F}_n^I(v'_n) = \{\varphi(v'_n) \in \mathcal{X} \mid \exists \psi \ (\varphi, \psi) \in \mathcal{F}_n\}$$

να είναι G-ανεξάρτητο. Από την Άσκηση 8.1.21 για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει ένα Borel G-ανεξάρτητο σύνολο B_n με $\mathcal{F}_n^I(v'_n) \subseteq B_n$. Ορίζουμε

$$\mathcal{H}_n = \{(\varphi_0, \psi_0) \in \mathcal{H} \mid \varphi_0(v_n) \in B_n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(Παρατηρούμε ότι $v_n \in 2^n$, και συνεπώς για κάθε $(\varphi_0, \psi_0) \in \mathcal{H} \subseteq \mathsf{Hom}^{\mathsf{u}}(H, G)$ ορίζεται το $\varphi_0(v_n)$.)

Αφού τα $\mathcal{H}$ και B_n είναι Borel σύνολα προκύπτει άμεσα ότι το $\mathcal{H}_n$ είναι και αυτό Borel. Επίσης για κάθε $x \in \mathcal{H}_n^I(v_n)$ υπάρχει $(\varphi_0, \psi_0) \in \mathcal{H}_n$ με $x = \varphi_0(v_n)$. Από τον ορισμό του $\mathcal{H}_n$ έχουμε ακόμα ότι $\varphi_0(v_n) \in B_n$. Επομένως $\mathcal{H}_n^I(v_n) \subseteq B_n$ και αφού το B_n είναι G-ανεξάρτητο συμπεραίνουμε ότι το $\mathcal{H}_n^I(v_n)$ είναι και αυτό G-ανεξάρτητο. Έχουμε λοιπόν ότι το $\mathcal{H}_n$ είναι μικροσκοπικό και άρα $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_n \in \mathcal{I}_{H,G}$.

Θέτουμε $\mathcal{H}' = \mathcal{H} \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_n$. Επειδή το $\mathcal{H}$ είναι $\mathcal{I}_{H,G}$-θετικό και το $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_n$ ανήκει στο $\mathcal{I}_{H,G}$, είναι άμεσο ότι το $\mathcal{H}'$ είναι επίσης $\mathcal{I}_{H,G}$-θετικό υποσύνολο του $\mathsf{Hom}^{\mathsf{u}}(H, G)$, ειδικότερα δεν είναι μικροσκοπικό. Από το (i) έχουμε ότι $\mathcal{H}' +_u \mathcal{H}' \neq \emptyset$. Παίρνουμε $(\varphi, \psi) \in \mathcal{H}' +_u \mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H} +_u \mathcal{H}$. Από την (8.4) υπάρχει n με $(\varphi, \psi) \in \mathcal{F}_n$, επομένως $\varphi(v'_n) \in \mathcal{F}_n^I(v'_n) \subseteq B_n$. Αλλά τότε

$$\varphi^{[i_n]}(v_n) = \varphi(v_n * (i_n)) = \varphi(v'_n) \in B_n.$$

Από τον ορισμό του $\mathcal{H}_n$ προκύπτει ότι $(\varphi^{[i_n]}, \psi^{[i_n]}) \in \mathcal{H}_n$. Από την άλλη, αφού $(\varphi, \psi) \in \mathcal{H}' +_u \mathcal{H}'$ ισχύει $(\varphi^{[0]}, \psi^{[0]}), (\varphi^{[1]}, \psi^{[1]}) \in \mathcal{H}'$ και ειδικότερα $(\varphi^{[i_n]}, \psi^{[i_n]}) \in \mathcal{H}'$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $\mathcal{H}' \cap \mathcal{H}_n \neq \varnothing$, το οποίο είναι άτοπο από τον ορισμό του $\mathcal{H}'$.

(iii) Υπενθυμίζουμε ότι από την (8.2) έχουμε $\mathsf{Hom}^{\mathsf{u}}(H,G) \subseteq \mathcal{X}^{2^n} \times \mathcal{N}^{2^{2n}}$. Το τελευταίο είναι ένα γινόμενο $2^n + 2^{2n} = k$ παραγόντων, όπου οι πρώτοι 2^n παράγοντες είναι ο $\mathcal{X}$ και οι υπόλοιποι είναι ο $\mathcal{N}$. Θεωρούμε αριθμήσιμα και πυκνά σύνολα $D_{\mathcal{X}} \subseteq \mathcal{X}$ και $D_{\mathcal{N}} \subseteq \mathcal{N}$. Παίρνουμε όλες τις d-μπάλες του $\mathcal{X}$ με κέντρα μέσα από το $D_{\mathcal{X}}$ και ακτίνα $r/(4k)$, όπως επίσης και όλες τις $d_{\mathcal{N}}$-μπάλες του $\mathcal{N}$ με κέντρα μέσα από το $D_{\mathcal{N}}$ και ακτίνα $r/(4k)$. Απαριθμούμε όλες αυτές τις μπάλες και τις συμβολίζουμε με $(B_i^{\mathcal{X}})_{i\in\mathbb{N}}$ και $(B_i^{\mathcal{N}})_{i\in\mathbb{N}}$ αντίστοιχα. Η κάθε μία μπάλα έχει διάμετρο (ως προς την αντίστοιχη μετρική) το πολύ $r/(2k)$.

Για κάθε $\bar{i} = (i_1, \ldots, i_{2^n}) \in \{0,1\}^{2^n}$ και κάθε $\bar{j} = (j_1, \ldots, j_{2^{2n}}) \in \{0,1\}^{2^{2n}}$ θεωρούμε το γινόμενο των μπαλών

$$W(\bar{i}, \bar{j}) = B_{i_1}^{\mathcal{X}} \times \cdots \times B_{i_{2^n}}^{\mathcal{X}} \times B_{j_1}^{\mathcal{N}} \times \cdots \times B_{j_{2^{2n}}}^{\mathcal{N}}.$$

Από την επιλογή μας για τη μετρική γινόμενο ως το άθροισμα των μετρικών των παραγόντων προκύπτει ότι η διάμετρος κάθε $W(\bar{i}, \bar{j})$ είναι το πολύ $k \cdot (r/(2k)) = r/2$. Επιπλέον είναι σαφές ότι η ένωση όλων των $W(\bar{i}, \bar{j})$ είναι ο χώρος $\mathcal{X}^{2^n} \times \mathcal{N}^{2^n \times 2^n}$ και συνεπώς (με βάση την πιο πάνω ταύτιση) περιέχει το σύνολο $\mathsf{Hom}^{\mathsf{u}}(H,G)$, το οποίο περιέχει το $\mathcal{H}$. Έχουμε λοιπόν ότι

$$\mathcal{H} = \bigcup_{\bar{i},\bar{j}} \left(\mathcal{H} \cap W(\bar{i}, \bar{j})\right).$$

Επειδή το $\mathcal{H}$ είναι $\mathcal{I}_{H,G}$-θετικό δεν γίνεται να έχουμε $\mathcal{H} \cap W(\bar{i}, \bar{j}) \in \mathcal{I}_{H,G}$ για κάθε $\bar{i}$, $\bar{j}$. Συνεπώς υπάρχουν $\bar{i}$, $\bar{j}$ έτσι ώστε το $\mathcal{H}_* = \mathcal{H} \cap W(\bar{i}, \bar{j})$ να είναι $\mathcal{I}_{H,G}$-θετικό. Αφού το $\mathcal{H}_*$ είναι η τομή ενός Borel συνόλου με ένα ανοικτό είναι σαφές ότι το $\mathcal{H}_*$ είναι Borel.

Απομένει να επαληθεύσουμε τις ιδιότητες του $\mathcal{H}_*$ σχετικά με τις διαμέτρους. Παίρνουμε $v, w \in 2^n$. Τότε υπάρχουν i_t και j_s έτσι ώστε για κάθε $(\varphi, \psi) \in \mathcal{H}_*$ να ισχύει $\varphi(v) \in B_{i_t}^{\mathcal{X}}$ και $\psi(v,w) \in B_{j_s}^{\mathcal{N}}$. Επομένως

$$\mathcal{H}_*^I(v) \subseteq B_{i_t}^{\mathcal{X}} \quad \text{και} \quad \mathcal{H}_*^{II}(v,w) \subseteq B_{j_s}^{\mathcal{N}}.$$

Άρα

$$d\text{-διάμετρος}(\overline{\mathcal{H}_*^I(v)} \leqslant d\text{-διάμετρος}(\overline{B_{i_t}^{\mathcal{X}}}) \leqslant r/2 < r$$

και

$$d_{\mathcal{N}}\text{-διάμετρος}(\overline{\mathcal{H}_*^{II}(v,w)} \leqslant d_{\mathcal{N}}\text{-διάμετρος}(\overline{B_{j_s}^{\mathcal{N}}}) \leqslant r/2 < r.$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Θεώρημα 8.1.11 (Η $\mathcal{G}_0$-διχοτομία - [**7**]). *Θεωρούμε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και ένα γράφημα G στον $\mathcal{X}$ που είναι αναλυτικό υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$. Τότε για κάθε $S \subseteq \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ που είναι αραιό πλήρους μήκους ισχύει τουλάχιστον ένα από τα ακόλουθα:*

(i) *Ο Borel χρωματικός αριθμός του G είναι το πολύ $\aleph_0$.*

(ii) *Υπάρχει ένα συνεχής ομομορφισμός $f : 2^{\mathbb{N}} \to \mathcal{X}$ από το $\mathcal{G}_S(2^{\mathbb{N}})$ στο G.*

Επιπλέον, αν το $S \subseteq \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$, εκτός από αραιό πλήρους μήκους, είναι και πυκνό, τότε ισχύει ακριβώς ένα από τα παραπάνω.

Απόδειξη. (Miller.) Αρχικά δείχνουμε ότι δεν μπορεί να ισχύουν τα (i) και (ii) όταν το S είναι πυκνό. Ας υποθέσουμε προς άτοπο ότι υπάρχει συνεχής μονομορφισμός $f : 2^{\mathbb{N}} \to \mathcal{X}$ από το $\mathcal{G}_S(2^{\mathbb{N}})$ στο G, όπου το S είναι πυκνό και ότι $\chi_B(G) \leqslant \aleph_0$. Το τελευταίο σημαίνει ότι υπάρχει Borel-μετρήσιμη συνάρτηση

$c : \mathcal{X} \to \mathbb{N}$ που είναι γνήσιος χρωματισμός του G. Η σύνθεση $c \circ f : 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ είναι τότε γνήσιος χρωματισμός του $\mathcal{G}_S(2^{\mathbb{N}})$, καθώς για κάθε $\alpha, \beta \in 2^{\mathbb{N}}$ με $c(f(\alpha)) = c(f(\beta))$ έχουμε $(f(\alpha), f(\beta)) \notin G$, και επομένως $(\alpha, \beta) \notin \mathcal{G}_S(2^{\mathbb{N}})$. Η συνάρτηση $c \circ f$ είναι προφανώς Borel-μετρήσιμη, επομένως $\chi_B(\mathcal{G}_S(2^{\mathbb{N}})) \leqslant \aleph_0$, το οποίο όμως έρχεται σε αντίθεση με το Πόρισμα 8.1.5 δεδομένου ότι το S είναι πυκνό.

Στη συνέχεια θεωρούμε ένα S που είναι αραιό πλήρους μήκους και δείχνουμε ότι ισχύει τουλάχιστον ένα από τα (i) και (ii). Αφού το G είναι αναλυτικό γράφημα, υπάρχει ένα κλειστό σύνολο $F \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{X} \times \mathcal{N}$, έτσι ώστε $G = \exists^{\mathcal{N}} F$.

Θεωρούμε τα γραφήματα $\mathcal{G}_S(2^n)$ στο $2^n \equiv \{0,1\}^n$ και για ευκολία στον συμβολισμό θέτουμε $H_n = \mathcal{G}_S(2^n)$, $n \in \mathbb{N}$. Όπως αναφέραμε στην Παρατήρηση 8.1.8, οποιοδήποτε γράφημα στο $\{0,1\}^0 = \{\Lambda\}$ είναι το κενό σύνολο, ειδικότερα $H_0 = \varnothing$. Επιπλέον από την (8.3) έχουμε ότι

$$\mathsf{Hom}^{\mathsf{u}}(H_0, G) = \mathcal{X} \times \mathcal{N}.$$

Υπενθυμίζουμε ότι στην πιο πάνω ισότητα μεσολαβεί η ταύτιση $(x, \alpha) \equiv (\varphi_x, \psi_\alpha)$, όπου $\varphi_x : \{\Lambda\} \to \mathcal{X} : \varphi_x(\Lambda) = x$ και $\psi_\alpha : \{(\Lambda, \Lambda)\} \to \mathcal{N} : \psi_\alpha(\Lambda, \Lambda) = \alpha$ (βλ. την Παρατήρηση 8.1.8-(iii)).

Το συμπέρασμά μας για την ισχύ του (i) ή του (ii) γίνεται με τη διάκριση σε περιπτώσεις αν το $\mathsf{Hom}^{\mathsf{u}}(H_0, G)$ ανήκει στο $\mathcal{I}_{H_0,G}$ από τον Ορισμό 8.1.9 ή όχι αντίστοιχα. (Παρατηρήστε ότι παρόλο που οι περιπτώσεις $\mathsf{Hom}^{\mathsf{u}}(H_0, G) \in \mathcal{I}_{H_0,G}$ και $\mathsf{Hom}^{\mathsf{u}}(H_0, G) \notin \mathcal{I}_{H_0,G}$ είναι αμοιβαία αποκλειόμενες δεν μπορούμε να αποδείξουμε το ίδιο για τα συμπεράσματα (i) και (ii) αυτών.)

Υποθέτουμε ότι το $\mathsf{Hom}^{\mathsf{u}}(H_0, G)$ ανήκει στο $\mathcal{I}_{H_0,G}$ και δείχνουμε ότι τότε ισχύει το (i). Σε αυτή την περίπτωση υπάρχει ακολουθία Borel μικροσκοπικών συνόλων $(\mathcal{H}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ με $\mathcal{X} \times \mathcal{N} = \mathsf{Hom}^{\mathsf{u}}(H_0, G) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_i$. Ορίζουμε λοιπόν

$$c : \mathcal{X} \to \mathbb{N} : c(x) = \text{ο ελάχιστος } i \text{ με } (x, \vec{0}) \in \mathcal{H}_i,$$

όπου $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0, \dots) \in \mathcal{N}$. Η συνάρτηση c είναι εύκολα Borel-μετρήσιμη επειδή τα σύνολα $\mathcal{H}_i$ είναι Borel.

Δείχνουμε ότι η c είναι και γνήσιος χρωματισμός του G. Αφού κάθε $\mathcal{H}_i$ είναι μικροσκοπικό και αφού το μοναδικό στοιχείο του $\{0,1\}^0$ είναι η κενή ακολουθία Λ έχουμε ότι το $\mathcal{H}_i^I(\Lambda)$ είναι G-ανεξάρτητο για κάθε i.

Με βάση την πιο πάνω ταύτιση $(x, \alpha) \equiv (\varphi_x, \psi_\alpha)$ παρατηρούμε ότι

$$\mathcal{H}_i^I(\Lambda) = \{\varphi(\Lambda) \mid \exists \psi \ (\varphi, \psi) \in \mathcal{H}_i\} = \{x \mid \exists \alpha \ (x, \alpha) \in \mathcal{H}_i\} = \exists^{\mathcal{N}} \mathcal{H}_i.$$

Επομένως, αν $c(x) = c(y) = i$ τότε $(x, \vec{0}), (y, \vec{0}) \in \mathcal{H}_i$ και ειδικότερα $x, y \in \exists^{\mathcal{N}} \mathcal{H}_i = \mathcal{H}_i^I(\Lambda)$. Εφόσον το τελευταίο σύνολο είναι G-ανεξάρτητο, έχουμε $(x, y) \notin G$. Αυτό δείχνει ότι για κάθε $i \in \mathbb{N}$ το σύνολο $c^{-1}[\{i\}]$ είναι G-ανεξάρτητο. (Το κενό σύνολο είναι G-ανεξάρτητο από τον ορισμό.) Επομένως, η c είναι γνήσιος χρωματισμός. Αυτό δείχνει το (i).

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι το $\mathsf{Hom}^{\mathsf{u}}(H_0, G)$ είναι $\mathcal{I}_{H_0,G}$-θετικό και δείχνουμε ότι ισχύει το (ii). Επειδή το S είναι αραιό πλήρους μήκους για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει μοναδικό $u_n \in S$ με $|u_n| = n$. Από την (8.1) ισχύει

$$H_{n+1} = H_n +_{u_n} H_n, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Θεωρούμε μια κατάλληλη μετρική d στον $\mathcal{X}$ και ορίζουμε την ακολουθία $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ από οικογένειες ξεδιπλωμένων ομομορφισμών με την ακόλουθη αναδρομή. Για $n = 0$ εφαρμόζουμε το (iii) του Λήμματος 8.1.10 στο Borel $\mathcal{I}_{H_0,G}$-θετικό σύνολο $\mathsf{Hom}^{\mathsf{u}}(H_0, G)$ και για $r = 1 > 0$. (Το $\mathsf{Hom}^{\mathsf{u}}(H_0, G) = \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ είναι προφανώς Borel υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathcal{N}$.) Παίρνουμε τότε ένα Borel $\mathcal{I}_{H_0,G}$-θετικό $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathsf{Hom}^{\mathsf{u}}(H_0, G)$ που ικανοποιεί το συμπέρασμα του (iii) του λήμματος σχετικά με τις $d, d_{\mathcal{N}}$-διαμέτρους. Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ έχει οριστεί η $\mathcal{F}_n$ και ότι είναι Borel $\mathcal{I}_{H_n,G}$-θετικό υποσύνολο του $\mathsf{Hom}^{\mathsf{u}}(H_n, G)$. Από το (ii) του Λήμματος 8.1.10 η οικογένεια $\mathcal{F}_n +_{u_n} \mathcal{F}_n$ είναι $\mathcal{I}_{(H_n +_{u_n} H_n),G}$-θετικό υποσύνολο του $\mathsf{Hom}^{\mathsf{u}}(H_n +_{u_n} H_n, G)$ και επειδή $H_n +_{u_n} H_n = H_{n+1}$, η $\mathcal{F}_n +_{u_n} \mathcal{F}_n$ είναι $\mathcal{I}_{H_{n+1},G}$-θετικό υποσύνολο του $\mathsf{Hom}^{\mathsf{u}}(H_{n+1}, G)$. Από την Άσκηση 8.1.15 το σύνολο $\mathcal{F}_n +_{u_n} \mathcal{F}_n$ είναι και Borel υποσύνολο του $\mathsf{Hom}^{\mathsf{u}}(H_{n+1}, G)$. Εφαρμόζουμε πάλι το (iii) του Λήμματος 8.1.10 στην $\mathcal{F}_n +_{u_n} \mathcal{F}_n$ για $r = 2^{-(n+1)}$ και παίρνουμε ένα Borel $\mathcal{I}_{H_{n+1},G}$-θετικό $\mathcal{F}_{n+1} \subseteq \mathcal{F}_n +_{u_n} \mathcal{F}_n$ που ικανοποιεί το συμπέρασμα με τις $d, d_{\mathcal{N}}$-διαμέτρους. Αυτό ολοκληρώνει τον αναδρομικό ορισμό.

Ισχύουν τότε οι εξής ιδιότητες για κάθε $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{F}_n \subseteq \mathsf{Hom}^{\mathsf{u}}(H_n, G), \tag{8.5}$$

$$\mathcal{F}_{n+1} \subseteq \mathcal{F}_n +_{u_n} \mathcal{F}_n, \tag{8.6}$$

$$\forall u \in 2^n \ d\text{-διάμετρος}(\overline{\mathcal{F}_n^I(u)}) < 2^{-n}, \tag{8.7}$$

$$\forall u, v \in 2^n \ d_{\mathcal{N}}\text{-διάμετρος}(\overline{\mathcal{F}_n^{II}(u, v)}) < 2^{-n}. \tag{8.8}$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $u, v \in 2^n$, $i \in \{0, 1\}$ και $(\varphi, \psi) \in \mathcal{F}_{n+1}$ έχουμε από την (8.6) ότι $(\varphi, \psi) \in \mathcal{F}_n +_{u_n} \mathcal{F}_n$. Επομένως $(\varphi^{[i]}, \psi^{[i]}) \in \mathcal{F}_n$ και άρα ισχύει $\varphi(u*(i)) = \varphi^{[i]}(u_n) \in \mathcal{F}_n^I(u)$ καθώς και $\psi(u*(i), v*(i)) = \psi^{[i]}(u, v) \in \mathcal{F}_n^{II}(u, v)$. Συμπεραίνουμε λοιπόν πως

$$\mathcal{F}_{n+1}^I(u*(i)) \subseteq \mathcal{F}_n^I(u) \quad \text{και} \quad \mathcal{F}_{n+1}^{II}(u*(i), v*(i)) \subseteq \mathcal{F}_n^{II}(u, v) \tag{8.9}$$

για κάθε $u, v \in 2^n$, $i \in \{0, 1\}$ και $n \in \mathbb{N}$.

Για κάθε $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$ έχουμε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ότι $\alpha|n \in 2^n$ και από τις (8.7) και (8.9) είναι άμεσο ότι η $(\overline{\mathcal{F}_n^I(\alpha|n)})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια φθίνουσα ακολουθία κλειστών συνόλων, των οποίων η d-διάμετρος συγκλίνει στο 0. Επειδή ο $(\mathcal{X}, d)$ είναι πλήρης, η τομή $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\mathcal{F}_n^I(\alpha|n)}$ είναι μονοσύνολο. Ορίζουμε

$$f : 2^{\mathbb{N}} \to \mathcal{X} : \{f(\alpha)\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\mathcal{F}_n^I(\alpha|n)}.$$

Η f είναι συνεχής συνάρτηση γιατί αν έχουμε $\alpha|n = \beta|n$, τότε $f(\alpha), f(\beta) \in \overline{\mathcal{F}_n^I(\alpha|n)}$ και άρα

$$d(f(\alpha), f(\beta)) \leqslant d\text{-διάμετρος}(\overline{\mathcal{F}_n^I(\alpha|n)}) < 2^{-n}.$$

Απομένει να δείξουμε ότι η f είναι ομομορφισμός από το $\mathcal{G}_S(2^{\mathbb{N}})$ στο G. Θεωρούμε $\alpha, \beta \in 2^{\mathbb{N}}$ με $(\alpha, \beta) \in \mathcal{G}_S(2^{\mathbb{N}})$ και δείχνουμε ότι $(f(\alpha), f(\beta)) \in G$. Τότε υπάρχουν $n_0 \in \mathbb{N}$, $i \in \{0, 1\}$ και $\gamma \in 2^{\mathbb{N}}$ με

$$\alpha = u_{n_0} * (i) * \gamma \quad \text{και} \quad \beta = u_{n_0} * (1 - i) * \gamma.$$

(Υπενθυμίζουμε ότι το u_{n_0} είναι το μοναδικό στοιχείο του S μήκους n_0.) Επομένως, για κάθε $n > n_0$ ισχύει $(\alpha|n, \beta|n) \in \mathcal{G}_S(2^n) = H_n$.

Επιπλέον από τις (8.8) και (8.9) είναι σαφές ότι η $(\overline{\mathcal{F}_n^{II}(\alpha|n, \beta|n)})_{n>n_0}$ είναι μια φθίνουσα ακολουθία κλειστών συνόλων, των οποίων η $d_{\mathcal{N}}$-διάμετρος συγκλίνει στο 0. Επομένως υπάρχει (και μάλιστα μοναδικό) $\delta \in \mathcal{N}$ με $\delta \in \bigcap_{n>n_0} \overline{\mathcal{F}_n^{II}(\alpha|n, \beta|n)}$.

Σταθεροποιούμε προς το παρόν ένα $n > n_0$. Αφού $f(\alpha) \in \overline{\mathcal{F}_n^I(\alpha|n)}$, υπάρχει $(\varphi_n^\alpha, \psi_n^\alpha) \equiv (\varphi_n, \psi_n) \in \mathcal{F}_n$ με

$$d(f(\alpha), \varphi_n(\alpha|n)) < 2^{-n}. \tag{8.10}$$

Εφόσον $(\varphi_n, \psi_n) \in \mathcal{F}_n$ ισχύει $\varphi_n(\beta|n) \in \mathcal{F}_n^I(\beta|n)$ και αφού το $f(\beta)$ είναι στοιχείο της κλειστότητας του τελευταίο συνόλου έχουμε ότι η απόσταση του

$f(\beta)$ από το $\varphi_n(\beta|n)$ είναι μικρότερη ή ίση της d-διαμέτρου του $\overline{\mathcal{F}_n^I(\beta|n)}$. Από την (8.7) για $u = \beta|n$ συμπεραίνουμε ότι

$$d(f(\beta), \varphi_n(\beta|n)) < 2^{-n}. \tag{8.11}$$

Ομοίως, εφόσον $(\varphi_n, \psi_n) \in \mathcal{F}_n$ ισχύει $\psi(\alpha|n, \beta|n) \in \mathcal{F}_n^{II}(\alpha|n, \beta|n)$ και αφού το δ είναι στοιχείο της κλειστότητας του τελευταίου συνόλου καταλήγουμε με εφαρμογή της (8.8) στα $u = \alpha|n$ και $v = \beta|n$ στο ότι

$$d_{\mathcal{N}}(\delta, \psi_n(\alpha|n, \beta|n)) < 2^{-n}. \tag{8.12}$$

Τέλος, αφού $(\alpha|n, \beta|n) \in H_n$ και $(\varphi_n, \psi_n) \in \mathcal{F}_n \subseteq \mathsf{Hom}^{\mathsf{u}}(H_n, G)$, όπου στον τελευταίο εγκλεισμό χρησιμοποιήσαμε την (8.5), έχουμε ότι

$$(\varphi_n(\alpha|n), \varphi_n(\beta|n), \psi_n(\alpha|n, \beta|n)) \in F. \tag{8.13}$$

Θεωρούμε μια ακολουθία $(\varphi_n^\alpha, \psi_n^\alpha)_{n>n_0} \equiv (\varphi_n, \psi_n)_{n>n_0}$, όπως πιο πάνω. Είναι άμεσο από τις (8.10), (8.11) και (8.12) πως

$$\varphi_n(\alpha|n) \xrightarrow{d} f(\alpha), \quad \varphi_n(\beta|n) \xrightarrow{d} f(\beta), \quad \text{και} \quad \psi_n(\alpha|n, \beta|n) \xrightarrow{d_{\mathcal{N}}} \delta.$$

Εφόσον το F είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathcal{X} \times \mathcal{N}$, προκύπτει από την (8.13) ότι $(f(\alpha), f(\beta), \delta) \in F$. Ειδικότερα $(f(\alpha), f(\beta)) \in G$ που είναι και το ζητούμενο. □

Ο Miller [**31, 30**] παρατήρησε ότι η $\mathcal{G}_0$-διχτομία δίνει μια σειρά από γνωστά αποτελέσματα της περιοχής. Δύο χαρακτηριστικά παραδείγματα είναι τα Θεωρήματα 5.3.6 (Θεώρημα Τέλειου Συνόλου) και 6.4.7. Αποδεικνύουμε ξανά τα τελευταία με βάση την $\mathcal{G}_0$-διχοτομία.

Θεώρημα 8.1.12 (Το Θέωρημα Τέλειου Συνόλου εκ νέου). *Κάθε υπεραριθμήσιμο αναλυτικό υποσύνολο ενός Πολωνικού χώρου περιέχει ένα μη κενό τέλειο υποσύνολο.*

Απόδειξη. (Με εφαρμογή της $\mathcal{G}_0$-διχοτομίας.)
Θεωρούμε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και ένα αναλυτικό $A \subseteq \mathcal{X}$. Δείχνουμε ότι το A είτε είναι αριθμήσιμο είτε περιέχει ένα μη κενό τέλειο υποσύνολο. Ορίζουμε

$$G = \{(x, y) \in A \times A \mid x \neq y\}.$$

Το G είναι εύκολα αναλυτικό γράφημα στον $\mathcal{X}$. Αν ο Borel χρωματικός αριθμός του G είναι πολύ $\aleph_0$, τότε υπάρχει μια Borel μετρήσιμη συνάρτηση $c : \mathcal{X} \to \mathbb{N}$, έτσι ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το σύνολο $c^{-1}[\{n\}]$ να είναι G-ανεξάρτητο. Αυτό σημαίνει ότι το $c^{-1}[\{n\}] \cap A$ είναι το πολύ μονοσύνολο: αν $x, y \in c^{-1}[\{n\}]$, τότε $(x, y) \notin G$, και αν έχουμε επιπλέον πως $x, y \in A$ προκύπτει ότι $x = y$. Είναι σαφές ότι $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} c^{-1}[\{n\}] \cap A$, επομένως το A είναι αριθμήσιμη ένωση συνόλων που περιέχουν το πολύ ένα στοιχείο, και άρα το A είναι αριθμήσιμο.

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι ο Borel χρωματικός αριθμός του G δεν είναι το πολύ $\aleph_0$ και αποδεικνύουμε ότι το A έχει ένα μη κενό τέλειο υποσύνολο. Παίρνουμε ένα $S \subseteq \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ που είναι αραιό πλήρους μήκους και πυκνό. Από το Θεώρημα 8.1.11 ($\mathcal{G}_0$-διχοτομία) υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $f : 2^{\mathbb{N}} \to \mathcal{X}$ που είναι ομομορφισμός από το $\mathcal{G}_S(2^{\mathbb{N}})$ στο G. Παρατηρούμε ότι η f παίρνει τιμές στο A: πράγματι αν $\gamma \in 2^{\mathbb{N}}$, αφού $\Lambda \in S$ έχουμε ότι $(\gamma, (1-\gamma(0)) * \gamma^*) \in \mathcal{G}_S(2^{\mathbb{N}})$ και άρα $(f(\gamma), f((1-\gamma(0)) * \gamma^*)) \in G$, ειδικότερα $f(\gamma) \in A$. Επομένως αρκεί να κατασκευάσουμε μια συνεχή συνάρτηση $g : 2^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}}$ έτσι ώστε η σύνθεση $f \circ g : 2^{\mathbb{N}} \to \mathcal{X}$ να είναι μονομορφισμός.

Η πάνω συνάρτηση g είναι η φ^* για μια κατάλληλη μονότονη $\varphi : \{0,1\}^{<\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ (Ορισμός 2.5.9 και Πρόταση 2.5.10), επομένως κατασκευάζουμε την φ. Ο ορισμός του $\varphi(u)$ γίνεται με επαγωγή στο μήκος $|u|$ του $u \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$.

Αρχικά θέτουμε $\varphi(\Lambda) = \Lambda$. Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ έχουν οριστεί τα $\varphi(v)$ για κάθε $v \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ με $|v| \leqslant n$ έτσι ώστε για κάθε $v, w \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ με $|w| < |v| \leqslant n$ να ισχύουν τα εξής:

$$|v| \leqslant |\varphi(v)|, \tag{8.14}$$

$$w \sqsubseteq v \implies \varphi(w) \sqsubseteq \varphi(v), \tag{8.15}$$

$$f[\mathcal{N}^{2^{\mathbb{N}}}_{\varphi(w*(0))}] \cap f[\mathcal{N}^{2^{\mathbb{N}}}_{\varphi(w*(1))}] = \varnothing. \tag{8.16}$$

Ορίζουμε τα $\varphi(v * (i))$, όπου $v \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ με $|v| = n$ και $i = 0, 1$. Θεωρούμε ένα τέτοιο v. Από την πυκνότητα του S υπάρχει $u_s \in S$ με $\varphi(v) \sqsubseteq u_s$. Θέτουμε

$$\alpha_0 = u_s * (0) * \vec{0} \quad \text{και} \quad \alpha_1 = u_s * (1) * \vec{0},$$

όπου $\vec{0} = (0, 0, \dots)$. Τότε $(\alpha_0, \alpha_1) \in \mathcal{G}_S(2^{\mathbb{N}})$ και επομένως $(f(\alpha_0), f(\alpha_1)) \in G$. Ειδικότερα ισχύει $f(\alpha_0) \neq f(\alpha_1)$ και άρα υπάρχουν ανοικτά ξένα $U_0, U_1 \subseteq \mathcal{X}$ με $f(\alpha_i) \in U_{\alpha_i}$, $i = 0, 1$. Από τη συνέχεια της f υπάρχει $m > |\varphi(v)|$, έτσι ώστε $f[\mathcal{N}^{2^{\mathbb{N}}}_{\alpha_i|m}] \subseteq U_{\alpha_i}$, $i = 0, 1$. Ορίζουμε

$$\varphi(v * i) = \alpha_i|m, \quad i = 0, 1.$$

Εφόσον $m > |\varphi(v)| \geqslant |v|$ είναι σαφές ότι $|v * (i)| \leqslant m = |\varphi(v * (i))|$, $i = 0, 1$. Επιπλέον αφού $m > |\varphi(v)|$ και $\varphi(v) \sqsubseteq u_s \sqsubseteq \alpha_i$, έχουμε ότι $\varphi(v) \sqsubseteq \alpha_i|m = \varphi(v * (i))$, $i = 0, 1$. Τέλος

$$f[\mathcal{N}^{2^{\mathbb{N}}}_{\varphi(v*(i))}] = f[\mathcal{N}^{2^{\mathbb{N}}}_{\alpha_i|m}] \subseteq U_{\alpha_i},\ i = 0, 1,$$

και επειδή τα σύνολα U_0, U_1 είναι ξένα έχουμε ότι $f[\mathcal{N}^{2^{\mathbb{N}}}_{\varphi(v*(0))}] \cap f[\mathcal{N}^{2^{\mathbb{N}}}_{\varphi(v*(1))}] = \varnothing$. Είναι τότε άμεσο ότι ισχύουν οι (8.14), (8.15) και (8.16) για το $n+1$ στη θέση του n. Αυτό ολοκληρώνει το επαγωγικό βήμα.

Από τις (8.14) και (8.15) η συνάρτηση φ είναι κατάλληλη και μονότονη. Συνεπώς από την Πρόταση 2.5.10 ορίζεται η $g = \varphi^* : 2^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}}$ και είναι συνεχής συνάρτηση. Απομένει να δείξουμε ότι η $f \circ g : 2^{\mathbb{N}} \to \mathcal{X}$ είναι μονομορφισμός.

Θεωρούμε $\gamma_0, \gamma_1 \in 2^{\mathbb{N}}$ με $\gamma_0 \neq \gamma_1$ και n τον ελάχιστο φυσικό με $\gamma_0(n) \neq \gamma_1(n)$. Θέτουμε $w = \gamma_0|n = \gamma_1|n$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $w * (i) \sqsubseteq \gamma_i$, $i = 0, 1$. Από τον ορισμό της $g = \varphi^*$ ισχύει $g(\gamma_i) \in \mathcal{N}^{2^{\mathbb{N}}}_{\varphi(w*(i))}$, $i = 0, 1$. Από την (8.16) προκύπτει ότι τα $f(g(\gamma_0))$ και $f(g(\gamma_1))$ ανήκουν σε δύο ξένα υποσύνολα. Ειδικότερα είναι διαφορετικά, δηλαδή $(f \circ g)(\gamma_0)) \neq (f \circ g)(\gamma_1)$. $\square$

Θεώρημα 8.1.13 (Το Θεώρημα 6.4.7 εκ νέου). *Για κάθε Πολωνικούς χώρους $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ και κάθε Borel σύνολο $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, για το οποίο για κάθε $x \in \mathcal{X}$ η τομή P_x είναι αριθμήσιμο σύνολο, έχουμε ότι η προβολή $\exists^{\mathcal{Y}} P$ είναι Borel σύνολο και υπάρχει ακολουθία $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ από Borel υποσύνολα του $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, έτσι ώστε $P = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n$, $\exists^{\mathcal{Y}} P_n = \exists^{\mathcal{Y}} P$ και το P_n είναι το γράφημα μια συνάρτησης $f_n : \exists^{\mathcal{Y}} P \to \mathcal{Y}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

Απόδειξη. (Με εφαρμογή της $\mathcal{G}_0$-διχοτομίας.)
Ορίζουμε το γράφημα G στον $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ ως εξής:

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in G \iff x_1 = x_2 \ \&\ y_1 \neq y_2 \ \&\ y_1, y_2 \in P_{x_1}.$$

Το G είναι εύκολα Borel υποσύνολο του $(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}) \times (\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$.

Ισχυρισμός. Το G έχει Borel χρωματικό αριθμό το πολύ $\aleph_0$.

Απόδειξη ισχυρισμού. Ας υποθέσουμε προς άτοπο ότι $\chi_B(G) \nleqslant \aleph_0$. Θεωρούμε ένα $S \subseteq \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ που είναι αραιό πλήρους μήκους και πυκνό. Από το Θεώρημα 8.1.11 ($\mathcal{G}_0$-διχοτομία) υπάρχει τότε μια συνεχής συνάρτηση $f =$

$(g,h): 2^{\mathbb{N}} \to \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ που είναι συνεχής ομομορφισμός από το $\mathcal{G}_S(2^{\mathbb{N}})$ στο G. Αν $(\alpha,\beta) \in \mathcal{G}_S(2^{\mathbb{N}})$, τότε $(f(\alpha), f(\beta)) \in G$ και ειδικότερα $g(\alpha) = g(\beta)$.

Δείχνουμε ότι η $g : 2^{\mathbb{N}} \to \mathcal{X}$ είναι σταθερή συνάρτηση. Θεωρούμε τη διμελή σχέση $\sim$ στο $2^{\mathbb{N}}$ που ορίζεται ως εξής:

$$\alpha \sim_S \beta \iff \exists \alpha_0, \ldots, \alpha_{n+1} \ (\alpha_0 = \alpha \ \& \ \alpha_{n+1} = \beta \ \& \ \forall i \leqslant n \ ((\alpha_i, \alpha_{i+1}) \in \mathcal{G}_S(2^{\mathbb{N}}))).$$

Είναι άμεσο από τα προηγούμενα ότι αν $\alpha \sim_S \beta$, τότε $g(\alpha) = g(\beta)$. Αν έχουμε $\alpha, \beta \in 2^{\mathbb{N}}$, τότε από την Άσκηση 8.1.19 υπάρχει ακολουθία $(\beta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ με $\beta_0 = \alpha$, $\beta_i \sim_S \beta_{i+1}$ και $\beta_i \to \beta$. Τότε έχουμε $g(\beta_i) = g(\beta_{i+1})$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$ και ειδικότερα $g(\alpha) = g(\beta_0) = g(\beta_i)$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Από τη συνέχεια της g προκύπτει ότι $g(\alpha) = g(\beta)$ και η g είναι σταθερή.

Έστω $x \in \mathcal{X}$ η σταθερή τιμή της g έτσι που $f(\alpha) = (x, h(\alpha))$ για κάθε $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$. Τότε για κάθε $(\alpha,\beta) \in \mathcal{G}_S(2^{\mathbb{N}})$, αφού η f είναι ομομορφισμός από το $\mathcal{G}_S(2^{\mathbb{N}})$ στο G έχουμε ότι $h(\alpha) \neq h(\beta)$ και $h(\alpha), h(\beta) \in P_x$. Αφού $\Lambda \in S$ έχουμε για κάθε $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$ ότι $(\alpha, (1-\alpha(0)) * \alpha^*) \in \mathcal{G}_S(2^{\mathbb{N}})$ και ειδικότερα $h(\alpha) \in P_x$. Επομένως, η h παίρνει τιμές στο P_x και ειδικότερα $P_x \neq \emptyset$. Θεωρούμε μια ένα-προς-ένα απαρίθμηση $(y_n)_{n\in I}$ του P_x, όπου $I \subseteq \mathbb{N}$ (προφανώς $P_x \neq \emptyset$) και ορίζουμε τη συνάρτηση

$$c_x : 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N} : c_x(\alpha) = \text{ο μοναδικός } n \text{ με } h(\alpha) = y_n.$$

Η c_x είναι Borel-μετρήσιμη γιατί ισχύει $c_x^{-1}[\{n\}] = h^{-1}[\{y_n\}]$ για κάθε $n \in I$ καθώς και $c_x^{-1}[\{n\}] = \emptyset$ για κάθε $n \notin I$ – υπενθυμίζουμε ότι η h είναι συνεχής. Επιπλέον για κάθε $(\alpha,\beta) \in \mathcal{G}_S(2^{\mathbb{N}})$ έχουμε $h(\alpha) \neq h(\beta)$, επομένως $c_x(\alpha) \neq c_x(\beta)$. Ισοδύναμα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $\alpha, \beta \in c_x^{-1}[\{n\}]$ ισχύει $(\alpha,\beta) \notin \mathcal{G}_S(2^{\mathbb{N}})$. Δηλαδή το $c_x^{-1}[\{n\}]$ είναι G-ανεξάρτητο για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Καταλήγουμε στο ότι η $c_x : 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ είναι ένας γνήσιος Borel χρωματισμός του $\mathcal{G}_S(2^{\mathbb{N}})$ και επομένως $\chi_B(\mathcal{G}_S(2^{\mathbb{N}})) \leqslant \aleph_0$, που είναι άτοπο από το Πόρισμα 8.1.5. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του ισχυρισμού.

Εφόσον $\chi_B(G) \leqslant \aleph_0$, υπάρχει μια Borel-μετρήσιμη συνάρτηση $c : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{N}$ που είναι γνήσιος Borel χρωματισμός του G. Παρατηρούμε ότι για κάθε $(x,y), (x,y') \in P$ με $c(x,y) = c(x,y')$ έχουμε $((x,y),(x,y')) \notin G$ επειδή ο c είναι γνήσιος χρωματισμός. Επομένως από τον ορισμό του G προκύπτει ότι $y = y'$.

Στη συνέχεια ορίζουμε το σύνολο

$$R = \{(x,n) \in \mathcal{X} \times \mathbb{N} \mid \exists y \ (\ (x,y) \in P \ \& \ c(x,y) = n \ )\}$$

και παρατηρούμε από τα πιο πάνω ότι

$$R = \{(x,n) \in \mathcal{X} \times \mathbb{N} \mid \exists ! y \ (\ (x,y) \in P \ \& \ c(x,y) = n \ )\}.$$

Το R είναι προφανώς αναλυτικό σύνολο. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 6.4.3 (το σύνολο των σημείων μοναδικότητας Borel συνόλου) στο Borel σύνολο $\{(x,n,y) \in \mathcal{X} \times \mathbb{N} \times \mathcal{Y} \mid (x,y) \in P \ \& \ c(x,y) = n\}$ παίρνουμε ότι το R είναι επίσης συναναλυτικό σύνολο. Επομένως από το Θεώρημα του Suslin (Πόρισμα 5.2.2) έχουμε ότι το R είναι Borel.

Παρατηρούμε επίσης ότι

$$x \in \exists^{\mathcal{Y}} P \iff \exists n \ (x,n) \in R.$$

(Για την ευθεία κατεύθυνση θεωρούμε $y \in \mathcal{Y}$ με $(x,y) \in P$ και παίρνουμε $n = c(x,y)$, η αντίστροφη κατεύθυνση είναι εξίσου άμεση.) Από αυτό προκύπτει ότι η προβολή $\exists^{\mathcal{Y}} P$ είναι Borel υποσύνολο του $\mathcal{X}$.

Έπειτα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$P_n = \{(x,y) \in P \mid c(x,y) = n \ \vee \ ((x,n) \notin R \ \& \ \forall k < c(x,y) \ (x,k) \notin R)\}.$$

Σχόλιο 1. Η ιδέα για τον ορισμό του P_n είναι να πάρουμε αρχικά όλα τα (x,y) για τα οποία $c(x,y) = n$ – σύμφωνα με τα προηγούμενα για κάθε x, n

υπάρχει το πολύ ένα τέτοιο y. Αυτό όμως από μόνο του δεν φτάνει για να μας εξασφαλίσει ότι $\exists^{\mathcal{Y}} P_n = \exists^{\mathcal{Y}} P$. Γι' αυτό συμπεριλαμβάνουμε και την περίπτωση των x για τα οποία *δεν υπάρχει* y' με $(x, y') \in P$ και $c(x, y') = n$, δηλαδή την περίπτωση όπου $(x, n) \notin R$. Προφανώς για το $m = c(x, y)$ ισχύει $(x, m) \in R$, οπότε στην περίπτωση που $(x, n) \notin R$ ζητάμε το $m = c(x, y)$ να είναι ο ελάχιστος φυσικός k με $(x, k) \in R$. Προφανώς υπάρχει ο ελάχιστος τέτοιος m για κάποιο y, τότε σε αυτή την περίπτωση θα έχουμε για το τελευταίο y ότι $(x, y) \in P_n$.

Πίσω στην απόδειξη αφού τα P, R είναι Borel και η c Borel-μετρήσιμη, είναι άμεσο ότι το P_n είναι Borel υποσύνολο του P. Επιπλέον, αν έχουμε $x \in \exists^{\mathcal{Y}} P$, διακρίνουμε περιπτώσεις: αν υπάρχει y με $(x, y) \in P$ και $c(x, y) = n$, τότε για ένα τέτοιο y έχουμε $(x, y) \in P_n$. Σε διαφορετική περίπτωση έχουμε $(x, n) \notin R$, οπότε όπως εξηγήσαμε πιο πάνω παίρνουμε

$$m = \min\{c(x, y) \mid (x, y) \in P\},$$

το τελευταίο σύνολο είναι μη κενό γιατί $x \in \exists^{\mathcal{Y}} P$. Θεωρούμε ένα y με $(x, y) \in P$ και $c(x, y) = m$. Αν για κάποιο $k < m = c(x, y)$ είχαμε $(x, k) \in R$, θα υπήρχε y' με $(x, y') \in P$ και $c(x, y') = k < m$ που έρχεται σε αντίθεση με τον ορισμό του m. Επομένως για κάθε $k < c(x, y)$ ισχύει $(x, k) \notin R$ και άρα $(x, y) \in P_n$. Αυτό δείχνει ότι $\exists^{\mathcal{Y}} P = \exists^{\mathcal{Y}} P_n$.

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι $P = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n$: θεωρούμε $(x, y) \in P$ και παίρνουμε $n = c(x, y)$. Απομένει να δείξουμε ότι το P_n είναι το γράφημα μιας συνάρτησης (η οποία είναι αναγκαστικά ορισμένη στο σύνολο $\exists^{\mathcal{Y}} P_n = \exists^{\mathcal{Y}} P$). Παίρνουμε λοιπόν $(x, y), (x, y') \in P_n$. Αν $(x, n) \in R$, τότε $c(x, y) = n$ και $c(x, y') = n$. Αν $(x, n) \notin R$, τότε $c(x, y) =$ ο ελάχιστος k για τον οποίο $(x, k) \in R$ καθώς και $c(x, y') =$ ο ελάχιστος k για τον οποίο $(x, k) \in R$. Σε κάθε περίπτωση έχουμε $c(x, y) = c(x, y')$ και όπως πιο πάνω συμπεραίνουμε ότι $y = y'$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

Σχόλιο 2. Αν θέλαμε να δείξουμε τον πιο απλό ισχυρισμό ότι το P γράφεται ως την ένωση μιας ακολουθίας Borel συνόλων $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$, όπου κάθε Q_n είναι το γράφημα μιας συνάρτησης, χωρίς να μας ενδιαφέρει δηλαδή η έκταση των $\exists^{\mathcal{Y}} Q_n$ ή σε ποια κλάση ανήκει το $\exists^{\mathcal{Y}} P$, τότε θα ορίζαμε πιο απλά

$$Q_n = \{(x, y) \in P \mid c(x, y) = n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Προφανώς κάθε Q_n είναι Borel υποσύνολο του P. Επιπλέον για κάθε $(x, y) \in P$ έχουμε $(x, y) \in Q_{c(x,y)}$, επομένως $P = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q_n$. Ακόμα αν έχουμε $(x, y), (x, y') \in P_n$ για κάποιο n, τότε $c(x, y) = n = c(x, y')$, και όπως πιο πάνω, από αυτό συνεπάγεται ότι $y = y'$. Επομένως η $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ έχει όλες τις ζητούμενες ιδιότητες. Παρατηρούμε ότι εδώ δεν χρειάζεται να επικαλεστούμε το Θεώρημα 6.4.3 (το σύνολο των σημείων μοναδικότητας Borel συνόλου). ▫

Ασκήσεις

Άσκηση 8.1.14. Για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και κάθε διμελή συμμετρική σχέση στο $\mathcal{X}$ που είναι αναλυτικό υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ υπάρχει ένα κλειστό $F \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ έτσι ώστε $R = \exists^{\mathcal{N}} F$ και για κάθε $\alpha \in \mathcal{N}$ η διμελής σχέση $F^{\alpha} = \{(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X} \mid (x, y, \alpha) \in F\}$ να είναι συμμετρική.

Άσκηση 8.1.15. Θεωρούμε ένα $n \in \mathbb{N}$, έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και γραφήματα $H \subseteq 2^n \times 2^n$, $G \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ με το G αναλυτικό. Θεωρούμε επίσης ένα κλειστό $F \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ με $G = \exists^{\mathcal{N}} F$.

Τότε το $\mathsf{Hom}^{\mathsf{u}}(H, G)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{X}^{2^n} \times \mathcal{N}^{2^{2n}}$. Επιπλέον για κάθε Borel σύνολο $\mathcal{H} \subseteq \mathsf{Hom}^{\mathsf{u}}(H, G)$ και κάθε $u \in H$ το σύνολο $\mathcal{H} +_u \mathcal{H}$ είναι Borel.

Άσκηση 8.1.16. Για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και κάθε γράφημα G στον $\mathcal{X}$ ο Borel χρωματικός αριθμός του G είναι $\leqslant \aleph_0$ αν και μόνο αν υπάρχει μια διαμέριση $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του $\mathcal{X}$ από G-ανεξάρτητα Borel σύνολα.

Άσκηση 8.1.17. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το σύνολο

$$J_n = \{2^n, 2^n + 1, \ldots, 2^{n+1} - 1\}.$$

Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζεται μια πεπερασμένη ακολουθία $(u_i)_{i\in J_n}$ από στοιχεία του $\{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ με τις εξής ιδιότητες: α) για κάθε $i \in J_n$ ισχύει $|u_i| = i - 1$, β) για κάθε $v \in \{0,1\}^n$ υπάρχει $i \in J_n$ με $v \sqsubseteq u_i$.

Συμπεράνετε ότι το σύνολο $S = \{u_i \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}} \mid i \in \mathbb{N}\}$, όπου τα u_i είναι όπως πιο πάνω, είναι αραιό, πλήρους μήκους και πυκνό.

Άσκηση 8.1.18. Θεωρούμε ένα $S \subseteq \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$. Αν έχουμε $\alpha, \beta \in 2^{\mathbb{N}}$ γράφουμε $\alpha \sim_S \beta$ αν υπάρχουν $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in 2^{\mathbb{N}}$, όπου $n > 0$, με $\alpha_0 = \alpha$, $\alpha_n = \beta$ και $(\alpha_i, \alpha_{i+1}) \in \mathcal{G}_S(2^{\mathbb{N}})$ για κάθε $i < n - 1$. (Στη γλώσσα της Θεωρίας Γραφημάτων αυτό σημαίνει ότι τα α και β ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του $\mathcal{G}_S$.)

Λόγω της συμμετρικότητας του $\mathcal{G}_S$ αν $\alpha \sim_S \beta$, τότε $\beta \sim_S \alpha$. Επιπλέον είναι σαφές ότι αν $\alpha \sim_S \beta$ και $\beta \sim_S \gamma$, τότε $\alpha \sim_S \gamma$.

Δείξτε ότι αν $\alpha \sim_S \beta$, τότε υπάρχει i_0, έτσι ώστε για κάθε $i \geqslant i_0$ ισχύει $\alpha(i) = \beta(i)$.

Άσκηση 8.1.19. Αν το $S \subseteq \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ είναι πλήρους μήκους (δηλαδή για κάθε n υπάρχει $u \in S$ με $|u| = n$), τότε για κάθε $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$ και κάθε $u, v \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ με $|u| = |v|$ ισχύει $u * \alpha \sim_S v * \alpha$, όπου η $\sim_S$ είναι όπως στην Άσκηση 8.1.18.

Συμπεράνετε ότι αν το S είναι πλήρους μήκους, τότε για κάθε $\beta, \gamma \in 2^{\mathbb{N}}$ υπάρχει ακολουθία $(\beta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του $2^{\mathbb{N}}$, η οποία συγκλίνει στο β και για την οποία ισχύει επιπλέον ότι $\beta_i \sim_S \beta_{i+1}$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$ καθώς και $\beta_0 = \gamma$.

Άσκηση 8.1.20. Για κάθε $S \subseteq \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ και κάθε $u \in S$ ισχύει

$$\mathcal{G}_S(2^{n+1}) \subseteq \mathcal{G}_S(2^n) +_u \mathcal{G}_S(2^n),$$

όπου $n = |u|$. Μάλιστα, αν το u είναι το μοναδικό στοιχείο του S με μήκος n, τότε ισχύει και η αντίστροφη συμπερίληψη.

Άσκηση 8.1.21. Θεωρούμε ένα γράφημα G σε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$. Για κάθε $A \subseteq \mathcal{X}$ θέτουμε

$$A_G = \{x \in \mathcal{X} \mid \exists y \in A \ (x, y) \in G\}.$$

Τότε για κάθε $A, C \subseteq \mathcal{X}$ ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) Αν τα A και G είναι αναλυτικά σύνολα, τότε και το A_G είναι αναλυτικό.

(ii) Αν το A είναι G-ανεξάρτητο, τότε $A \cap A_G = \varnothing$.

(iii) Ισχύει $A \cap C_G \neq \varnothing$ αν και μόνο αν $A_G \cap C \neq \varnothing$.

Συμπεράνετε ότι για κάθε αναλυτικό γράφημα G σε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και κάθε G-ανεξάρτητο αναλυτικό $A \subseteq \mathcal{X}$ υπάρχει ένα G-ανεξάρτητο Borel σύνολο B με $A \subseteq B$.

Α′

Λύσεις Ασκήσεων και Υποδείξεις

Κεφάλαιο 2

Άσκηση 2.1.10. Αρχικά δείχνουμε ότι οι συναρτήσεις ρ και d είναι μετρικές. Θεωρούμε $x, y \in X$. Είναι σαφές ότι $\rho(x,y), \sigma(x,y) \geqslant 0$ και πως $\rho(x,y) = \rho(y,x)$, $\sigma(x,y) = \sigma(y,x)$.

Επιπλέον, αν $\rho(x,y) = 0$, τότε $\rho(x,y) < 1$ άρα $\rho(x,y) = d(x,y) = 0$ και $x = y$. Αν $\sigma(x,y) = 0$ είναι σαφές ότι $d(x,y) = 0$ και $x = y$.

Επαληθεύουμε την τριγωνική ανισότητα για την ρ, παρατηρούμε ότι αν $\rho(x,z) \geqslant 1$ ή $\rho(z,y) \geqslant 1$, τότε $\rho(x,y) \leqslant 1 \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y)$. Επομένως υποθέτουμε ότι $\rho(x,z), \rho(z,y) < 1$, οπότε έχουμε $\rho(x,z) = d(x,z)$ και $\rho(z,y) = d(z,y)$. Σε αυτή την περίπτωση ισχύει

$$\rho(x,y) \leqslant d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y) = \rho(x,z) + \rho(z,y).$$

Η τριγωνική ανισότητα για την σ προκύπτει από το γεγονός ότι η συνάρτηση $f(t) = \dfrac{t}{1+t}, t \geqslant 0$ είναι αύξουσα. (Ένας τρόπος για να το δούμε αυτό είναι παίρνοντας την 1η παράγωγο της f, η οποία είναι θετική.)

Θα έχουμε λοιπόν $\sigma(x,y) = f(d(x,y)) \leqslant f(d(x,z) + d(z,y))$ οπότε

$$\begin{aligned}
\sigma(x,y) &\leqslant \frac{d(x,z) + d(z,y)}{1 + d(x,z) + d(z,y)} \\
&= \frac{d(x,z)}{1 + d(x,z) + d(z,y)} + \frac{d(z,y)}{1 + d(x,z) + d(z,y)} \\
&\leqslant \frac{d(x,z)}{1 + d(x,z)} + \frac{d(z,y)}{1 + d(z,y)} \\
&= \sigma(x,z) + \sigma(z,y).
\end{aligned}$$

Έπειτα δείχνουμε ότι οι μετρικές είναι ισοδύναμες. Θεωρούμε μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον X και $x \in X$. Αν $d(x_n, x) \to 0$, τότε για όλα τα μεγάλα n θα έχουμε $d(x_n, x) < 1$ και άρα $\rho(x_n, x) = d(x_n, x)$. Επομένως $\rho(x_n, x) \to 0$. Αντίστροφα, αν $\rho(x_n, x) \to 0$, τότε για όλα τα μεγάλα n έχουμε $\rho(x_n, x) < 1$, επομένως $\rho(x_n, x) = d(x_n, x) \to 0$.

Για την σ χρησιμοποιούμε ότι οι συναρτήσεις $f(t) = \dfrac{t}{1+t}$, $t \geqslant 0$, και $g(s) = \dfrac{s}{1-s}$, $s \in [0,1)$ είναι συνεχείς στο 0.

Επειδή η διαχωρισιμότητα είναι τοπολογική ιδιότητα και οι μετρικές είναι ισοδύναμες, είναι σαφές ότι αν ο (X,d) είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος, τότε και οι μετρικοί χώροι (X,ρ) και (X,σ) είναι διαχωρίσιμοι.

Τέλος δείχνουμε το ζητούμενο για την πληρότητα. Υποθέτουμε ότι ο (X,d) είναι πλήρης μετρικός χώρος και θεωρούμε μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του X. Αν η ακολουθία είναι ρ-Cauchy, τότε υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για κάθε $n, m \geqslant N$ ισχύει $\rho(x_n, x_m) < 1$, άρα $\rho(x_n, x_m) = d(x_n, x_m)$. Από αυτό προκύπτει ότι η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι d-Cauchy και αφού ο (X,d) είναι πλήρης υπάρχει $x \in X$ με $d(x_n,x) \to x$. Όπως είδαμε πιο πάνω, αυτό είναι ισοδύναμο με $\rho(x_n,x) \to 0$.

Υποθέτουμε ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι σ-Cauchy και δείχνουμε ότι είναι και d-Cauchy. Θεωρούμε $r > 0$. Αφού η προηγούμενη συνάρτηση g είναι συνεχής στο 0, υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $s \in [0,1)$ με $|s| < \delta$ ισχύει $g(s) < r$. Για το $\delta > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, έτσι ώστε για κάθε $n,m \geqslant n_0$ έχουμε $s_{n,m} = \sigma(x_n,x_m) < \delta$, άρα $g(s_{n,m}) = g(\sigma(x_n,x_m)) = d(x_n,x_m) < r$. Επομένως η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι d-Cauchy και όπως πριν, αφού ο (X,d) είναι πλήρης, έχουμε ότι υπάρχει $x \in X$ με $d(x_n,x) \to 0$. Σύμφωνα με τα προηγούμενα $\sigma(x_n,x) \to 0$.

Καταλήγουμε ότι οι μετρικοί χώροι (X,ρ) και (X,σ) είναι πλήρεις.

Άσκηση 2.1.11. Είναι σαφές ότι η f είναι ένα-προς-ένα γιατί αν $f(y_1) = f(y_2)$ τότε $\rho(y_1,y_2) = d(f(y_1),f(y_2)) = 0$ και $y_1 = y_2$. Επίσης είναι σαφές ότι για κάθε ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον και κάθε $y \in Y$ έχουμε

$$y_n \xrightarrow{\rho} y \iff f(y_n) \xrightarrow{d} f(y),$$

συνεπώς τόσο η f όσο και η f^{-1} είναι συνεχείς συναρτήσεις.

Για κάθε Cauchy ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον (Y,ρ) η ακολουθία $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy στον (X,d), επομένως αν ο (X,d) είναι πλήρης τότε υπάρχει $x \in X$ με $f(y_n) \xrightarrow{d} x = f(y)$, και όπως πιο πάνω, έχουμε $y_n \xrightarrow{\rho} y$.

Άσκηση 2.1.12. Αν έχουμε μια ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον $C([a,b])$ που είναι $\|\cdot\|_\infty$-Cauchy, τότε για κάθε $x \in [a,b]$ η ακολουθία $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy στον $(\mathbb{R},|\cdot|)$. Επομένως ορίζεται η συνάρτηση

$$f : [a,b] \to \mathbb{R} : f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Όπως είναι γνωστό η f είναι συνεχής και η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f. Δηλαδή $f \in C([a,b])$ και $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$. Επομένως ο $(C([a,b]),\|\cdot\|_\infty)$ είναι πλήρης.

Επίσης είναι γνωστό, ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι το ομοιόμορφο όριο ακολουθίας πολυωνύμων με ρητούς συντελεστές. Δηλαδή το σύνολο όλων των πολυωνύμων με ρητούς συντελεστές, που είναι αριθμήσιμο σύνολο, είναι πυκνό στον $(C([a,b]),\|\cdot\|_\infty)$.

Καταλήγουμε ότι ο $C([a,b])$ με την τοπολογία της νόρμας $\|\cdot\|_\infty$ είναι Πολωνικός χώρος.

Άσκηση 2.1.13. Είναι γνωστό από τη Συναρτησιακή Ανάλυση ότι ο χώρος $(\ell^p,\|\cdot\|_p)$ είναι πλήρης για κάθε $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Μάλιστα για $1 \leqslant p < \infty$ το σύνολο όλων των τελικά μηδενικών ακολουθιών ρητών αριθμών

$$D = \{(q_0,\dots,q_n,0,0,\dots) \mid \forall i \leqslant n \ q_i \in \mathbb{Q}\}$$

είναι πυκνό στον $(\ell^p,\|\cdot\|_p)$. Το D είναι αριθμήσιμο σύνολο, επομένως ο ℓ^p με την τοπολογία της p-νόρμας $\|\cdot\|_p$ είναι Πολωνικός χώρος.

Άσκηση 2.1.14. Θεωρούμε αρχικά αριθμήσιμα σύνολα $D_X \subseteq X$ και $D_Y \subseteq Y$ που είναι πυκνά στους χώρους (X,d) και (Y,ρ) αντίστοιχα.

Τότε τα σύνολα $(\{0\} \times D_X) \cup (\{1\} \times D_Y)$ και $D_X \times D_Y$ είναι αριθμήσιμα και πυκνά στους χώρους $X \oplus Y$ και $X \times Y$ αντίστοιχα. Επομένως οι δύο τελευταίοι μετρικοί χώροι είναι διαχωρίσιμοι.

Για την πληρότητα του $X \oplus Y$ θεωρούμε μια ακολουθία $((i_n,a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ από στοιχεία του $X \oplus Y$ που είναι $d_\oplus$-Cauchy, όπου $d_\oplus$ είναι η μετρική στον $X \oplus Y$ που ορίσαμε στην Εισαγωγή.

Τότε υπάρχει n_0, έτσι ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$ ισχύει $d_{\oplus}((i_n, a_n), (i_{n_0}, a_{n_0})) < 1$. Από τον ορισμό της $d_{\oplus}$ έχουμε $i_n = i_{n_0}$ για κάθε $n \geqslant n_0$.

Αν $i_{n_0} = 0$, τότε για κάθε $n, m \geqslant n_0$ έχουμε $i_n = i_m = i_{n_0} = 0$ και συνεπώς $a_n, a_m \in X$ καθώς και $d_{\oplus}((i_n, a_n), (i_m, a_m)) = d(a_n, a_m)$. Επομένως, η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy στον (X, d), και αφού ο τελευταίος μετρικός χώρος είναι πλήρης, υπάρχει $a \in X$ με $a_n \xrightarrow{d} a$. Άρα $d_{\oplus}((i_n, a_n), (0, a)) = d(a_n, a)$ για κάθε $n \geqslant n_0$ και συνεπώς $d_{\oplus}((i_n, a_n), (0, a)) \to 0$.

Η περίπτωση $i_{n_0} = 1$ είναι όμοια. Άρα ο $(X \oplus Y, d_{X\oplus Y})$ είναι πλήρης.

Τέλος για την πληρότητα του $X \times Y$ έχουμε ότι για κάθε $d_{X\times Y}$-Cauchy ακολουθία $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$, εφόσον $d, \rho \leqslant d_{X\times Y}$, οι ακολουθίες $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι d-Cauchy και ρ-Cauchy αντίστοιχα. Εφόσον οι (X, d) και (Y, ρ) είναι πλήρεις, υπάρχουν $x \in X$ και $y \in Y$ με $x_n \xrightarrow{d} x$ και $y_n \xrightarrow{\rho} y$. Τότε

$$d_{X\times Y}((x_n, y_n), (x, y)) = d(x_n, x) + \rho(y_n, y) \to 0.$$

Αυτό δείχνει την πληρότητα του $(X \times Y, d_{X\times Y})$.

Άσκηση 2.1.15. Θεωρούμε σύνολα D_n, $n \in \mathbb{N}$, έτσι ώστε κάθε D_n είναι αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του (X_n, d_n). Θεωρούμε επίσης ένα στοιχείο $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Τότε το σύνολο

$$\bigcup_{m\in\mathbb{N}} D_0 \times \cdots \times D_m \times \{a_{m+1}\} \times \{a_{m+2}\} \times \ldots$$

είναι αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του $(\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n, d)$, όπου d είναι η μετρική της Εισαγωγής,

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cdot \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}, \quad \vec{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \vec{y} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Αυτό συμβαίνει γιατί μια βάση για την τοπολογία της d είναι η οικογένεια όλων των συνόλων της μορφής

$$\mathcal{V} = V_0 \times \cdots \times V_m \times \mathcal{X}_{m+1} \times \mathcal{X}_{m+2} \times \ldots$$

όπου $m \in \mathbb{N}$ και τα V_i είναι d_i-ανοικτά υποσύνολα του X_i για κάθε $i = 0, \ldots, m$. Επομένως για κάθε $\mathcal{V}$ όπως πιο πάνω, υπάρχουν από την πυκνότητα των D_i στοιχεία $x_0, \ldots, x_m$ με $x_i \in D_i$, $i = 0, \ldots, m$ και άρα

$$(x_0, \ldots, x_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots) \in (D_0 \times \cdots \times D_m \times \{a_{m+1}\} \times \{a_{m+2}\}) \cap \mathcal{V}.$$

Για την πληρότητα θεωρούμε μια d-Cauchy ακολουθία $(\vec{x}_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Γράφουμε $\vec{x}_i = (x^i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Ισχυριζόμαστε ότι για κάθε $m \in \mathbb{N}$, η ακολουθία $(x^i_n)_{i\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία του (X_m, d_m). Για να το δούμε αυτό παρατηρούμε αρχικά ότι

$$d(\vec{x}_i, \vec{x}_j) \geqslant 2^{-n} \cdot \frac{d_n(x^i_n, x^j_n)}{1 + d_n(x^i_n, x^j_n)} \geqslant 2^{-m} \frac{d_n(x^i_m, x^j_m)}{1 + d_n(x^i_m, x^j_m)} \;.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\sigma_m = \dfrac{d_m}{1 + d_m}$. Από την Άσκηση 2.1.10 η σ_m είναι μετρική στο X_m που είναι ισοδύναμη με την d_m και ο (X_m, σ_m) είναι πλήρης. Είναι σαφές από την πιο πάνω ανισότητα ότι η ακολουθία $(x^i_m)_{i\in\mathbb{N}}$ είναι σ_m-Cauchy, και συνεπώς υπάρχει $x_m \in X_m$ με $x^i_m \xrightarrow{\sigma_m} x_m$. Αφού οι μετρικές d_m και σ_m είναι ισοδύναμες, έχουμε ότι $x^i_m \xrightarrow{d_m} x_m$. (Εναλλακτικά μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι, όπως και στη λύση της Άσκησης 2.1.10, η $(x^i_m)_{i\in\mathbb{N}}$ είναι d_m-Cauchy και επομένως υπάρχει $x_m \in X_m$ με $x^i_m \xrightarrow{d_m} x_m$.)

Στη συνέχεια θεωρούμε την ακολουθία $\vec{x} = (x_m)_{m\in\mathbb{N}} \in \prod_{m\in\mathbb{N}} X_m$, όπου x_m όπως πιο πάνω. Τότε ισχύει $\vec{x}_i \xrightarrow{d} \vec{x}$, δίνουμε μια συνοπτική περιγραφή.

Αρχικά θεωρούμε ένα $r > 0$ και $m \in \mathbb{N}$ αρκετά μεγάλο ώστε $2^{-m} < r/2$. Η ιδέα είναι να χωρίσουμε το άπειρο άθροισμα στον ορισμό του $d(\vec{x}_i, \vec{x})$, στο πεπερασμένο άθροισμα από 0 μέχρι m και στο άπειρο άθροισμα από $m+1$. Το τελευταίο θα είναι μικρότερο ή ίσο του $\sum_{n=m+1}^{\infty} 2^{-n} = 2^{-m} < r/2$. Σχετικά με το πεπερασμένο άθροισμα χρησιμοποιούμε ότι $x_n^i \xrightarrow{d_n} x_n$ για κάθε $n = 0, \dots, m+1$. Οπότε

$$\sum_{n=0}^{m} 2^{-n} \cdot \frac{d_n(x_n^i, x_n)}{1 + d_n(x_n^i, x_n)} \to \sum_{n=0}^{m} 2^{-n} \cdot \frac{0}{1+0} = 0$$

και άρα για όλα τα μεγάλα $i \in \mathbb{N}$ θα έχουμε ότι

$$\sum_{n=0}^{m} 2^{-n} \cdot \frac{d_n(x_n^i, x_n)}{1 + d_n(x_n^i, x_n)} < r/2.$$

Καταλήγουμε ότι $d(\vec{x}_i, x) < r$ για όλα τα μεγάλα $i \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 2.1.16. Άμεσο από την Άσκηση 2.1.15.

Άσκηση 2.1.17. Θεωρούμε $x, y \in A$ και υποθέτουμε αρχικά ότι $d(x, A) \geqslant d(y, A)$. Τότε $|d(x, A) - d(y, A)| = d(x, A) - d(y, A)$, οπότε πρέπει να δείξουμε ότι

$$d(x, A) \leqslant d(y, A) + d(x, y), \quad \text{ισοδύναμα} \quad d(x, A) - d(x, y) \leqslant d(y, A).$$

Επειδή $d(y, A) = \inf\{d(y, z) \mid z \in A\}$ αρκεί να δείξουμε ότι ο αριθμός $d(x, A) - d(x, y)$ είναι κάτω φράγμα του συνόλου $\{d(y, z) \mid z \in A\}$. Θεωρούμε λοιπόν $z \in A$ και δείχνουμε ότι

$$d(x, A) - d(x, y) \leqslant d(y, z) \quad \text{ισοδύναμα} \quad d(x, A) \leqslant d(x, y) + d(y, z).$$

Αφού $z \in A$ έχουμε από τον ορισμό του $d(x, A)$ ότι

$$d(x, A) \leqslant d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z),$$

απ' όπου προκύπτει το ζητούμενο.

Η περίπτωση $d(x, A) < d(y, A)$ αντιμετωπίζεται ανάλογα. Ένας διαφορετικός τρόπος είναι να πούμε ότι αυτή η περίπτωση προκύπτει από την προηγούμενη εναλλάσσοντας το x με το y: με αυτή την εναλλαγή έχουμε από την πρώτη περίπτωση ότι $|d(y, A) - d(x, A)| \leqslant d(y, x)$ απ' όπου το ζητούμενο είναι προφανές.

Άσκηση 2.1.18. Έχουμε ότι η f είναι συνεχής στο $x \in X$ αν και μόνο αν

$$\forall r > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall y \in B_{(X,d)}(x, \delta) \ y \in B_{(Y,\rho)}(f(x), r)$$

$$(\star 1) \qquad \iff \forall n \in \mathbb{N} \ \exists k \in \mathbb{N} \ \forall y \in B_{(X,d)}(x, 2^{-k}) \ y \in B_{(Y,\rho)}(f(x), 2^{-n}).$$

Η τελευταία ισοδυναμία είναι μια χαρακτηριστική μέθοδος για να περνάμε σε αριθμήσιμες τομές ή/και ενώσεις. Χρειαζόμαστε μια τελευταία αναδιατύπωση. Η $(\star 1)$ είναι ισοδύναμη με την

$$\forall n \ \exists k \ \forall y, z \in B_{(X,d)}(x, 2^{-k}) \ \rho(z, y) < 2^{-n}.$$

Θέτουμε $V_n = \{x \in X \mid \exists k \ \forall y, z \in B_{(X,d)}(x, 2^{-k}) \ \rho(z, y) < 2^{-n}\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έτσι που σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε

$$f\text{: συνεχής στο } x \iff \forall n \ x \in V_n,$$

δηλαδή το σύνολο των σημείων συνέχειας της f είναι το $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$.

Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι κάθε V_n είναι ανοικτό σύνολο. Θεωρούμε λοιπόν $x \in V_n$ και $k \in \mathbb{N}$, έτσι ώστε για κάθε $y, z \in B_{(X,d)}(x, 2^{-k})$ ισχύει $\rho(z, y) <$

2^{-n}. Δείχνουμε ότι $B_{(X,d)}(x, 2^{-k}) \subseteq V_n$, τότε θα έχουμε ότι το x είναι εσωτερικό σημείο του V_n και επομένως θα έχουμε τελειώσει.

Παίρνουμε $x' \in B_{(X,d)}(x, 2^{-k})$ και επειδή το τελευταίο σύνολο είναι ανοικτό, υπάρχει $k' \in \mathbb{N}$ με $B_{(X,d)}(x', 2^{-k'}) \subseteq B_{(X,d)}(x, 2^{-k})$. Συνεπώς, για κάθε $y, z \in B_{(X,d)}(x', 2^{-k'})$ έχουμε $y, z \in B_{(X,d)}(x, 2^{-k})$ και από την επιλογή των x, k ισχύει $\rho(z, y) < 2^{-n}$. Αυτό δείχνει ότι $x' \in V_n$ και έχουμε τελειώσει.

Παρατήρηση. Η αντικατάσταση του $\delta > 0$ με το 2^{-k} στην ($\star$1) δεν είναι απαραίτητη γιατί πέραν της αριθμήσιμης τομής ως προς n χρειαζόμαστε μόνο να γνωρίζουμε ότι το V_n είναι ανοικτό σύνολο. Αυτό μπορούμε να το διαπιστώσουμε ανεξάρτητα από το αν χρησιμοποιήσουμε το $\delta > 0$ ή το 2^{-k}.

Άσκηση 2.1.19. Έχουμε

$$(0,1] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(0, 1+2^{-n}) \quad \text{και} \quad [0,1) \cup \{3\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \big((-2^{-n}, 1) \cup (3-2^{-n}, 3+2^{-n})\big),$$

οπότε τα σύνολα $(0,1]$ και $[0,1) \cup \{3\}$ είναι G_δ υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και συνεπώς Πολωνικοί χώροι με τη σχετική τοπολογία.

Αν το $\mathbb{Q} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ ήταν Πολωνικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$, τότε θα ήταν G_δ υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Το σύνολο $\mathbb{R} \times \{\sqrt{2}\}$ είναι κλειστό, και επομένως G_δ υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Άρα και η τομή

$$(\mathbb{Q} \times \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (\mathbb{R} \times \{\sqrt{2}\}) = \mathbb{Q} \times \{\sqrt{2}\}$$

θα ήταν G_δ.

Αν γράψουμε $\mathbb{Q} \times \{\sqrt{2}\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ όπου τα U_n είναι ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$, τότε

$$\mathbb{Q} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{x \in \mathbb{R} \mid (x, \sqrt{2}) \in U_n\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}[U_n],$$

όπου $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : f(x) = f(x, \sqrt{2})$. Προφανώς, η f είναι συνεχής και άρα τα σύνολα $f^{-1}[U_n]$, $n \in \mathbb{N}$, είναι ανοικτά. Αλλά τότε το $\mathbb{Q}$ θα ήταν G_δ σύνολο που είναι άτοπο.

Άρα το $\mathbb{Q} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ δεν είναι Πολωνικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$.

Άσκηση 2.2.1. Έστω $u = (u_0, \ldots, u_{n-1})$ και $(v_0, \ldots, v_{m-1}) \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με

$$\langle u_0, \ldots, u_{n-1}\rangle = \langle v_0, \ldots, v_{m-1}\rangle.$$

Αν το u είναι η κενή ακολουθία, τότε $\langle u_0, \ldots, u_{n-1}\rangle = 1$. Επειδή η συνάρτηση $\langle \cdot \rangle$ λαμβάνει άρτιες τιμές στις μη κενές ακολουθίες, έχουμε αναγκαστικά ότι και το v είναι η κενή ακολουθία, άρα $u = v$.

Αν $u \neq \Lambda$, τότε, όπως πιο πάνω, $v \neq \Lambda$. Άρα $n, m \geqslant 1$. Αν είχαμε $n \neq m$, ας πούμε $n < m$, τότε, εφόσον ο όρος $\mathsf{p}_n^{v(n)+1} \neq 1$ είναι παράγοντας στον αριθμό $\langle v_0, \ldots, v_{m-1}\rangle$, θα ήταν επίσης παράγοντας στον αριθμό $\langle u_0, \ldots, u_{n-1}\rangle$. Από την άλλη, εξ ορισμού ο τελευταίος αριθμός έχει για παράγοντες δυνάμεις των $\mathsf{p}_0, \ldots, \mathsf{p}_{n-1}$ και από τη μοναδικότητα του αναπτύγματος σε γινόμενο πρώτων αριθμών έχει *μόνο* αυτούς τους παράγοντες. Καταλήγουμε λοιπόν σε άτοπο. Επομένως $n = m$ και

$$\mathsf{p}_0^{u_0+1} \cdot \ldots \mathsf{p}_{n-1}^{u_{n-1}+1} = \mathsf{p}_0^{v_0+1} \cdot \ldots \mathsf{p}_{n-1}^{v_{n-1}+1}.$$

Πάλι από τη μοναδικότητα του αναπτύγματος σε γινόμενο πρώτων αριθμών έχουμε $u_i = v_i$ για κάθε $i < n$ και άρα $u = v$.

Άσκηση 2.2.2. Ο αριθμός $10 = 2 \cdot 5$ είναι ένας άρτιος αριθμός που δεν λαμβάνεται ως τιμή της $\langle \cdot \rangle$. Για να έχουμε το 5, που είναι ο τρίτος στη σειρά πρώτος αριθμός, ως παράγοντα στο $\langle u_0, \ldots, u_{n-1}\rangle$ θα πρέπει το μήκος της ακολουθίας $u = (u_0, \ldots, u_{n-1})$ να είναι τουλάχιστον 3, οπότε και ο αριθμός $\mathsf{p}_1^{u_1+1} = 3^{u_1+1} = 3 \cdot 3^{u_1}$ θα είναι και αυτός παράγοντας του αριθμού

$\langle u_0, \ldots, u_{n-1} \rangle$. Δηλαδή το 3 θα πρέπει να διαιρεί τον $\langle u_0, \ldots, u_{n-1} \rangle$. Αφού όμως το 3 δεν διαιρεί το 10 έχουμε $\langle u_0, \ldots, u_{n-1} \rangle \neq 10 = 2 \cdot 5$ για κάθε $u = (u_0, \ldots, u_{n-1}) \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$.

Άσκηση 2.2.3. Η δοσμένη πρόταση είναι ισοδύναμη με την

$$\forall n \; \exists s \; \forall i, j < 2n \quad (\; (n, \langle n, (s)_i \rangle) \in Q \;\&\; (i \neq j \;\longrightarrow\; (s)_i \neq (s)_j) \;).$$

Άσκηση 2.3.14. Είναι σαφές από τον ορισμό ότι $d_{\mathcal{N}}(\alpha, \beta) \geqslant 0$, $d_{\mathcal{N}}(\alpha, \beta) = 0 \iff \alpha = \beta$ και ότι $d_{\mathcal{N}}(\alpha, \beta) = d_{\mathcal{N}}(\beta, \alpha)$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathcal{N}$. Στη συνέχεια δείχνουμε την ανισότητα της υπερμετρικής.

Θεωρούμε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{N}$. Αν $\alpha = \beta$, τότε $d_{\mathcal{N}}(\alpha, \beta) = 0 \leqslant \max\{d_{\mathcal{N}}(\alpha, \gamma), d_{\mathcal{N}}(\gamma, \beta)\}$, ενώ αν $\alpha = \gamma$, τότε $\max\{d_{\mathcal{N}}(\alpha, \gamma), d_{\mathcal{N}}(\gamma, \beta)\} = d_{\mathcal{N}}(\gamma, \beta) = d_{\mathcal{N}}(\alpha, \beta)$. Όμοια η ανισότητα είναι προφανής αν $\beta = \gamma$, επομένως υποθέτουμε ότι τα α, β, γ είναι διαφορετικά ανά δύο. Υπενθυμίζουμε τον φυσικό αριθμό $n(\alpha', \beta')$ από τον ορισμό της $d_{\mathcal{N}}$,

$$n(\alpha', \beta') = \quad \text{ο ελάχιστος φυσικός } k \text{ με } \alpha'(k) \neq \beta'(k), \text{ για } \alpha', \beta' \in \mathcal{N} \text{ με } \alpha' \neq \beta'.$$

Αν $n(\alpha, \beta) \geqslant n(\alpha, \gamma)$ τότε

$$d_{\mathcal{N}}(\alpha, \beta) = 2^{-n(\alpha, \beta)} \leqslant 2^{-n(\alpha, \gamma)} = d_{\mathcal{N}}(\alpha, \gamma) \leqslant \max\{d_{\mathcal{N}}(\alpha, \gamma), d_{\mathcal{N}}(\gamma, \beta)\}.$$

Θεωρούμε λοιπόν ότι $n(\alpha, \gamma) > n(\alpha, \beta)$. Τότε ο φυσικός αριθμός $n(\alpha, \beta)$ είναι μικρότερος του ελάχιστου φυσικού στον οποίο διαφέρουν τα α, γ, συνεπώς έχουμε $\alpha(n(\alpha, \beta)) = \gamma(n(\alpha, \beta))$. Επειδή $\alpha(n(\alpha, \beta)) \neq \beta(n(\alpha, \beta))$ έχουμε $\gamma(n(\alpha, \beta)) \neq \beta(n(\alpha, \beta))$.

Προκύπτει ότι ο αριθμός $n(\alpha, \beta)$ είναι ένας φυσικός στον οποίο διαφέρουν τα β, γ, επομένως είναι μεγαλύτερος ή ίσος του ελάχιστου τέτοιου φυσικού $n(\beta, \gamma)$. Δηλαδή ισχύει $n(\alpha, \beta) \geqslant n(\beta, \gamma)$, οπότε όμοια με πριν

$$d_{\mathcal{N}}(\alpha, \beta) = 2^{-n(\alpha, \beta)} \leqslant 2^{-n(\beta, \gamma)} = d_{\mathcal{N}}(\beta, \gamma) \leqslant \max\{d_{\mathcal{N}}(\alpha, \gamma), d_{\mathcal{N}}(\gamma, \beta)\}.$$

Αυτό δείχνει την ανισότητα της υπερμετρικής. Η τριγωνική ανισότητα είναι συνέπεια της τελευταίας, ειδικότερα η $d_{\mathcal{N}}$ είναι μετρική στο $\mathcal{N}$.

Άσκηση 2.3.15. Εφαρμόζουμε την ισοδυναμία (2.13) η οποία χαρακτηρίζει τη σύγκλιση στον $\mathcal{N}$.

Αν η $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ήταν συγκλίνουσα, τότε και η ακολουθία φυσικών αριθμών $(\alpha_i(0))_{i \in \mathbb{N}}$ θα ήταν συγκλίνουσα. Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί $\alpha_i(0) = i \to \infty$.

Για την $(\beta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ παρατηρούμε ότι

$$\beta_i = (1, 1, \ldots, 1, 0, 0, 0 \ldots)$$

όπου το 1 εμφανίζεται πιο πάνω i-φορές. Δείχνουμε ότι $\beta_i \to (1, 1, \ldots, 1, \ldots)$. Για να το δούμε αυτό θεωρούμε $n \in \mathbb{N}$ και παρατηρούμε ότι για κάθε $i \geqslant n$ ισχύει $\beta_i(n) = 1$. Επομένως $\beta_i(n) \xrightarrow{i} 1$.

Παρόμοια δείχνουμε ότι $\gamma_i \to (0, 1, 2, 3, \ldots)$. Θεωρούμε $n \in \mathbb{N}$ και παρατηρούμε ότι για κάθε $i \geqslant n$ ισχύει $\gamma_i(n) = n$. Επομένως $\gamma_i(n) \xrightarrow{i} n$.

Η $(\delta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ δεν είναι συγκλίνουσα γιατί $\delta_i(43) = (-1)^i$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$ και άρα η ακολουθία φυσικών αριθμών $(\delta_i(43))_{i \in \mathbb{N}}$ δεν είναι συγκλίνουσα.

Τέλος η $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $(0, 2, 4, 6, \ldots)$. Η απόδειξη είναι όπως και με την $(\beta_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Παίρνουμε $n \in \mathbb{N}$ και παρατηρούμε ότι για κάθε $i \geqslant n$ ισχύει $2i \geqslant n$ και επομένως $\varepsilon_i(n) = 2n$. Άρα $\varepsilon_i(n) \xrightarrow{i} 2n$.

Άσκηση 2.3.16. Επαληθεύουμε ότι τα δοσμένα σύνολα είναι κλειστά με τη χρήση συγκλινουσών ακολουθιών. Θεωρούμε μια $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ που συγκλίνει σε κάποιο $\alpha \in \mathcal{N}$. Τότε για κάθε i έχουμε $\alpha_i = (n_i, 0, 0, \ldots)$ για κάποιο $n_i \in \mathbb{N}$.

Εφόσον η $(\alpha_i(0))_{i\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $n_i = n$ για όλα τα μεγάλα i. Επομένως $\alpha = (n, 0, 0, \dots) \in A$.

Στη συνέχεια θεωρούμε μια ακολουθία $(\beta_i)_{i\in\mathbb{N}} \in B^{\mathbb{N}}$ με $\beta_i \to \beta \in \mathcal{N}$. Τότε για κάθε i έχουμε $\beta_i = (0)^{m_i} * (m_i, 1, 1, 1, \dots)$ για κάποιο $i \in \mathbb{N}$. Παρατηρούμε ότι $\beta_i(n) = 0$ όταν $m_i > n$.

Αν η $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ έχει γνησίως αύξουσα υπακολουθία $(m_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$ τότε $\beta_{k_i} \to (0, 0, \dots) \in B$. Για να δούμε το τελευταίο θεωρούμε $n \in \mathbb{N}$ και $i_0 > n$, επομένως $m_{k_i} \geqslant k_i \geqslant i > n$ και άρα $\beta_{k_i}(n) = 0$.

Αν η $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ δεν έχει γνησίως αύξουσα υπακολουθία, τότε έχει υπακολουθία $(m_{l_i})_{i\in\mathbb{N}}$ που είναι σταθερή σε κάποιο $m \in \mathbb{N}$. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε $\beta_{m_{l_i}} = \beta_m = (0)^m * (m, 1, 1, \dots)$. Άρα $\beta = \beta_m \in B$.

Με όμοιο τρόπο μπορεί κανείς να δει ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία του C έχει για όριο είτε κάποιο σημείο της μορφής $(1)^n * (2, 3, 4, 5, \dots)$ είτε το $(1, 1, 1, \dots)$. Σε κάθε περίπτωση το όριο ανήκει στο C, οπότε το τελευταίο σύνολο είναι κλειστό.

Τέλος παίρνουμε $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ και θεωρούμε μια ακολουθία $(\delta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ στο $\mathcal{N}_u$ με $\delta_i \to \delta$. Τότε για κάθε $k < |u|$ και κάθε $i \in \mathbb{N}$ έχουμε $\delta_i(k) = u(k)$, άρα $\delta(k) = u(k)$. Προκύπτει ότι $\delta \in \mathcal{N}_u$ και επομένως το $\mathcal{N}_u$ είναι κλειστό.

Τα σύνολα $\mathcal{N}_u \cap 2^{\mathbb{N}}$, $u \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ είναι κλειστά στον $2^{\mathbb{N}}$ για τον ίδιο λόγο με πιο πάνω. (Αλλιώς μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι το $\mathcal{N}_u \cap 2^{\mathbb{N}}$ είναι η τομή ενός κλειστού συνόλου στον $\mathcal{N}$ με τον υπόχωρο $2^{\mathbb{N}}$, που όπως είναι γνωστό αυτό είναι κλειστό υποσύνολο του υπόχωρου.)

Άσκηση 2.3.17. Ένας κατάλληλος τοπολογικός ισομορφισμός είναι η συνάρτηση

$$f_u \equiv f : \mathcal{N} \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow \mathcal{N}_u : f(\alpha) = u * \alpha.$$

Είναι σαφές ότι η f είναι ένα-προς-ένα. Επίσης είναι επιμορφισμός γιατί κάθε $\beta \in \mathcal{N}_u$ ικανοποιεί $u \sqsubseteq \beta$, και συνεπώς $\beta = u * \alpha$ όπου $\alpha = (\beta(|u|), \beta(|u| + 1) \dots)$.

Για να δείξουμε ότι η f είναι συνεχής εφαρμόζουμε την Αρχή της Μεταφοράς. Θεωρούμε $\alpha \in \mathcal{N}$ και μια ακολουθία $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ στο $\mathcal{N}$ με $\alpha_i \to \alpha$. Τότε $\alpha_i(k) \to \alpha(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, απ' όπου είναι σαφές ότι $(u * \alpha_i)(m) \to (u * \alpha)(m)$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Άρα $f(\alpha_i) \to f(\alpha)$.

Η αντίστροφη συνάρτηση της f δίνεται από πιο πάνω,

$$f^{-1} : \mathcal{N}_u \to \mathcal{N} : f^{-1}(\beta) = (\beta(|u|), \beta(|u| + 1) \dots),$$

η οποία όμοια με προηγουμένως είναι συνεχής.

Άσκηση 2.3.18. Η συνέχεια όλων των δοσμένων συναρτήσεων μπορεί να δειχθεί εύκολα με την Αρχή της Μεταφοράς χρησιμοποιώντας τον χαρακτηρισμό της σύγκλισης ακολουθιών στον χώρο του Baire (2.13).

Για παράδειγμα για την $s : \mathcal{N} \to \mathcal{N} : s(\alpha) = \alpha^*$, αν έχουμε $\alpha_i \to \alpha$ τότε για κάθε n ισχύει $\alpha_i(n) \to \alpha(n)$, επομένως για κάθε n ισχύει $\alpha_i(n+1) \to \alpha(n+1)$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε n ισχύει $\alpha_i^*(n) \to \alpha^*(n)$ και άρα $\alpha_i^* \to \alpha^*$.

Δίνουμε και έναν δεύτερο τρόπο που χρησιμοποιεί τις ανοικτές περιοχές του χώρου του Baire. Συγκεκριμένα θεωρούμε $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ και $\alpha \in \mathcal{N}$ με $s(\alpha) = \alpha^* \in \mathcal{N}_u$, και δείχνουμε υπάρχει $v \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με $\alpha \in \mathcal{N}_v$ και $s[\mathcal{N}_v] \subseteq \mathcal{N}_u$.

Παρατηρούμε ότι αν $\beta(i) = \alpha(i)$ για κάθε $i \leqslant |u|$, τότε $\beta(i+1) = \alpha(i+1)$ για κάθε $i < |u|$ και επομένως $\beta^*(i) = \alpha^*(i)$ για κάθε $i < |u|$. Εφόσον $\alpha^* \in \mathcal{N}_u$, ισχύει $u \sqsubseteq \alpha^*$ άρα $u \sqsubseteq \beta^*$. Αν θέσουμε λοιπόν $v = \alpha|N$ όπου $N = |u| + 1$ έχουμε ότι $s[\mathcal{N}_v] \subseteq \mathcal{N}_u$.

Για τις υπόλοιπες συναρτήσεις παρατηρούμε ότι οι βασικές περιοχές του $\mathcal{N} \times \mathbb{N}$ είναι της μορφής $\mathcal{N}_v \times \{n\}$ όπου $v \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ και $n \in \mathbb{N}$, ενώ οι βασικές περιοχές του $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ είναι της μορφής $\{u\}$ όπου $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$.

Για να δείξουμε τη συνέχεια της $f : \mathcal{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} : \ f(\alpha, n) = \alpha|n$ θεωρούμε u, α, n με $f(\alpha, n) \in \{u\}$ και βρίσκουμε $v \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με $\alpha \in \mathcal{N}_v$ και $f[\mathcal{N}_v \times \{n\}] \in \{u\}$. Έχουμε δηλαδή $f(\alpha, n) = u$ και θέλουμε να βρούμε v έτσι ώστε $v \sqsubseteq \alpha$ και για κάθε $\beta \in \mathcal{N}_v$ να ισχύει $f(\beta, n) = u$.

Εφόσον $f(\alpha, n) = \alpha|n = u$ έχουμε $u \sqsubseteq \alpha$ και $n = |u|$. Παίρνουμε $v = u \sqsubseteq \alpha$, τότε για κάθε $\beta \in \mathcal{N}_v$ ισχύει $u = v \sqsubseteq \beta$ και άρα $f(\beta, n) = \beta|n = \beta||u| = u$. Αυτό δείχνει τη συνέχεια της f.

Για τη συνάρτηση $g : \mathcal{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} : \ g(\alpha, n) = \overline{\alpha(n)} = \langle \alpha(0), \dots, \alpha(n-1) \rangle$, θεωρούμε m, α, n με $g(\alpha, n) \in \{m\}$ και βρίσκουμε $v \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με $v \sqsubseteq \alpha$ και $g[\mathcal{N}_v \times \{n\}] \in \{m\}$.

Εφόσον $g(\alpha, n) = \overline{\alpha(n)} = m$ έχουμε $m = \langle \alpha(0), \dots, \alpha(n-1) \rangle$. Παίρνουμε λοιπόν $v = \alpha|n \sqsubseteq \alpha$, τότε για κάθε $\beta \in \mathcal{N}_v$ ισχύει $\beta|n = v = \alpha|n$ οπότε

$$g(\beta, n) = \overline{\beta(n)} = \langle \beta(0), \dots, \beta(n-1) \rangle = \langle \alpha(0), \dots, \alpha(n-1) \rangle = m.$$

Αυτό δείχνει τη συνέχεια της g. (Εναλλακτικά μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι $g = \langle \ \cdot \ \rangle \circ f$, η f είναι συνεχής και η $\langle \ \cdot \ \rangle : \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ είναι συνεχής ως συνάρτηση ορισμένη σε διακριτό μετρικό χώρο – επομένως η g είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.)

Τέλος για την $h : \mathcal{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} : \ h(\alpha, n) = (\alpha)_n$ θεωρούμε u, α, n με $h(\alpha, n) \in \mathcal{N}_u$ και βρίσκουμε $v \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με $\alpha \in \mathcal{N}_v$ και $h[\mathcal{N}_v \times \{n\}] \subseteq \mathcal{N}_u$.

Εφόσον $h(\alpha, n) = (\alpha(\langle n, 0 \rangle), \alpha(\langle n, 1 \rangle), \dots) \in \mathcal{N}_u$ έχουμε $u(i) = \alpha(\langle n, i \rangle)$ για κάθε $i < |u|$. Παίρνουμε έναν φυσικό αριθμό $N > \max\{\langle n, i \rangle \mid i < |u|\}$ (για τη συγκεκριμένη συνάρτηση κωδικοποίησης $\langle \ \cdot \ \rangle$ το προηγούμενο maximum επιτυγχάνεται στο $i = |u| - 1$), και θέτουμε $v = \alpha|N$. Αν $|u| = 0$, παίρνουμε $N = 0$. Παρατηρήστε ότι σε αυτή την περίπτωση $\mathcal{N}_u = \mathcal{N}_\Lambda = \mathcal{N}$ και τότε όλα τα v είναι κατάλληλα – για $N = 0$ έχουμε $\mathcal{N}_v = \mathcal{N}_\Lambda = \mathcal{N}$. Προφανώς ισχύει $\alpha \in \mathcal{N}_v$ και για κάθε $\beta \in \mathcal{N}_v$ ισχύει $\alpha(j) = v(j) = \beta(j)$ για κάθε $j < N$, ειδικότερα

$$u(i) = \alpha(\langle n, i \rangle) = \beta(\langle n, i \rangle)$$

για κάθε $i < |u|$. Επομένως $u \sqsubseteq (\beta(\langle n, 0 \rangle), \beta(\langle n, 1 \rangle), \dots)$, δηλαδή $h(\beta, n) \in \mathcal{N}_u$. Αυτό δείχνει τη συνέχεια της h.

Άσκηση 2.3.19. Αν $f(\alpha) = f(\beta)$, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $(0)^{\alpha(n)} = (0)^{\beta(n)}$ και άρα $\alpha(n) = \beta(n)$. Επομένως η f είναι μονορφισμός. Για τη συνέχεια της f παρατηρούμε ότι αν $\alpha|(n+1) = \beta|(n+1)$, τότε $f(\alpha)|m_n = f(\beta)|m_n$, όπου $m_n = \sum_{k=0}^{n} (\alpha(k) + 1) = \sum_{k=0}^{n} (\beta(k) + 1)$. Για τη συνέχεια της αντίστροφης συνάρτησης παρατηρούμε ότι ισχύει και το αντίστροφο του τελευταίου: αν $f(\alpha)|m_n = f(\beta)|m_n$, όπου $m_n = \sum_{k=0}^{n} (\alpha(k) + 1)$, τότε $\alpha(t) = \beta(t)$ για κάθε $t \leqslant n$. Άρα η f είναι τοπολογικός ισομορφισμός μεταξύ του $\mathcal{N}$ και του $f[\mathcal{N}]$.

Μπορούμε να δούμε ότι η εικόνα $f[\mathcal{N}]$ είναι G_δ υποσύνολο του $2^{\mathbb{N}}$ με δύο τρόπους. Με τον έναν αναγνωρίζουμε την εικόνα $f[\mathcal{N}]$,

$$\begin{aligned} \gamma \in f[\mathcal{N}] &\iff \text{έχουμε } \gamma(n) = 1 \text{ για άπειρα το πλήθος } n, \\ &\iff \forall n \ \exists \ m \geqslant n \ \gamma(m) = 1. \end{aligned}$$

Αν θέσουμε $G_m = \{\gamma \in 2^{\mathbb{N}} \mid \gamma(m) = 1\}$, έχουμε εύκολα ότι το G_m είναι ανοικτό (και κλειστό μάλιστα) υποσύνολο του $2^{\mathbb{N}}$, και από το πιο πάνω ισχύει $f[\mathcal{N}] = \bigcap_n \bigcup_{m \geqslant n} G_m = \bigcap_n U_n$, όπου το $U_n = \bigcup_{m \geqslant n} G_m$ είναι ανοικτό. Επομένως το $f[\mathcal{N}]$ είναι G_δ σύνολο.

Με τον δεύτερο τρόπο η εικόνα $f[\mathcal{N}]$ είναι τοπολογικά ισομορφική με τον χώρο του Baire, επομένως από την Πρόταση 2.1.2 είναι Πολωνικός χώρος. Άρα από το Θεώρημα 2.1.8 είναι G_δ υποσύνολο του $2^{\mathbb{N}}$.

Άσκηση 2.3.20. Για την ευθεία κατεύθυνση θεωρούμε ένα μη κενό τέλειο $P \subseteq A$. Το P με τη σχετική τοπολογία είναι Πολωνικός χώρος και από το Θεώρημα 2.3.12 υπάρχει συνεχής μονομορφισμός $f : 2^{\mathbb{N}} \rightarrowtail P$. Η f είναι συνεχής ως συνάρτηση που παίρνει τιμές στο $\mathcal{X}$ επειδή το P είναι με τη σχετική τοπολογία. Επιπλέον $f[2^{\mathbb{N}}] \subseteq P \subseteq A$.

Αντίστροφα, αν υπάρχει συνεχής μονομορφισμός $f : 2^{\mathbb{N}} \rightarrowtail \mathcal{X}$ με $f[2^{\mathbb{N}}] \subseteq A$, δείχνουμε ότι το $Q = f[2^{\mathbb{N}}]$ είναι τέλειο (προφανώς είναι μη κενό). Το $2^{\mathbb{N}}$ είναι συμπαγές σύνολο και άρα το Q είναι επίσης συμπαγές ως συνεχής εικόνα συμπαγούς. Ειδικότερα το Q είναι κλειστό. Απομένει να δείξουμε ότι το Q δεν έχει μεμονωμένα σημεία. Θεωρούμε $x = f(\alpha) \in Q$ και $r > 0$. Λόγω της συνέχειας της f υπάρχει $n \in \mathbb{N}$, έτσι ώστε για κάθε $\beta \in 2^{\mathbb{N}}$ με $\alpha|n = \beta|n$ ισχύει $f(\beta) \in B_{\mathcal{X}}(f(\alpha), r)$. Παίρνουμε το $\beta = \alpha|n * (1-\alpha(n), 0, 0, 0, \dots)$ έτσι που $\beta|n = \alpha|n$ και $\beta \neq \alpha$. Αφού η f είναι μονομορφισμός, έχουμε $f(\beta) \neq f(\alpha)$, και αφού $\beta|n = \alpha|n$, έχουμε $f(\beta) \in B(f(\alpha), r)$. Άρα υπάρχει $y \in Q$ (συγκεκριμένα το $f(\beta) \in f[2^{\mathbb{N}}] = Q$) που ικανοποιεί $y \neq x$ και $y \in B(x, r)$, επομένως το $x = f(\alpha)$ δεν είναι μεμονωμένο σημείο του Q.

Άσκηση 2.4.6. Συμβολίζουμε με P_A, P_B, P_C, S_A, S_B και S_C τον τέλειο πυρήνα των A, B, C και το διάσπαρτο μέρος των A, B, C αντίστοιχα.

Αρχικά παρατηρούμε ότι το $[0,1]$ είναι τέλειο σύνολο και το $A \setminus [0,1] = \{1 + 2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ είναι αριθμήσιμο. Από τη μοναδικότητα της διάσπασης Cantor-Bendixson έχουμε $P_A = [0,1]$ και $S_A = \{1 + 2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Όμοια για το $B = A \cup \{1 + 2^{-m} + 3^{-m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$. Το $[0,1]$ είναι τέλειο υποσύνολο του B, ενώ το $B \setminus [0,1] = \{1 + 2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{1 + 2^{-n} + 3^{-m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ είναι αριθμήσιμο. Επομένως $P_B = [0,1]$ και $S_B = \{1 + 2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{1 + 2^{-n} + 3^{-m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$.

Τέλος παρατηρούμε ότι το C είναι αριθμήσιμο σύνολο, συνεπώς πάλι από τη μοναδικότητα της διάσπασης έχουμε $P_C = \varnothing$ και $S_C = C = \{1\} \cup \{1 + 2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Άσκηση 2.4.7. Θεωρούμε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και κλειστό $C \subseteq \mathcal{X}$ με τέλειο πυρήνα το P και διάσπαρτο μέρος το S. Αν το $x \in \mathcal{X}$ είναι μεμονωμένο σημείο του C, τότε υπάρχει $r > 0$ με $B(x, r) \cap C = \{x\}$. Αν ήταν $x \in P$ εφόσον το P είναι τέλειο, θα υπήρχε $y \in P$ με $y \neq x$ και $y \in B(x, r)$. Εφόσον $y \in P \subseteq C$ η τομή $B(x, r) \cap C$ θα είχε τουλάχιστον δύο διαφορετικά σημεία, τα x, y, που είναι άτοπο. Άρα $x \in C \setminus P = S$.

Γενικά το διάσπαρτο μέρος περιέχει και μη μεμονωμένα σημεία. Ένα παράδειγμα είναι το σύνολο $B = [0,1] \cup \{1 + 2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{1 + 2^{-m} + 3^{-m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ της Άσκησης 2.4.6. Σύμφωνα με αυτή την άσκηση, το διάσπαρτο μέρος S_B του B είναι το σύνολο $\{1 + 2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{1 + 2^{-n} + 3^{-m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$. Ένα στοιχείο του S_B είναι το $1 + 2^{-0} = 2$. Από την άλλη, το 2 δεν είναι μεμονωμένο σημείο του S_B καθώς $2 \neq 1 + 2^{-0} + 3^{-m} \in S_B$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$, και $1 + 2^{-0} + 3^{-m} \xrightarrow{m} 2$. Μάλιστα με την ίδια απόδειξη βλέπουμε ότι κάθε $1 + 2^{-n}$ είναι στοιχείο του διάσπαρτου μέρους του B που δεν είναι μεμονωμένο σημείο του B.

Άσκηση 2.4.8. Είναι προφανές ότι το σύνολο $\overline{V \cap P}$ είναι κλειστό. Δείχνουμε ότι δεν έχει μεμονωμένα σημεία. Έστω $y \in \overline{V \cap P}$ και $r > 0$. Θα βρούμε ένα στοιχείο y' του $\overline{V \cap P}$ με $y' \in B(y, r)$ και $y' \neq y$. Αφού $y \in \overline{V \cap P}$ έχουμε

$$B_d(y, r) \cap (V \cap P) = (B_d(y, r) \cap V) \cap P \neq \varnothing.$$

Επομένως υπάρχει $z \in P$ με $z \in U = B_d(y, r) \cap V$. Αφού το P είναι τέλειο και το U είναι ανοικτό, υπάρχει $w \in U \cap P$ με $w \neq z$. Τότε ένα από τα w, z είναι διάφορο του y. Το ζητούμενο y' είναι ένα από τα w, z ανάλογα με το ποιο είναι διάφορο του y.

Άσκηση 2.4.9. Έστω P και S ο τέλειος πυρήνας και το διάσπαρτο μέρος του C αντίστοιχα. Για κάθε τέλειο $P_0 \subseteq C$ το $P \cup P_0$ είναι εύκολα τέλειο υποσύνολο του C. Προφανώς, το σύνολο $S_0 = C \setminus (P \cup P_0) \subseteq C \setminus P = S$ είναι αριθμήσιμο. Από τη μοναδικότητα της διάσπασης έχουμε $P = P \cup P_0$ και άρα $P_0 \subseteq P$.

Άσκηση 2.4.10. Έστω G ένα G_δ υποσύνολο του Πολωνικού χώρου $\mathcal{X}$. Από το Θεώρημα 2.1.8 το G με τη σχετική τοπολογία είναι Πολωνικός χώρος. Αν το G είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο, έχουμε από το Πόρισμα 2.4.3 έναν συνεχή μονομορφισμό $\tau : 2^{\mathbb{N}} \rightarrowtail G$. Επομένως

$$\mathbb{R} =_c 2^{\mathbb{N}} \leqslant_c G \leqslant_c \mathbb{R}$$

όπου στην τελευταία σχέση $\leqslant_c$ χρησιμοποιήσαμε το Πόρισμα 2.3.9. Από το Θεώρημα Schröder-Bernstein έχουμε $G =_c \mathbb{R}$.

Άσκηση 2.4.11. Από την Άσκηση 2.1.18 το σύνολο G όλων των σημείων συνέχειας της f είναι G_δ σύνολο. Αν το G είναι αριθμήσιμο, τότε η f είναι συνεχής μόνο σε αριθμήσιμο πλήθος σημείων. Αν το G είναι υπεραριθμήσιμο, τότε το G είναι ένας υπεραριθμήσιμος Πολωνικός χώρος και επομένως υπάρχει ένας συνεχής μονομορφισμός $\tau : 2^{\mathbb{N}} \rightarrowtail G$. Παίρνουμε $P = \tau[G]$ και έχουμε το ζητούμενο. (Η τ^{-1} είναι συνεχής, όπως αναφέραμε στην απόδειξη του Πορίσματος 2.4.4.)

Άσκηση 2.5.15. Παίρνουμε

$$\begin{aligned}
T^0 &= \{\Lambda, (0), (0,0), (0,0,0)\},\\
T^1 &= \{\Lambda\} \cup \{(n) \mid n \in \mathbb{N}\},\\
T^2 &= \{0,1,2\}^{<\mathbb{N}} = \{\Lambda\} \cup \textstyle\bigcup_{n\geqslant 1}\{(k_0, \ldots, k_n) \mid k_i = 0,1,2, i = 0,\ldots,n\},\\
T^3 &= \{\Lambda\} \cup \{(0)\} \cup \{(0,0),(0,1)\} \cup \{(0,0,0),(0,0,1),(0,0,2)\} \cup \ldots\\
&= \{\Lambda\} \cup \textstyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{(0)^n * (k) \mid k = 0,\ldots,n\}.
\end{aligned}$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι τα T^0, T^1, T^2, και T^3 είναι δένδρα στο $\mathbb{N}$. Ειδικά για το T^3 σημειώνουμε ότι κάθε $(0)^n$ για $n \geqslant 1$ λαμβάνεται ως $(0)^{n-1} * (k)$ για $k = 0$.

Οι επιπλέον ζητούμενες ιδιότητες για τα T^0 και T^1 είναι προφανείς. Για το T^2 παρατηρούμε ότι κάθε $u \in T^2$ έχει ακριβώς τρεις άμεσες προεκτάσεις μέσα στο T^2, τις $u * (0)$, $u * (1)$ και $u * (2)$.

Για το T^3 παρατηρούμε ότι κάθε $u \in T^3$ έχει πεπερασμένες το πλήθος άμεσες προεκτάσεις στο T^3. Συγκεκριμένα η κενή ακολουθία έχει για άμεση προέκταση στο T^3 την (0), η (0) τις $(0,0),(0,1)$ και γενικότερα κάθε $(0)^n$ τις $(0)^n * (k)$, για $k = 0, \ldots, n$. Οι τελευταίες ακολουθίες είναι τερματικές όταν $n \geqslant k \geqslant 1$. Επομένως για $n = 0$ υπάρχει ακολουθία u που έχει 0 άμεσες προεκτάσεις, δηλαδή είναι τερματική – μια επιλογή είναι η $u = (0,1)$. Για $n \geqslant 1$ η ακολουθία $u = (0)^{n-1} \in T^3$ έχει ακριβώς n άμεσες προεκτάσεις, τις $(0)^{n-1} * (k)$ για $k = 0, \ldots, n-1$.

Για το τελευταίο ζητούμενο επιλέγουμε το $u = (0,0,0,1) \in T^3$ και έχουμε ότι

$$T^3_u = \{\Lambda, (0), (0,0), (0,0,0), (0,0,0,1)\},$$

δηλαδή το T^3_u είναι όλα τα αρχικά τμήματα του u, καθώς το τελευταίο είναι τερματικό στο T^3. Αν επιλέξουμε $u' = (0,0,0,0) \in T^3$ τότε

$$T^3_{u'} = \{\Lambda, (0), (0,0), (0,0,0), (0,0,0,0)\} \cup \bigcup_{n \geqslant 4}\{(0)^n * (k) \mid k = 0, \ldots, n\}.$$

Επιπλέον επιλέγουμε $w = (0,0,0,2)$, τότε

$$T^3_w = \{\varnothing, (0), (0,0), (0,0,0)\},$$

δηλαδή το T^3_w είναι όλα τα αρχικά τμήματα του w που ανήκουν στο T^3. Αν επιλέξουμε $w' = (1,2,3,4)$, τότε $T^3_{w'} = \{\Lambda\}$, γιατί όλες οι μη κενές ακολουθίες του T^3 έχουν για πρώτο όρο το 0.

Άσκηση 2.5.16. Έχουμε $[T^0] = \varnothing$ γιατί το T^0 είναι πεπερασμένο. Επίσης $[T^1] = \varnothing$ γιατί κάθε $u \in T^1$ έχει μήκος το πολύ 1.

Το σώμα του T^2 είναι το σύνολο $[T^2] = \{\alpha \in \mathcal{N} \mid \forall n\ (\alpha(n) \in \{0,1,2\})\}$. Τέλος έχουμε $[T^3] = \{(0,0,\ldots,0,\ldots)\}$. Σχετικά με το τελευταίο είναι σαφές ότι το $(0,0,\ldots,0,\ldots)$ είναι άπειρο κλαδί του T^3 ενώ για κάθε $u \in [T^3]$ με $u(i) \neq 0$ για κάποιο $i < |u|$, θα έχουμε από τον ορισμό του T^3 ότι $i = |u|$ και άρα το u είναι τερματικό στο T^3. Επομένως, αν έχουμε $\alpha \in [T^3]$, τότε $\alpha(i) = 0$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 2.5.17. Αρχικά δείχνουμε ότι το $T(J)$ είναι δένδρο. Θεωρούμε $w \in J \neq \varnothing$, αφού $\Lambda \sqsubseteq w$ έχουμε $\Lambda \in T(J)$. Αν έχουμε $v \sqsubseteq u$ και $u \in T(J)$, τότε υπάρχει $w \in J$ με $v \sqsubseteq u \sqsubseteq w$, άρα $w \sqsubseteq w \in J$ και $v \in T(J)$.

Είναι σαφές ότι $J \subseteq T(J)$, δείχνουμε ότι το $T(J)$ περιέχεται σε κάθε δένδρο S με $J \subseteq S$. Θεωρούμε ένα τέτοιο S και ένα $u \in T(J)$. Τότε υπάρχει $w \in J$ με $u \sqsubseteq w$ και αφού $J \subseteq S$ έχουμε $w \in J$. Συνεπώς, $u \sqsubseteq w \in S$, αφού το S είναι δένδρο προκύπτει ότι $u \in S$. Καταλήγουμε ότι $T(J) \subseteq S$.

Άσκηση 2.5.18. Δείχνουμε αρχικά ότι το T_u είναι δένδρο. Έχουμε ότι $\Lambda \sqsubseteq u$, επομένως $\Lambda \in T_u$. Θεωρούμε ότι έχουμε $v \sqsubseteq w \in T_u$ και δείχνουμε ότι $v \in T_u$, δηλαδή $v||u$. Ισχύει $u||w$, αν $w \sqsubseteq u$, τότε $v \sqsubseteq u$ και άρα $v||u$. Οπότε παίρνουμε την περίπτωση $u \sqsubseteq w$. Σε αυτή την περίπτωση παρατηρούμε ότι για κάθε $i < \min\{|u|, |v|\}$ ισχύει

$$\begin{aligned} u(i) &= w(i) \quad (\text{γιατί } u \sqsubseteq w) \\ &= v(i) \quad (\text{γιατί } v \sqsubseteq w). \end{aligned}$$

Αν $|v| \leqslant |u|$ τότε από το πιο πάνω έχουμε ότι για κάθε $i < |v|$ ισχύει $v(i) = u(i)$ και άρα $v \sqsubseteq u$. Αν $|u| < |v|$, τότε για κάθε $i < |u|$ ισχύει $u(i) = v(i)$ και άρα $u \sqsubseteq v$. Σε κάθε περίπτωση έχουμε $u||v$ και άρα $v \in T_u$.

Έπειτα θεωρούμε $u \in T$ που δεν είναι τερματικός κόμβος και δείχνουμε την ισότητα $T_u = \bigcup_{u*(x) \in T} T_{u*(x)}$. Παίρνουμε $w \in T_u$ και θεωρούμε την περίπτωση $w \sqsubseteq u$. Αφού το u δεν είναι τερματικό στο T υπάρχει ένα $x \in X$ με $u * (x) \in T$. Τότε $w \sqsubseteq u * (x)$ και αφού $w \in T$ έχουμε $w \in T_{u*(x)}$. Στην περίπτωση που $u \sqsubsetneq w$ παίρνουμε για $x = w(|u|)$ οπότε $u * (x) \sqsubseteq w$ και έχουμε πάλι $w \in T_{u*(x)}$. Αντίστροφα, αν $w \in T_{u*(x)}$ με $u * (x) \in T$ και $w \sqsubsetneq u * (x)$, τότε $w \in T$ και $w \sqsubseteq u$, επομένως $w \in T_u$. Αν $u * (x) \sqsubseteq w$, τότε $u \sqsubseteq w$, επομένως ισχύει πάλι $w \in T_u$.

Για την ισότητα $[T_u] = \bigcup_{u*(x)\in T}[T_{u*(x)}]$ έχουμε για κάθε $f \in X^{\mathbb{N}}$ ότι

$$\begin{aligned}
f \in [T_u] &\iff \forall n\ (f(0),\dots,f(n)) \in T_u\\
&\iff \forall n > |u|\ (f(0),\dots,f(n)) \in T_u \quad \text{(αφού το } T_u \text{ είναι δένδρο)}\\
&\iff \forall n > |u|\ u \subsetneq (f(0),\dots,f(n))\\
&\iff \exists x\ (\ u*(x) \in T\ \&\ \forall n > |u|\ (f(0),\dots,f(n)) \in T_{u*(x)}\ )\\
&\iff \exists x\ (\ u*(x) \in T\ \&\ f \in [T_{u*(x)}]\ )\\
&\iff f \in \bigcup_{u*(x)\in T} [T_{u*(x)}].
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι εδώ δεν χρησιμοποιήσαμε ότι το u δεν είναι τερματικός κόμβος του T, επομένως η πιο πάνω ισότητα ισχύει για κάθε $u \in T$. Αυτό όμως δεν είναι ουσιαστική γενίκευση γιατί αν το u είναι τερματικός κόμβος του T τότε τα σύνολα και στις δύο πλευρές της ισότητας είναι κενά.

Άσκηση 2.5.19. Ορίζουμε $S = \{u \in T \mid [T_u] \neq \emptyset\}$. Προφανώς ισχύει $\Lambda \in S \subseteq T$. Επιπλέον, αν $u \in S$ και $w \sqsubseteq u$, τότε $\emptyset \neq [T_u] \subseteq [T_w]$ άρα $w \in S$. Επομένως το S είναι υποδένδρο του T.

Αν $u \in S$ τότε υπάρχει $f \in [T]$ με $u \sqsubseteq f$, ειδικότερα $v = u * f(|u|) \in T$. Είναι σαφές ότι $v \sqsubseteq f$ άρα $f \in [T_v]$. Προκύπτει ότι $v \in S$, και επομένως κάθε $u \in S$ έχει μια γνήσια επέκταση στο S, δηλαδή το S είναι κλαδεμένο.

Τέλος δείχνουμε ότι $[S_u] = [T_u]$ για κάθε $u \in T$. Σταθεροποιούμε ένα $u \in T$, είναι σαφές ότι $[S_u] \subseteq [T_u]$, επομένως θεωρούμε $f \in [T_u]$ και δείχνουμε ότι $f \in [S_u]$. Έστω $n \in \mathbb{N}$, τότε $f|n \in T_u$ και άρα $f|n||u$. Επιπλέον $f \in [T_{f|n}]$, επομένως $f|n \in S$. Έχουμε λοιπόν $f|n||u$ και $f|n \in S$, οπότε $f|n \in S_u$. Καταλήγουμε ότι $f \in [S_u]$.

Άσκηση 2.5.20. Για το A παίρνουμε το δένδρο

$$T^A = \{\Lambda\} \cup \{(n) * (0)^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}.$$

Για το B παίρνουμε το δένδρο που παράγεται (βλ. την Άσκηση 2.5.17) από το σύνολο

$$J^B = \{(0)^n * (n) * (1)^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}.$$

Δηλαδή

$$T^B = \{(0)^k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{(0)^n * (n) * (1)^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}.$$

Για το C παίρνουμε το δένδρο που παράγεται από το σύνολο

$$J^C = \{(1)^n * (2, \dots, m) \mid n, m \in \mathbb{N}\ \&\ m \geqslant 2\}.$$

Δηλαδή

$$T^C = \{(1)^k \mid k \in \mathbb{N}\} \ \cup\ \{(1)^n * (2, \dots, m) \mid n, m \in \mathbb{N}\ \&\ m \geqslant 2\}.$$

Τέλος για τα $\mathcal{N}_u$ παίρνουμε το

$$T^{\mathcal{N}_u} = \{w \in \mathcal{N} \mid w||u\} = T_u \quad \text{όπου } T = \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}.$$

Άσκηση 2.5.21. Παίρνουμε έναν οποιοδήποτε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ (π.χ. $\mathcal{X} = \{0\}, \mathbb{N}, \mathbb{R}$) και σταθεροποιούμε ένα $x_0 \in \mathcal{X}$.

Θεωρούμε ένα κλειστό $F \subseteq \mathcal{N}$ και ορίζουμε $P = \{(x, \alpha) \in \mathcal{X} \times \mathcal{N} \mid x = x_0\ \&\ \alpha \in P\}$. Με χρήση συγκλινουσών ακολουθιών μπορούμε να δούμε ότι το P είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathcal{N}$. Από το Λήμμα 2.5.14 υπάρχει ένα κλειστό $T \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, έτσι ώστε για κάθε $x \in \mathcal{X}$ το $T(x) = \{u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \mid (x, u) \in T\}$ είναι δένδρο και $P = \{(x, \alpha) \mid \alpha \in [T(x)]\}$.

Παίρνουμε $x = x_0$ και έχουμε $\alpha \in F \iff (x_0, \alpha) \in P \iff \alpha \in [T(x_0)]$ για κάθε $\alpha \in \mathcal{N}$. Επομένως $F = [T(x_0)]$.

Αντίστροφα θεωρούμε ένα δένδρο S στο $\mathbb{N}$ και δείχνουμε ότι το $[S]$ είναι κλειστό. Ορίζουμε το σύνολο

$$T_0 = \{(x,u) \in \mathcal{X} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \mid (x = x_0 \ \&\ u \in S) \ \vee \ (x \neq x_0 \ \&\ u = \Lambda)\}.$$

Τότε το T_0 είναι εύκολα κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ και για κάθε $x \in \mathcal{X}$ το $T_0(x)$ είναι είτε το S (όταν $x = x_0$) είτε το $\{\Lambda\}$ (όταν $x \neq x_0$). Άρα κάθε $T_0(x)$ είναι δένδρο. Προκύπτει από το Λήμμα 2.5.14 ότι το σύνολο

$$P_0 = \{(x,\alpha) \in \mathcal{X} \times \mathcal{N} \mid \alpha \in [T_0(x)]\}$$

είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathcal{N}$. Άρα και το σύνολο

$$F_0 = \{\alpha \in \mathcal{N} \mid (x_0,\alpha) \in P_0\}$$

είναι κλειστό.

Από την άλλη έχουμε $\alpha \in F_0 \iff (x_0,\alpha) \in P_0 \iff \alpha \in [T_0(x_0)]$ για κάθε $\alpha \in \mathcal{N}$. Επειδή $T_0(x_0) = S$ έχουμε ότι $F_0 = [S]$ και άρα το $[S]$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{N}$.

Άσκηση 2.5.22. Είναι σαφές ότι $2^{\mathbb{N}} = [T]$ όπου $T = \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$. Επειδή το δένδρο T είναι πεπερασμένης διακλάδωσης έχουμε από το Πόρισμα 2.5.7 ότι το $[T]$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathcal{N}$.

Άσκηση 2.5.23. Δείχνουμε το ζητούμενο με επαγωγή στο n. Προφανώς το $F_0 = \{\Lambda\}$ είναι πεπερασμένο σύνολο. Είναι επίσης άμεσο ότι

$$F_{n+1} = \bigcup\{u * (x) \mid x \in X \ \&\ u * (x) \in T \ \&\ u \in F_n\}.$$

Άρα αν το F_n είναι πεπερασμένο, επειδή το T είναι πεπερασμένης διακλάδωσης, το F_{n+1} είναι επίσης πεπερασμένο σύνολο.

Άσκηση 2.5.24. Από την Πρόταση 2.5.2 υπάρχουν δένδρα S και T με $[S] = H$ και $[T] = F$. Με εφαρμογή της Πρότασης 2.5.10 αρκεί να βρούμε μια κατάλληλη μονότονη $\varphi : S \to T$ με $\varphi^*(\alpha) = \alpha$ για κάθε $\alpha \in F$. (Παρατηρήστε ότι χρησιμοποιούμε την αντίστροφη κατεύθυνση της τελευταίας πρότασης, όπου το S δεν χρειάζεται να είναι κλαδεμένο.)

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $T \subseteq S$, αλλιώς αντικαθιστούμε το T με το $T \cap S \subseteq S$. Τότε για κάθε $\alpha \in F = [T] \subseteq H = [S]$ και για κάθε n ισχύει $\alpha|n \in T \cap S$, άρα $F = [T] = [T \cap S]$.

Από την Άσκηση 2.5.19 μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι το T είναι κλαδεμένο. (Το S θα μπορούσαμε να το αντικαταστήσουμε από την αρχή με ένα κλαδεμένο υποδένδρο του, αλλά, όπως εξηγήσαμε πιο πάνω, αυτό δεν είναι απαραίτητο.)

Ορίζουμε τη συνάρτηση $\varphi : S \to T$ με επαγωγή στο μήκος του $u \in S$. Αρχικά ορίζουμε $\varphi(\Lambda) = \Lambda$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $u \in S$ με $|u| = n$, το $\varphi(u)$ έχει οριστεί, ανήκει στο T και ισχύει $\varphi(u) = u$ όταν $u \in T$. Τότε για κάθε $i \in \mathbb{N}$ με $u * (i) \in S$ ορίζουμε

$$\varphi(u * (i)) = \begin{cases} u * (i), & \text{αν } u * (i) \in T, \\ \varphi(u) * (k), & \text{αν } u * (i) \notin T, \end{cases}$$

όπου k είναι ο ελάχιστος φυσικός αριθμός με $\varphi(u) * (k) \in T$. Πάντα υπάρχει ένα τέτοιο k γιατί $\varphi(u) \in T$ και το δένδρο T είναι κλαδεμένο.

Εύκολα βλέπουμε ότι $\varphi(u) \in T$ για κάθε $u \in S$, $\varphi(u) = u$ για κάθε $u \in T$, και για κάθε $u \subsetneq v$ ισχύει $\varphi(u) \subsetneq \varphi(v)$. Άρα η φ είναι κατάλληλη και μονότονη. Επιπλέον για κάθε $\alpha \in [T]$ έχουμε $\varphi(\alpha|n) = \varphi(\alpha|n)$ για κάθε n, επομένως $\varphi^*(\alpha) = \alpha$.

Άσκηση 2.5.25. Θεωρούμε την $F : \mathrm{Tr} \to 2^{\mathbb{N}} : F(T) = \alpha_T$ από τον ορισμό του χώρου των δένδρων. Αρχικά δείχνουμε ότι τα σύνολα $B(I,J)$ είναι ανοικτά. Όταν τουλάχιστον ένα από τα I,J είναι μη κενό, το $B(I,J)$ είναι πεπερασμένη τομή συνόλων που έχουν μία από τις εξής μορφές,

$$V(u) = \{T \in \mathrm{Tr} \mid u \in T\}, \qquad O(w) = \{T \in \mathrm{Tr} \mid w \notin T\},$$

όπου $u,w \in T$. Στην περίπτωση που $I = J = \emptyset$, το $B(I,J)$ είναι εξ ορισμού όλος ο χώρος Tr και επομένως είναι ανοικτό σύνολο.

Οπότε αρκεί να δείξουμε ότι τα πιο πάνω $V(u)$ και $O(w)$ είναι ανοικτά. Παίρνουμε λοιπόν $u = \mathrm{u}_s$ και $w = \mathrm{u}_t$, όπου $s,t \in \mathbb{N}$ και έχουμε για κάθε $T \in \mathrm{Tr}$,

$$\begin{aligned} T \in V(u) &\iff \mathrm{u}_s \in T \iff \alpha_T(s) = 1 \\ &\iff \alpha_T \in \{0,1\} \times \{0,1\} \times \cdots \times \{1\} \times \{0,1\} \times \dots \\ &\iff F(T) \in W_s \end{aligned}$$

όπου $W_s = \{0,1\} \times \{0,1\} \times \cdots \times \{1\} \times \{0,1\} \times \dots$ και το $\{1\}$ βρίσκεται στη θέση s. Επειδή το σύνολο W_s είναι ανοικτό υποσύνολο του $2^{\mathbb{N}}$, έχουμε ότι το $V(u) = F^{-1}[W_s]$ είναι ανοικτό υποσύνολο του Tr.

Όμοια βλέπει κανείς ότι $O(w) = \alpha_T^{-1}[W_t']$ όπου $W_t' = \{0,1\} \times \{0,1\} \times \cdots \times \{0\} \times \{0,1\} \times$ και το $\{0\}$ βρίσκεται στη θέση t. Επομένως το $O(w)$ είναι και αυτό ανοικτό στον Tr.

Στη συνέχεια θεωρούμε ένα ανοικτό $V \subseteq \mathrm{Tr}$ και $T \in V$. Αρκεί να βρούμε $I,J \subseteq \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με $T \in B(I,J) \subseteq V$. Αφού το V είναι ανοικτό υπάρχει ένα ανοικτό $W \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ με $V = F^{-1}[W]$. Τα σύνολα $\mathcal{N}_v \cap 2^{\mathbb{N}}$, όπου $v \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ αποτελούν βάση για την τοπολογία του $2^{\mathbb{N}}$, και αφού $F(T) = \alpha_T \in W$ υπάρχει ένα $v \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ με $\alpha_T \in \mathcal{N}_v \cap 2^{\mathbb{N}} \subseteq W$. Επομένως για κάθε $i < |v|$ ισχύει $\alpha_T(i) = v(i)$.

Παίρνουμε τα σύνολα

$$\begin{aligned} I &= \{\mathrm{u}_s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \mid s < |v| \ \&\ \alpha_T(s) = v(s) = 1\} \quad \text{και} \\ J &= \{\mathrm{u}_t \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \mid t < |v| \ \&\ \alpha_T(t) = v(t) = 0\}. \end{aligned}$$

Τότε αν $u = \mathrm{u}_s \in I$, έχουμε $\alpha_T(s) = 1$ και άρα $\mathrm{u}_s \in T$. Όμοια αν $w = \mathrm{u}_t \in J$, έχουμε $\mathrm{u}_t \notin T$. Άρα $T \in B(I,J)$.

Δείχνουμε ότι $B(I,J) \subseteq V$. Θεωρούμε ένα $S \in B(I,J)$, τότε $\alpha_S(s) = 1$ για κάθε $\mathrm{u}_s \in T$ και $\alpha_S(t) = 0$ για κάθε $\mathrm{u}_t \in J$. Αυτό σημαίνει ότι $\alpha_S(i) = v(i)$ για κάθε $i < |v|$ και άρα $\alpha_S \in \mathcal{N}_v \cap 2^{\mathbb{N}} \subseteq W$. Δηλαδή $F(S) \in W$ και $S \in F^{-1}[W] = V$.

Τα προηγούμενα δείχνουν ότι τα σύνολα $B(I,J)$ αποτελούν βάση για την τοπολογία του Tr.

Σχετικά με τον χαρακτηρισμό της σύγκλισης στον Tr: για την ευθεία κατεύθυνση αν έχουμε $T_i \to T$ εφαρμόζουμε για κάθε $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ τον ορισμό της σύγκλισης παίρνοντας για ανοικτό σύνολο που περιέχει το T είτε το $V(u) = \{S \in \mathrm{Tr} \mid u \in S\}$ (αν $u \in T$) είτε το $O(u) = \{S \in \mathrm{Tr} \mid u \notin S\}$ (αν $u \notin T$). Για την αντίστροφη κατεύθυνση θεωρούμε ένα $B(I,J)$ με $T \in B(I,J)$ και εφαρμόζουμε την υπόθεση σε κάθε ένα από τα στοιχεία του $I \cup J$. Εφόσον το τελευταίο σύνολο είναι πεπερασμένο, μπορούμε να βρούμε ένα i_0 έτσι ώστε για κάθε $i \geqslant i_0$, κάθε $u \in I$ και κάθε $w \in J$ ισχύει $u \in T_i$ και $w \notin T_i$. Το τελευταίο σημαίνει ότι $T_i \in B(I,J)$ για κάθε $i \geqslant i_0$.

Άσκηση 2.5.26. Θεωρούμε μια ακολουθία $((x_i,u_i))_{i\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του T και $(x,u) \in \mathcal{X} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με $(x_i,u_i) \to (x,u)$, δηλαδή $x_i \to x$ και $u_i \to u$. Επειδή στο $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ έχουμε τη διακριτή μετρική, έχουμε ότι $u_i = u$ τελικά για όλα τα $i \in \mathbb{N}$, οπότε χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $(x_i,u) \in T$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$.

Δείχνουμε ότι $(x, u) \in T$. Έστω $v \in J$ και $n \in I$ με $n \leqslant |u|$. Επειδή $(x_0, u) \in T$ έχουμε $v \not\sqsubseteq u$. Πρέπει να δείξουμε ότι $x \notin V_n$. Αφού $(x_i, u) \in T$, έχουμε $x \in \mathcal{X} \setminus V_n$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Το σύνολο $\mathcal{X} \setminus V_n$ είναι κλειστό, και άρα $x = \lim_{i\to\infty} x_i \in \mathcal{X} \setminus V_n$.

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι η

$$f : \mathcal{X} \to \mathrm{Tr} : f(x) = T(x) = \{u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \mid (x, u) \in T\}$$

αντιστρέφει ανοικτά σύνολα σε F_σ.

Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $u_0, \ldots, u_m, w_0, \ldots, w_k \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ η αντίστροφη εικόνα του συνόλου

$$B(u_0, \ldots, u_m, w_0, \ldots, w_k) = \{T \in \mathrm{Tr} \mid \forall i \leqslant m \ \forall\ j \leqslant k\ (u_i \in T\ \&\ w_j \notin T)\}$$

μέσω της f είναι F_σ υποσύνολο του $\mathcal{X}$, γιατί από την Άσκηση 2.5.25 τα πιο πάνω σύνολα αποτελούν βάση για την τοπολογία του Tr και η αριθμήσιμη ένωση F_σ συνόλων είναι επίσης F_σ σύνολο.

Θεωρούμε $u_0, \ldots, u_m, w_0, \ldots, w_k \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ και $B \equiv B(u_0, \ldots, u_m, w_0, \ldots, w_k)$, όπως πιο πάνω. Τότε για κάθε $x \in \mathcal{X}$,

$$f(x) \in B \iff \forall i \leqslant m \ \forall\ j \leqslant k\ (u_i \in T(x)\ \&\ w_j \notin T(x)).$$

Αν θέσουμε

$$P_u = \{x \in \mathcal{X} \mid u \in T(x)\} \quad \text{και} \quad Q_w = \{x \in \mathcal{X} \mid w \notin T(x)\}$$

όπου $u, w \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, έχουμε από τα προηγούμενα ότι

$$f^{-1}[B] = \textstyle\bigcap_{i\leqslant m, j\leqslant k}(P_{u_i} \cap Q_{w_j}).$$

Επειδή η πεπερασμένη τομή F_σ συνόλων είναι F_σ σύνολο, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $u, w \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ τα σύνολα P_u, Q_w είναι F_σ.

Για την ακρίβεια κάθε σύνολο P_u είναι κλειστό γιατί το T είναι κλειστό σύνολο: αν $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία στο P_u και $x_i \to x$, τότε $(x_i, u) \in T$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$ και $(x_i, u) \to (x, u)$. Άρα $(x, u) \in T$ δηλαδή $x \in P_u$. Παρατηρούμε ότι $Q_w = \mathcal{X} \setminus P_w$ και άρα το Q_w είναι ανοικτό.

Προφανώς κάθε κλειστό σύνολο είναι F_σ και από την Πρόταση 2.1.6 κάθε ανοικτό σύνολο είναι επίσης F_σ. Έτσι έχουμε το ζητούμενο.

Τέλος δείχνουμε ότι αν τα V_n είναι κλειστά-ανοικτά σύνολα, τότε τα πιο πάνω σύνολα P_u είναι ανοικτά. Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι η αντίστροφη εικόνα των βασικών συνόλων $B(u_0, \ldots, u_m, w_0, \ldots, w_k)$ είναι πεπερασμένη τομή ανοικτών συνόλων και είναι συνεπώς ανοικτό σύνολο. Επομένως, σε αυτή την περίπτωση η f είναι συνεχής.

Θεωρούμε λοιπόν ότι κάθε V_n είναι κλειστό-ανοικτό και $x \in P_u$ για κάποιο $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. Αν δεν υπάρχει $n \in I$ με $n < |u|$, τότε $P_u = \mathcal{X}$ (καθολικός ποσοδείκτης υπεράνω του κενού συνόλου) και άρα το P_u είναι ανοικτό σύνολο. Αν υπάρχει $n \in I$ με $n < |u|$, τότε για κάθε τέτοιο n (υπάρχουν πεπερασμένα τέτοια) ισχύει $x \in \mathcal{X} \setminus V_n$. Τα συμπληρώματα $\mathcal{X} \setminus V_n$ είναι ανοικτά σύνολα και συνεπώς υπάρχει ένα ανοικτό σύνολο G με

$$x \in G \subseteq \textstyle\bigcap_{n\in I, n<|u|} (\mathcal{X} \setminus V_n).$$

Εφόσον $x \in P_u$, έχουμε ότι για κάθε $v \in J$ ισχύει $v \not\sqsubseteq u$. Προκύπτει ότι $x \in G \subseteq P_u$ και το P_u είναι ανοικτό.

Άσκηση 2.5.27. Όπως στην απόδειξη του Λήμματος 2.5.14. Αντικαθιστούμε τα σύνολα $\mathcal{N}_v$ με τα σύνολα

$$Y_v = \{f \in Y^{\mathbb{N}} \mid v \sqsubseteq f\}.$$

Η οικογένεια $\{Y_v \mid v \in Y^{<\mathbb{N}}\}$ αποτελεί βάση για την τοπολογία του $Y^{\mathbb{N}}$ και προφανώς ισχύει $Y_v = \bigcup_{a\in Y} Y_{v*(a)}$ για κάθε $v \in Y^{<\mathbb{N}}$, ειδικότερα $Y_\Lambda = \bigcup_{a\in Y} Y_{(a)}$.

Άσκηση 2.5.28. Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό του Λήμματος 2.5.5 θεωρούμε το σύνολο $Q \subseteq P \times P$ που ορίζεται ως εξής,

$$(u, w) \in Q \iff u \sqsubseteq w \ \&\ |w| = |u| + 1, \quad u, w \in P.$$

Δηλαδή $(u, w) \in Q$ αν και μόνο αν τα υποδένδρα T_u και T_w είναι άπειρα και το w είναι άμεση επέκταση του u. Σύμφωνα με την (2.20), για κάθε $u \in P$ υπάρχει $w \in P$ με $(u, w) \in Q$.

Σκοπός μας είναι να κατασκευάσουμε μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ για την οποία ισχύει $(x_0, \dots, x_n) \in T$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Από το Αξίωμα Εξαρτημένων Επιλογών DC υπάρχει μια συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to P$ για την οποία ισχύει $(f(n), f(n+1)) \in Q$. Επομένως η $f(n+1)$ είναι άμεση επέκταση της $f(n)$. Αν θέσουμε $y_n = f(n+1)(|f(n)|)$, έχουμε

$$f(n+1) = f(n) * (y_n)$$

και επομένως ισχύει

$$f(n+1) = f(0) * (y_0, \dots, y_n)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Αν η $f(0)$ είναι η κενή ακολουθία, τότε η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακριβώς η $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Αν η $f(0)$ δεν είναι κενή ακολουθία, τότε υπάρχουν $z_0, \dots, z_m \in X$ με $u_0 = (z_0, \dots, z_m)$, οπότε έχουμε από πιο πάνω

$$f(n+1) = (z_0, \dots, z_m, y_0, \dots, y_n).$$

Επομένως παίρνουμε $x_k = z_k$ για $k \leqslant m$ και $x_{m+n} = y_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 2.5.29. Η ευθεία κατεύθυνση είναι άμεση από την απόδειξη της Πρότασης 2.5.6, όπου έχουμε χρησιμοποιήσει το Λήμμα του König για να δείξουμε ότι το σώμα κάθε δένδρου πεπερασμένης διακλάδωσης είναι συμπαγές.

Αντίστροφα θεωρούμε $X \neq \emptyset$ και T ένα άπειρο δένδρο στο X, το οποίο είναι πεπερασμένης διακλάδωσης. Θα δείξουμε ότι $[T] \neq \emptyset$. Αφού το T είναι άπειρο, προκύπτει από την Άσκηση 2.5.23 ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $u \in T$ με $n < |u|$, και περιορίζοντας το u κατάλληλα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $n = |u|$.

Από το $\mathrm{AC}_{\mathbb{N}}$ υπάρχει μια ακολουθία $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του T με $|u_n| = n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Παίρνουμε ένα $x_0 \in X$ και ορίζουμε

$$f_n : \mathbb{N} \to X : f_n = u_n * (x_0, x_0, \dots).$$

Δείχνουμε ότι τα f_n είναι στοιχεία ενός δένδρου πεπερασμένης διακλάδωσης. Ορίζουμε $S \subseteq X^{<\mathbb{N}}$ ως εξής:

$$w \in S \iff w \in T \ \vee\ \exists u \in T\ w = u * (x_0, \dots, x_0).$$

Μπορεί κανείς να δει εύκολα ότι το S είναι δένδρο στο X πεπερασμένης διακλάδωσης. Προφανώς ισχύει $f_n \in [S]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από την υπόθεσή μας το $[S]$ είναι συμπαγές και άρα η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει μια υπακολουθία $(f_{s_n})_{n\in\mathbb{N}}$ που συγκλίνει σε κάποιο $f \in [S]$.

Τέλος δείχνουμε ότι $f \in [T]$. Έστω $m \in \mathbb{N}$, τότε υπάρχει $n > m$ έτσι ώστε για κάθε $k \leqslant m$ ισχύει $f_{s_n}(k) = f(k)$. Ισχύει $m < |u_{s_n}|$ γιατί $|u_{s_n}| = s_n \geqslant n > m$. Επιπλέον $f_{s_n} = u_{s_n} * (x_0, x_0, \dots)$ και για κάθε $k \leqslant m < |u_{s_n}|$,

$$f(k) = f_{s_n}(k) = u_{s_n}(k).$$

Επομένως

$$(f(0), \ldots, f(m)) = (u_{s_n}(0), \ldots, u_{s_n}(m)) \sqsubseteq u_{s_n} \in T$$

και άρα $(f(0), \ldots, f(m)) \in T$ για κάθε m, δηλαδή $f \in [T]$.

Άσκηση 2.6.12. Παίρνουμε έναν συμπαγή Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$. Από το Θεώρημα 2.6.2 ο $\mathcal{X}$ είναι τοπολογικά ισομορφικός με έναν υπόχωρο $G \subseteq \mathbb{H}$. Το G είναι συμπαγές σύνολο ως συνεχής εικόνα συμπαγούς συνόλου, επομένως το G είναι κλειστό.

Άσκηση 2.6.13. Η ιδέα στηρίζεται στο ότι μια ακολουθία ακολουθιών είναι ουσιαστικά και αυτή ακολουθία. Αρχικά θεωρούμε μια αντιστοιχία $[\cdot] : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrowtail\!\!\!\!\to \mathbb{N} : (n, t) \mapsto [n, t]$. Δείχνουμε αρχικά τον ισχυρισμό για τον χώρο του Cantor.

Για κάθε ακολουθία $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στον $2^{\mathbb{N}}$ ορίζουμε

$$\alpha : \mathbb{N} \to \{0, 1\} : \alpha(k) = \alpha_n(t), \quad \text{όπου } k = [n, t].$$

Η α είναι καλά ορισμένη γιατί κάθε $k \in \mathbb{N}$ είναι της μορφής $[n, t]$ για κάποια n, t. Οπότε ορίζουμε την

$$f : (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}} : (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \alpha,$$

όπου το α είναι όπως πιο πάνω. Εύκολα η f είναι ένα-προς-ένα και επί. Για τη συνέχεια της f αν έχουμε $\overline{\alpha}^{\,i} \to \overline{\alpha}$, όπου $\overline{\alpha}^{\,i} = (\alpha_n^i)_{n \in \mathbb{N}} \in (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$ και $\overline{\alpha} = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$, τότε για κάθε $k = [n, t]$ έχουμε $\alpha_n^i \xrightarrow{i \to \infty} \alpha_n$ (σύγκλιση στον $2^{\mathbb{N}}$) και άρα

$$\alpha_n^i(t) \xrightarrow{i \to \infty} \alpha_n(t) \quad (\text{σύγκλιση στον } \mathbb{N}).$$

Αυτό σημαίνει ότι $f(\overline{\alpha}^{\,i})([n, t]) \to f(\overline{\alpha})([n, t])$. Καταλήγουμε ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει $f(\overline{\alpha}^{\,i})(k) \to f(\overline{\alpha})(k)$, επομένως $f(\overline{\alpha}^{\,i}) \to f(\overline{\alpha})$. Αυτό δείχνει τη συνέχεια της f.

Η συνέχεια της f^{-1} αποδεικνύεται ακολουθώντας την αντίθετη κατεύθυνση στον προηγούμενο συλλογισμό.

Ο ισχυρισμός για τον χώρο του Baire αποδεικνύεται με τον ακριβώς ίδιο τρόπο. Μάλιστα, ο πιο πάνω τοπολογικός ισομορφισμός $f : (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \rightarrowtail\!\!\!\!\to 2^{\mathbb{N}}$ επεκτείνεται με τετριμμένο τρόπο σε έναν τοπολογικό ισομορφισμό $F : \mathcal{N}^{\mathbb{N}} \rightarrowtail\!\!\!\!\to \mathcal{N}$.

Άσκηση 2.6.14. Ο χώρος $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι Πολωνικός χώρος από το Πόρισμα 2.1.9. Για κάθε ζεύγος ρητών αριθμών (p, q) ορίζουμε

$$I(p, q) = \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \mid p < x < q\} = (p, q) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}).$$

Κάθε $I(p, q)$ είναι ανοικτό σύνολο στον $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, γιατί είναι η τομή ενός ανοικτού υποσυνόλου του $\mathbb{R}$ με τον $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Δείχνουμε ότι το $I(p, q)$ είναι και κλειστό. Θεωρούμε μια ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο $I(p, q)$ με $x_n \to x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Τότε $p < x_n < q$ για κάθε n, επομένως $p \leqslant x \leqslant q$. Αν είχαμε $x = p$ ή $x = q$, τότε ο x δεν θα ήταν άρρητος αριθμός, που είναι άτοπο. Άρα $p < x < q$, και επομένως $x \in (p, q) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = I(p, q)$.

Όπως είναι γνωστό, τα διαστήματα (p, q) με $p, q \in \mathbb{Q}$ αποτελούν βάση για την τοπολογία του $\mathbb{R}$, συνεπώς τα $I(p, q) = (p, q) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, όπου $p, q \in \mathbb{Q}$, αποτελούν βάση για την τοπολογία του $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Άσκηση 2.6.15. Θεωρούμε ένα μη κενό $A \subseteq \mathbb{R}$ που είναι κλειστό-ανοικτό και υποθέτουμε προς άτοπο ότι $A \neq \mathbb{R}$. Θέτουμε $F = A$ και $H = \mathbb{R} \setminus A$. Τότε τα F, H είναι μη κενά, κλειστά, ξένα ανά δύο και $F \cup H = \mathbb{R}$. Θεωρούμε τις συναρτήσεις των αποστάσεων $x \in \mathbb{R} \mapsto d(x, F)$ και $x \in \mathbb{R} \mapsto d(x, H)$ από τα F και H αντίστοιχα, όπου d είναι η συνήθης μετρική: $d(x, y) = |x - y|$.

Επειδή τα F και H είναι μη κενά, οι προηγούμενες συναρτήσεις είναι καλά ορισμένες, και επειδή είναι κλειστά δεν μπορούμε να έχουμε $d(x, F) = d(x, H) = 0$ για οποιοδήποτε $x \in \mathbb{R}$. Συνεπώς, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $d(x, F) + d(x, H) > 0$.

Παίρνουμε τη συνάρτηση

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = \frac{d(x, F)}{d(x, F) + d(x, H)} \ .$$

Η f είναι καλά ορισμένη και συνεχής. Επιπλέον για κάθε $x \in F$ ισχύει $f(x) = 0$ και για κάθε $x \in H$ ισχύει $f(x) = 1$. Παίρνουμε $x_0 \in F$ και $y_0 \in H$. Τότε $f(x_0) = 0 < 1 = f(y_0)$ και άρα από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ με $f(x) = 2^{-1}$. Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί $\mathbb{R} = F \cup H$, επομένως είτε $x \in F$ (οπότε $f(x) = 0$) είτε $x \in H$ (οπότε $f(x) = 1$).

Άρα $A = \mathbb{R}$.

Άσκηση 2.6.16. Θεωρούμε μια συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathcal{X}$, όπου ο $\mathcal{X}$ είναι μηδενοδιάστατος Πολωνικός χώρος και υποθέτουμε προς άτοπο ότι η f δεν είναι σταθερή. Τότε υπάρχουν $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ με $f(a_0) \neq f(b_0)$. Αφού ο $\mathcal{X}$ είναι μηδενοδιάστατος υπάρχει ένα κλειστό-ανοικτό σύνολο V με $f(a_0) \in V$ και $f(b_0) \notin V$. (Για να το δούμε αυτό παίρνουμε μια κατάλληλη μετρική d στον $\mathcal{X}$ και μια d-ανοικτή μπάλα B κέντρου $f(a_0)$ κατάλληλα μικρής ακτίνας ώστε $f(b_0) \notin B$. Τότε υπάρχει ένα κλειστό-ανοικτό σύνολο V με $x_0 \in V \subseteq B$.)

Το σύνολο $A = f^{-1}[V]$ είναι κλειστό-ανοικτό γιατί η f είναι συνεχής. Επιπλέον ισχύει $A \neq \varnothing$, γιατί $a_0 \in A$ και $A \neq \mathbb{R}$ γιατί $b_0 \notin A$. Επομένως έχουμε ένα κλειστό-ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ που δεν είναι ούτε το κενό σύνολο ούτε ο $\mathbb{R}$. Αυτό όμως είναι άτοπο, (βλ. την Άσκηση 2.6.15).

Είναι τότε άμεσο πως δεν μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον $\mathcal{N}$ και τον $2^{\mathbb{N}}$ με τον $\mathbb{R}$ στα Θεωρήματα 2.3.7 και 2.3.12 αντίστοιχα. Κάθε συνεχής συνάρτηση $\pi : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{N}}$ είναι σταθερή, επομένως δεν μπορεί να είναι επιμορφισμός, και κάθε συνεχής συνάρτηση $\tau : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{N}}$ είναι σταθερή, επομένως δεν μπορεί να είναι μονομορφισμός.

Άσκηση 2.6.17. Θέτουμε $\vec{0} = (0, 0, \ldots, 0, \ldots)$, $\alpha = (1, 1, \ldots, 1, \ldots)$ και

$$\alpha_i = (1)^{i+1} * (0, 0, \ldots) = (1, 1, \ldots, 1, 0, 0, 0, \ldots)$$

(το 1 εμφανίζεται $i + 1$-φορές) για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Τότε $\alpha_i \to \alpha$. Επιπλέον

$$d(\alpha_i, \vec{0}) = \sum_{n=0}^{i} (2^{-n} \cdot \min\{1, 1\}) + \sum_{n=i+1}^{\infty} (2^{-n} \cdot \min\{0, 1\}) = \sum_{n=0}^{i} 2^{-n} < \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 2,$$

άρα $\alpha_i \in B_d(\vec{0}, 2)$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Από την άλλη

$$d(\alpha, \vec{0}) = \sum_{n=0}^{\infty} (2^{-n} \cdot \min\{1, 1\}) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 2.$$

Άρα $\alpha \notin B_d(\vec{0}, 2)$.

Άσκηση 2.6.18. Για το ευθύ άθροισμα θεωρούμε μηδενοδιάστατους Πολωνικούς χώρους $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ όπως επίσης και βάσεις $\mathcal{V}_{\mathcal{X}}, \mathcal{V}_{\mathcal{Y}}$ αντίστοιχα που αποτελούνται από κλειστά-ανοικτά σύνολα. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι βάσεις περιέχουν το κενό σύνολο. Για κάθε $A \subseteq \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$ θέτουμε $A_0 = \{x \in \mathcal{X} \mid (0, x) \in A\}$ και $A_1 = \{y \in \mathcal{Y} \mid (1, y) \in A\}$, έτσι που το A είναι ανοικτό στον $\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$ αν και μόνο αν τα A_0 και A_1 είναι ανοικτά στους $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$ αντίστοιχα. Παίρνουμε την οικογένεια

$$\mathcal{V} = (\{0\} \times \mathcal{V}_{\mathcal{X}}) \cup (\{1\} \times \mathcal{V}_{\mathcal{Y}}).$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η $\mathcal{V}$ είναι βάση για την τοπολογία του $\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$. Δείχνουμε ότι η $\mathcal{V}$ αποτελείται από κλειστά-ανοικτά σύνολα. Αν έχουμε $V \in \mathcal{V}$, τότε τα V_0 και V_1 ανήκουν στις $\mathcal{V}_{\mathcal{X}}$, $\mathcal{V}_{\mathcal{Y}}$, και άρα είναι κλειστά-ανοικτά υποσύνολα των $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ αντίστοιχα. Παίρνουμε τα συμπληρώματα $F_0 = \mathrm{c}_{\mathcal{X}} V_0$, $F_1 = \mathrm{c}_{\mathcal{Y}} V_1$ και $F = \mathrm{c}_{\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}} V$. Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι

$$F = (\{0\} \times F_0) \cup (\{1\} \times F_1).$$

Τα F_0 και F_1 είναι ανοικτά στους $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$ αντίστοιχα. Από την ισότητα πιο πάνω το F είναι ανοικτό και άρα το συμπλήρωμα V είναι κλειστό στον $\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$.

Σχετικά με το άπειρο αριθμήσιμο γινόμενο, θεωρούμε μια ακολουθία $(\mathcal{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μηδενοδιάστατων Πολωνικών χώρων και αντίστοιχες βάσεις $\mathcal{V}_n$, $n \in \mathbb{N}$, από κλειστά-ανοικτά σύνολα. Όπως γνωρίζουμε, η οικογένεια

$$\mathcal{V} = \{V_0 \times \cdots \times V_n \times \mathcal{X}_{n+1} \times \ldots \mid V_i \in \mathcal{V}_i, i = 0, \ldots, n, n \in \mathbb{N}\}$$

είναι βάση για την τοπολογία γινόμενο στον $\mathcal{X} = \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{X}_n$. Για κάθε $V = V_0 \times \cdots \times V_n \times \mathcal{X}_{n+1} \times \cdots \in \mathcal{V}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{X} \setminus V = \quad & (\mathcal{X}_0 \setminus V_0) \times \mathcal{X}_1 \times \ldots \\ & \cup \mathcal{X}_0 \times (\mathcal{X}_1 \setminus V_1) \times \mathcal{X}_2 \times \ldots \\ & \cup \ldots \\ & \cup \mathcal{X}_0 \times \cdots \times (\mathcal{X}_n \setminus V_n) \times \mathcal{X}_{n+1} \times \ldots . \end{aligned}$$

Κάθε $\mathcal{X}_i \setminus V_i$ είναι ανοικτό στον $\mathcal{X}_i$, γιατί το V_i είναι κλειστό-ανοικτό σύνολο. Επομένως, το $\mathcal{X} \setminus V$ είναι ένωση ανοικτών συνόλων και άρα ανοικτό στον $\mathcal{X}$. Άρα το $\mathcal{V}$ είναι κλειστό στον $\mathcal{X}$.

Ο ισχυρισμός για τα πεπερασμένα γινόμενα αποδεικνύεται με όμοιο τρόπο.

Άσκηση 2.6.19. Για το (α) θεωρούμε $y \in \mathcal{X}$ και μια ακολουθία $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ από στοιχεία του $B_d(x, r)$ με $x_i \to y$. Δείχνουμε ότι $y \in B_d(x, r)$. Για κάθε i ισχύει

$$d(x, y) \leqslant \max\{d(x, x_i), d(x_i, y)\}.$$

Αφού $x_i \to y$, υπάρχει ένα i_0 με $d(x_{i_0}, y) < r$. Άρα $d(x, y) \leqslant \max\{d(x, x_{i_0}), d(x_{i_0}, y)\} < r$, άρα $y \in B_d(x, r)$. Αυτό δείχνει ότι το σύνολο $B_d(x, r)$ είναι κλειστό. Κάθε ανοικτή μπάλα είναι ανοικτό σύνολο. Επομένως, το $B_d(x, r)$ είναι ανοικτό-κλειστό.

Για το (β) υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $d(x, z) < d(y, z)$. Τότε

$$d(x, y) \leqslant \max\{d(x, z), d(z, y)\} = d(y, z).$$

Αν είχαμε $d(x, y) < d(y, z)$, τότε θα ίσχυε $\max\{d(y, x), d(x, z)\} < d(y, z)$ που έρχεται σε αντίθεση με την χαρακτηριστική ιδιότητα της υπερμετρικής. Άρα $d(x, y) = d(y, z)$.

Για το (γ) θεωρούμε $y \in B_d(x, r)$. Τότε για κάθε $z \in B_d(y, r)$ ισχύει

$$d(x, z) \leqslant \max\{d(x, y), d(y, z)\} < r$$

και άρα $z \in B_d(x, r)$. Αυτό δείχνει ότι $B_d(y, r) \subseteq B_d(x, r)$. Ο αντίστροφος εγκλεισμός αποδεικνύεται όμοια.

Τέλος για το (δ) υποθέτουμε ότι $r' \leqslant r$ και δείχνουμε ότι $B_d(y, r') \subseteq B_d(x, r)$, ο άλλος εγκλεισμός προκύπτει όμοια από την περίπτωση $r < r'$. Παίρνουμε ένα $z \in B_d(x, r) \cap B_d(y, r')$, τότε

$$d(x, y) \leqslant \max\{d(x, z), d(z, y)\} < \max\{r, r'\} = r.$$

Για κάθε $w \in B_d(y, r')$ έχουμε

$$d(x, w) \leqslant \max\{d(x, y), d(y, w)\} < \max\{r, r'\} = r$$

άρα $w \in B_d(x, r)$. Επομένως έχουμε $B_d(y, r') \subseteq B_d(x, r)$.

Άσκηση 2.7.4. Θεωρούμε το ευθύ άθροισμα $\mathcal{X} = \mathcal{N} \oplus 2^{\mathbb{N}} = (\{0\} \times \mathcal{N}) \cup (\{1\} \times 2^{\mathbb{N}})$. Υπενθυμίζουμε ότι τα $\{0\} \times \mathcal{N}$ και $\{1\} \times 2^{\mathbb{N}}$ είναι κλειστά-ανοικτά υποσύνολα του $\mathcal{X}$ και προφανώς ως υπόχωροι του $\mathcal{X}$ είναι τοπολογικά ισομορφικοί με τους $\mathcal{N}$ και $2^{\mathbb{N}}$ αντίστοιχα.

Ο $\mathcal{X}$ είναι μηδενοδιάστατος επειδή οι $\mathcal{N}$ και $2^{\mathbb{N}}$ είναι μηδενοδιάστατοι (Άσκηση 2.6.18.) Ένα μεμονωμένο σημείο του $\mathcal{X}$ θα ήταν και μεμονωμένο σημείο είτε του $\{0\} \times \mathcal{N}$ είτε του $\{1\} \times 2^{\mathbb{N}}$, κάτι που δεν μπορεί να συμβαίνει γιατί οι $\mathcal{N}$ και $2^{\mathbb{N}}$ είναι τέλειοι.

Ο $\mathcal{X}$ δεν είναι συμπαγής γιατί αλλιώς και ο $\mathcal{N}$ θα ήταν επίσης συμπαγής, το οποίο δεν ισχύει. Επομένως, ο $\mathcal{X}$ δεν είναι τοπολογικά ισομορφικός με τον $2^{\mathbb{N}}$. Επιπλέον, ο $\mathcal{X}$ έχει ένα μη κενό ανοικτό συμπαγές υποσύνολο, συγκεκριμένα το αντίτυπο $\{1\} \times 2^{\mathbb{N}}$ του $2^{\mathbb{N}}$. Επομένως δεν μπορεί να είναι τοπολογικά ισομορφικός με τον $\mathcal{N}$.

Έπειτα παίρνουμε τον $\mathcal{Y} = \{17\} \oplus 2^{\mathbb{N}}$. Ο $\mathcal{Y}$ είναι εύκολα συμπαγής Πολωνικός χώρος αλλά το $(0, 17)$ είναι μεμονωμένο σημείο του $\mathcal{Y}$, άρα ο $\mathcal{Y}$ δεν είναι τέλειος. Ειδικότερα δεν είναι τοπολογικά ισομορφικός με τον τέλειο Πολωνικό χώρο $2^{\mathbb{N}}$. Όπως πιο πάνω, ο $\mathcal{Y}$ είναι μηδενοδιάστατος.

Άσκηση 2.7.5. Θεωρούμε τα δένδρα $S = \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ και $T = \{0,1,2\}^{<\mathbb{N}}$ έτσι που $[S] = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ και $[T] = \{0,1,2\}^{\mathbb{N}}$.

Ορίζουμε μια συνάρτηση $\varphi : \{0,1\}^{<\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ η οποία είναι κατάλληλη και μονότονη (βλ. τον Ορισμό 2.5.9), για την οποία η αντίστοιχη συνάρτηση

$$\varphi^* : [S] \to [T] : \varphi^*(\alpha) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \varphi(\alpha | n)$$

είναι ένα-προς-ένα και επί. Με εφαρμογή της Πρότασης 2.5.10, η φ^* είναι συνεχής. Επιπλέον αφού θα έχουμε δείξει ότι είναι αντιστοιχία και αφού ο χώρος $[S] = \{0,1\}^{\mathbb{N}} = 2^{\mathbb{N}}$ είναι συμπαγής, θα έχουμε ακόμα ότι η αντίστροφη συνάρτηση $(\varphi^*)^{-1}$ είναι συνεχής, δηλαδή η φ^* είναι ένας κατάλληλος τοπολογικός ισομορφισμός.

Η ιδέα για τον ορισμό της φ δίνεται από την κατασκευή στο Θεώρημα 2.7.3. Ας πούμε ότι έχουμε ορίσει το $\varphi(u)$ για κάποιο $u \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$. Θα ορίσουμε το $\varphi(u * (0))$ να είναι το $\varphi(u) * (0)$ και το $\varphi(u * (1))$ ώστε να «περιλαμβάνει» τα $\varphi(u) * (i)$, $i = 1, 2$. Στην πράξη αυτό σημαίνει ότι το $\varphi(u * (1))$ θα παραμείνει $\varphi(u)$ με την «υπόσχεση» στο επόμενο βήμα να γίνει διαχωρισμός: δηλαδή $\varphi(u * (1,0)) = \varphi(u) * (1)$ και $\varphi(u * (1,1)) = \varphi(u) * (2)$.

Πιο συγκεκριμένα, οι τιμές της φ στις ακολουθίες μέχρι μήκους 2 έχουν ως εξής:

$$\begin{aligned} \varphi(\Lambda) &= \Lambda \\ \varphi((0)) &= (0) \quad \text{και} \quad \varphi((1)) = \Lambda \\ \varphi((0,0)) &= (0,0) \quad \text{και} \quad \varphi((0,1)) = (0) \\ \varphi((1,0)) &= (1) \quad \text{και} \quad \varphi((1,1)) = (2). \end{aligned}$$

Αυστηρά το $\varphi(u)$ ορίζεται με επαγωγή στο μήκος $|u|$ του u. Για $|u| \leqslant 1$ το $\varphi(u)$ ορίζεται όπως πιο πάνω: $\varphi(\Lambda) = \Lambda$, $\varphi((0)) = (0)$, $\varphi((1)) = \Lambda$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $k \geqslant 1$ έχουμε ορίσει το $\varphi(u)$ για κάθε u με $|u| \leqslant k$. Παίρνουμε ένα u με $|u| = k$ και ορίζουμε τα $\varphi(u * (0))$, $\varphi(u * (1))$. Η τιμή που θα αποδώσουμε σε αυτά εξαρτάται από το αν έχει δοθεί «υπόσχεση» να γίνει διαχωρισμός προς την κατεύθυνση των 1 και 2. Αυτή σηματοδοτείται από την τιμή $\varphi(u)$ σε σχέση με την τιμή της φ στο αμέσως προηγούμενο βήμα πριν τη u.

Θέτουμε $u^- = (u(0), \dots, u(|u|-2))$, έτσι που $u = u^- * (m)$, όπου $m = u(|u|-1)$. Αν $\varphi(u) \neq \varphi(u^-)$ ορίζουμε

$$\varphi(u*(0)) = \varphi(u)*(0) \quad \text{και} \quad \varphi(u*(1)) = \varphi(u).$$

Αν $\varphi(u) = \varphi(u^-)$ ορίζουμε

$$\varphi(u*(0)) = \varphi(u)*(1) \quad \text{και} \quad \varphi(u*(1)) = \varphi(u)*(2).$$

Αυτό ολοκληρώνει το επαγωγικό βήμα.

Δείχνουμε με κάποια λεπτομέρεια ότι οι συναρτήσεις φ και φ^* ικανοποιούν τις ζητούμενες ιδιότητες. Είναι σαφές ότι η φ είναι μονότονη. Για να δείξουμε ότι είναι και κατάλληλη, θεωρούμε $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$ και $m \in \mathbb{N}$. Θα βρούμε $n > m$, έτσι ώστε το $\varphi(\alpha|n)$ να επεκτείνει γνήσια το $\varphi(\alpha|m)$ (μάλιστα το n είναι ένα από τα $m+1$, $m+2$).

Διακρίνουμε περιπτώσεις. Στην πρώτη περίπτωση θεωρούμε $\varphi(\alpha|m) \neq \varphi(\alpha|(m-1))$. Τότε από τον ορισμό της φ έχουμε ότι $\varphi(\alpha|m*(0)) = \varphi(\alpha|m)*(0)$ που επεκτείνει γνήσια το $\varphi(\alpha|m)$. Συνεπώς, αν $\alpha(m) = 0$, τότε $\alpha|(m+1) = \alpha|m*(0)$ και επομένως μπορούμε να πάρουμε $n = m+1$. Στην υποπερίπτωση $\alpha(m) = 1$ έχουμε πάλι από τον ορισμό της φ,

$$\varphi(\alpha|(m+1)) = \varphi(\alpha|m*(1)) = \varphi(\alpha|m).$$

Αυτό μας τοποθετεί στην περίπτωση $\varphi(u) = \varphi(u^-)$ του ορισμού της φ, όπου $u = \alpha|(m+1)$. Επομένως

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha|(m+2)) &= \varphi(\alpha|(m+1)*(\alpha(m+1))) \\ &= \varphi(\alpha|(m+1))*(\alpha(m+1)+1) \\ &= \varphi(\alpha|m)*(\alpha(m+1)+1).\end{aligned}$$

Ειδικότερα το $\varphi(\alpha|(m+2))$ επεκτείνει γνήσια το $\varphi(\alpha|m)$, οπότε παίρνουμε $n = m+2$.

Στη δεύτερη περίπτωση έχουμε $\varphi(\alpha|m) = \varphi(\alpha|(m-1))$. Τότε είναι πάλι σαφές από τον ορισμό της φ ότι το $\varphi(\alpha*(m+1)) = \varphi(\alpha|m*(\alpha(m)))$ είναι ίσο με $\varphi(\alpha|m)*(\alpha(m)+1)$, το οποίο επεκτείνει γνήσια το $\varphi(\alpha|m)$.

Έχουμε αποδείξει λοιπόν ότι η φ είναι κατάλληλη. Για να δείξουμε ότι η φ^* είναι επί, παίρνουμε ένα $\beta \in \{0,1,2\}^{\mathbb{N}}$. Ισχυριζόμαστε ότι υπάρχει ακολουθία $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ στο $\{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ με $u_0 \subsetneq u_1 \subsetneq \cdots \subsetneq u_m \subsetneq \dots$ με $\varphi(u_m) = \beta|m$ για κάθε m. Τότε $|u_m| \geqslant m$ για κάθε m και επομένως η ένωση $\bigcup_m u_m$ είναι ίση με ένα $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$, το οποίο ικανοποιεί $\varphi^*(\alpha) = \beta$.

Η κατασκευή της προηγούμενης $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ γίνεται με αναδρομή στο $m \in \mathbb{N}$. Χρειάζεται να ικανοποιείται και μια επιπλέον ιδιότητα *ελάχιστου μήκους*, την οποία εξηγούμε πιο κάτω. Για $m = 0$ έχουμε $\beta|m = \Lambda$, επομένως παίρνουμε $u_0 = \Lambda$. Για $m = 1$ παίρνουμε $u_1 = (0)$ αν $\beta(0) = (0)$, $u_1 = (1,0)$ αν $\beta(0) = 1$, και $u_2 = (1,1)$ αν $\beta(2) = 2$. Παρατηρούμε ότι σε κάθε περίπτωση ισχύει $\varphi(u_1) = (\beta(0)) = \beta|1$. Επιπλέον, το u_1 είναι κάθε φορά η ακολουθία ελάχιστου μήκους για την οποία ισχύει $\varphi(u_1) = \beta|1$.

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $m \geqslant 1$ έχουν οριστεί $u_0 \subsetneq u_1 \subsetneq \cdots \subsetneq u_m$ με $\varphi(u_i) = \beta|i$ για κάθε $i \leqslant m$, και επιπλέον για κάθε πεπερασμένη ακολουθία $v \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ με $u_{i-1} \sqsubseteq v$ και $\varphi(v) = \beta|i$ ισχύει $|v| \geqslant |u_i|$ για κάθε $1 \leqslant i \leqslant m$. (Παρατηρούμε ότι ένα τέτοιο v θα επεκτείνει γνήσια την u_{i-1} γιατί $\varphi(v) = \beta|i \neq \beta|(i-1) = \varphi(u_{i-1})$, και ειδικότερα $v \neq u_{i-1}$.) Θα ορίσουμε το u_{m+1}, έτσι ώστε $u_m \subsetneq u_{m+1}$, $\varphi(u_{m+1}) = \beta|(m+1)$ και για κάθε $v \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ με $u_m \sqsubseteq v$ και $\varphi(v) = \beta|(m+1)$ ισχύει $|v| \geqslant |u|$.

Αρχικά ισχυριζόμαστε ότι $\varphi(u_m) \neq \varphi(u_m^-)$. Σε διαφορετική περίπτωση θα είχαμε $\varphi(u_m^-) = \varphi(u_m) = \beta|m$. Εφόσον $u_{m-1} \subsetneq u_m$, ισχύει $u_{m-1} \sqsubseteq u_m^-$, άρα η $v = u_m^-$ είναι μια πεπερασμένη ακολουθία που επεκτείνει την u_{m-1}, ικανοποιεί $\varphi(v) = \beta|m$ και έχει μήκος μικρότερο της u_m, που έρχεται σε αντίθεση με την Επαγωγική Υπόθεση. Άρα $\varphi(u_m) \neq \varphi(u_m^-)$.

Για την κατασκευή του u_{m+1} διακρίνουμε περιπτώσεις. Αρχικά θεωρούμε ότι $\beta(m) = 0$. Τότε παίρνουμε $u_{m+1} = u_m * (0)$, αφού $\varphi(u_m) \neq \varphi(u_m^-)$ έχουμε $\varphi(u_{m+1}) = \varphi(u_m)*(0) = \beta|m*(\beta(m)) = \beta|(m+1)$. Προφανώς το u_{m+1} επεκτείνει γνήσια το u_m. Αν έχουμε $u_m \sqsubseteq v$ και $\varphi(v) = \beta|(m+1) \neq \varphi(u_m)$, τότε $u_m \subsetneq v$, άρα $|v| \geqslant |u_m| + 1 = |u_{m+1}|$.

Έπειτα θεωρούμε ότι $\beta(m) = 1$, τότε παίρνουμε $u_{m+1} = u_m * (1, 0)$, που προφανώς επεκτείνει γνήσια το u_m. Εφόσον $\varphi(u_m) \neq \varphi(u_m^-)$, έχουμε $\varphi(u_m * (1)) = \varphi(u_m)$ και άρα στον υπολογισμό του $\varphi(u_n * (1, 0))$ οδηγούμαστε στην 2η περίπτωση του ορισμού της φ για $u = u_m * (1)$:

$$\begin{aligned}\varphi(u_n * (1,0)) &= \varphi(u_m * (1) * (0)) = \varphi(u_m * (1)) * (1) \\ &= \varphi(u_m) * (1) = \beta|m * (\beta(m)) = \beta|(m+1).\end{aligned}$$

Αν το $v \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ επεκτείνει το u_m και ικανοποιεί $\varphi(v) = \beta|(m+1) = \varphi(u_m) * (1)$, τότε $v \neq u_m$. Επειδή $\varphi(u_m) \neq \varphi(u_m^-)$, η $\varphi(u_m * (j))$ για $j = 0, 1$ θα είναι είτε $\beta|m * (0) \neq \beta|(m+1)$ (αν $j = 0$) είτε $\beta|m \neq \beta|(m+1)$ (αν $j = 1$). Επομένως, η v διαφέρει από τα $u_m * (0)$ και $u_m * (1)$, συνεπώς τα επεκτείνει γνήσια. Ειδικότερα $|v| \geqslant |u_m| + 2 = |u_{m+1}|$.

Η τελευταία περίπτωση $\beta(m) = 1$ αντιμετωπίζεται όμοια παίρνοντας $u_{m+1} = u_m * (1, 1)$. Αυτό ολοκληρώνει το Επαγωγικό Βήμα, και άρα έχουμε αποδείξει ότι η φ^* είναι επιμορφισμός.

Τέλος δείχνουμε ότι η φ^* είναι μονομορφισμός. Θεωρούμε $\alpha_1, \alpha_2 \in 2^{\mathbb{N}}$ με $\alpha_1 \neq \alpha_2$ και παίρνουμε m τον ελάχιστο φυσικό με $\alpha_1(m) \neq \alpha_2(m)$.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\alpha_1(m) = 0$ και $\alpha_2(m) = 1$. Θέτουμε $u_0 = \alpha_1|m = \alpha_2|m$. Θα βρούμε u_1, u_2 με $u_0 * (0) \sqsubseteq u_1 \sqsubseteq \alpha_1$, $u_0 * (1) \sqsubseteq u_2 \sqsubseteq \alpha_2$ και οι $\varphi(u_1)$, $\varphi(u_2)$ είναι ασύμβατες.

Αν $u_0 = \Lambda$, τότε παίρνουμε $u_1 = (0) \sqsubseteq \alpha_1$ και $u_2 = (1, \alpha_2(1)) \sqsubseteq \alpha_2$, έτσι που $\varphi(u_1) = (0)$ και $\varphi(u_2) = (1)$ ή (2) ανάλογα με την τιμή του $\alpha_2(1)$.

Στη συνέχεια θεωρούμε ότι $u_0 \neq \Lambda$. Αν $\varphi(u_0) \neq \varphi(u_0^-)$, τότε παίρνουμε $u_1 = u_0 * (0) = \alpha_1|(m+1)$ και $u_2 = u_0 * (1, \alpha_2(m+1)) = \alpha_2|(m+2)$. Τότε $\varphi(u_1) = \varphi(u_0) * (0)$ και $\varphi(u_0 * (1)) = \varphi(u_0)$, άρα

$$\varphi(u_2) = \varphi(u_0*(1, \alpha_2(m+1))) = \varphi(u_0*(1))*(\alpha_2(m+1)+1) = \varphi(u_0)*(\alpha_2(m+1)+1).$$

Οπότε οι $\varphi(u_1)$, $\varphi(u_2)$ είναι ασύμβατες.

Τέλος αν $\varphi(u_0) = \varphi(u_0^-)$ παίρνουμε $u_1 = u_0 * (0) = \alpha_1|(m+1)$ και $u_1 = u_0 * (1) = \alpha_2|(m+1)$. Τότε $\varphi(u_1) = \varphi(u_0) * (1)$ και $\varphi(u_2) = \varphi(u_0) * (2)$. Βλέπουμε λοιπόν πάλι ότι οι $\varphi(u_1)$, $\varphi(u_2)$ είναι ασύμβατες. Έχουμε δείξει επομένως ότι η φ^* είναι μονομορφισμός.

Κεφάλαιο 3

Άσκηση 3.2.11. Αν έχουμε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και $P \in \Gamma|(\mathcal{X} \times \mathbb{N})$, τότε $P = \{(x_0, n_0)\}$ για κάποια $x_0 \in \mathcal{X}$ και $n_0 \in \mathbb{N}$. Επομένως έχουμε $\exists^{\mathbb{N}} P = \{x_0\} \in \Gamma|\mathcal{X}$ και η Γ είναι κλειστή ως προς $\exists^{\mathbb{N}}$.

Από την άλλη είναι σαφές ότι η κλάση Γ δεν είναι κλειστή ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$, γιατί η άπειρη ένωση μονοσυνόλων προφανώς μπορεί να περιέχει τουλάχιστον δύο στοιχεία.

Άσκηση 3.2.12. Αν έχουμε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία υποσυνόλων του $\mathcal{X}$ που ανήκουν στη Γ, τότε το P_0 και συνεπώς η ένωση $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n$ περιέχουν τουλάχιστον δύο στοιχεία. Δηλαδή $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n \in \Gamma|\mathcal{X}$ και η Γ είναι κλειστή ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$.

Στη συνέχεια παίρνουμε $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ και $P = \{\sqrt{2}\} \times \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{N}$. Τότε το P έχει τουλάχιστον δύο στοιχεία και συνεπώς $P \in \Gamma|(\mathbb{R} \times \mathbb{N})$. Από την άλλη

$$x \in \exists^{\mathbb{N}} P \iff x = \sqrt{2}.$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι το $\exists^{\mathbb{N}} P$ αποτελείται από ακριβώς ένα στοιχείο και επομένως δεν ανήκει στην $\Gamma|\mathbb{R}$. Άρα η Γ δεν είναι κλειστή ως προς $\exists^{\mathbb{N}}$.

Άσκηση 3.2.13. Θεωρούμε τα σύνολα $A_n \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ και $B_m \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$, $n, m \in \mathbb{N}$ με

$$\begin{aligned}(x, \alpha) \in A_n &\iff x = f_n(\alpha) \\ (x, \alpha) \in B_m &\iff g_m(x, \alpha) = 0.\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι το A_n είναι το γράφημα της f_n και το B_m είναι το σύνολο $g_m^{-1}[\{0\}]$. Άρα τα A_n και B_m είναι κλειστά σύνολα. Επιπλέον για κάθε $x \in \mathcal{X}$ και $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\forall m \ (x = f_n(\alpha) \ \vee \ g_m(x, \alpha) = 0) &\iff \forall m \ ((x, \alpha) \in A_n \ \vee \ (x, \alpha) \in B_m) \\ &\iff \forall m \ (x, \alpha) \in A_n \cup B_m.\end{aligned}$$

Επομένως ορίζουμε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το σύνολο

$$C_n = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} (A_n \cup B_m)$$

έτσι που

$$\forall m \ (x = f_n(\alpha) \ \vee \ g_m(x, \alpha) = 0) \iff (x, \alpha) \in C_n.$$

Προφανώς, τα σύνολα C_n είναι κλειστά. Έπειτα θεωρούμε τη συνάρτηση της προβολής $\mathsf{pr} : \mathcal{X} \times \mathcal{N} \to \mathcal{X} : \mathsf{pr}(x, \alpha) = x$ και έχουμε

$$\exists \alpha \ (x, \alpha) \in C_n \iff x \in \mathsf{pr}[C_n].$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}x \in P &\iff \forall n \ \exists \alpha \ \forall m \ (x = f_n(\alpha) \ \vee \ g_m(x, \alpha) = 0) \\ &\iff \forall n \ \exists \alpha \ (x, \alpha) \in C_n \\ &\iff \forall n \ x \in \mathsf{pr}[C_n] \\ &\iff x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \ \mathsf{pr}[C_n].\end{aligned}$$

Με άλλα λόγια,

$$P = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \ \mathsf{pr}[C_n]$$

δηλαδή το P είναι αριθμήσιμη τομή συνόλων που είναι προβολές κλειστών συνόλων.

Άσκηση 3.2.14. Για κάθε $x \in \mathcal{X}$ έχουμε

$$\begin{aligned}x \in A_u &\iff \forall n \ \exists w \ (|w| \geqslant n \ \& \ w \in T(x)) \\ &\iff \forall n \ \exists w \ (|w| \geqslant n \ \& \ (x, w) \in T).\end{aligned}$$

Επειδή το σύνολο $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ είναι αριθμήσιμο, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το «$\exists w$» παραπέμπει στον τελεστή $\exists^{\mathbb{N}}$. Για την ακρίβεια θεωρούμε τη φυσική απαρίθμηση $(\mathsf{u}_s)_{s\in\mathbb{N}}$ του $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. Τότε σύμφωνα με τα πιο πάνω έχουμε

$$x \in A_u \iff \forall n \ \exists s \ (|\mathsf{u}_s| \geqslant n \ \& \ (x, \mathsf{u}_s) \in T).$$

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις $f = ((x,n,s) \mapsto |\mathrm{u}_s| - n)$ και $g = ((x,n,s) \mapsto (x, \mathrm{u}_s))$ είναι συνεχείς. Επομένως, το σύνολο

$$C = \{(x,n,s) \in \mathcal{X} \times \mathbb{N}^2 \mid |\mathrm{u}_s| > n\} = \{(x,n,s) \in \mathcal{X} \times \mathbb{N}^2 \mid f(x,n,s) \geqslant 0\}$$

είναι κλειστό.

Όμοια το σύνολο

$$L = \{(x,n,s) \in \mathcal{X} \times \mathbb{N}^2 \mid g(x,n,s) \in T\}$$

είναι κλειστό.

Συμβολίζουμε με Γ την κλάση των κλειστών συνόλων, η οποία είναι κλειστή ως προς &. Εκτιμούμε την πολυπλοκότητα του A_u διαγραμματικά με βάση τα προηγούμενα,

$$x \in A_u \iff \underbrace{\forall n\ \underbrace{\exists s\ \underbrace{(\underbrace{|\mathrm{u}_s| \geqslant n}_{\text{κλειστό} = \Gamma}\ \&\ \underbrace{(x, \mathrm{u}_s) \in T}_{\text{κλειστό} = \Gamma})}_{\Gamma}}_{\exists^{\mathbb{N}}\Gamma}}_{\forall^{\mathbb{N}}\exists^{\mathbb{N}}\Gamma}.$$

Άρα το A_u ανήκει στην $\forall^{\mathbb{N}}\exists^{\mathbb{N}}\Gamma$.

Άσκηση 3.2.15. Θεωρούμε τη φυσική απαρίθμηση $(\mathrm{u}_s)_{s \in \mathbb{N}}$ του $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned}
(x,u) \in T &\iff \forall v \in J\ \forall n \in I \text{ με } n \leqslant |u|\ (x \notin V_n\ \&\ v \nsubseteq u) \\
&\iff \forall v\ \forall n \leqslant |u|\ (v \notin J\ \vee\ n \notin I\ \vee\ (x \notin V_n\ \&\ v \nsubseteq u)) \\
&\iff \forall s\ \forall n \leqslant f(n)\ (\mathrm{u}_s \notin J\ \vee\ (x \notin V_n\ \&\ \mathrm{u}_s \nsubseteq u))
\end{aligned}$$

όπου $f : \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \to \mathbb{N} : f(u) = |u|$. Αφού οι χώροι $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ και $\mathbb{N}$ είναι διακριτή η f είναι συνεχής.

Συμβολίζουμε με Γ_0 και Γ_1 τις κλάσεις των κλειστών και F_σ συνόλων αντίστοιχα. Αφού η αντίστροφη εικόνα κλειστού συνόλου μέσω συνεχούς συνάρτησης είναι κλειστό σύνολο, έχουμε ότι η Γ_0 είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση. Με χρήση της Παρατήρησης 3.1.6 υπολογίζουμε διαγραμματικά

$$(x,u) \in T \iff \underbrace{\forall s\ \underbrace{\forall n \leqslant f(u)\ \underbrace{(\mathrm{u}_s \notin J\ \vee\ (x \notin V_n\ \&\ \mathrm{u}_s \nsubseteq u))}_{\Gamma_0}}_{\forall^{\leqslant}\Gamma_0 \subseteq \Gamma_0}}_{\forall^{\mathbb{N}}\Gamma_0 \subseteq \Gamma_0}.$$

Άρα το T ανήκει στην κλάση Γ_0, δηλαδή είναι κλειστό. Για τα σύνολα $P_{u,w}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
x \in P_{u,w} &\iff u \in f(x)\ \&\ w \notin f(x) \\
&\iff \underbrace{\underbrace{(x,u) \in T}_{\text{κλειστό} = \Gamma_0 \subseteq \Gamma_1}\ \&\ \underbrace{(x,w) \notin T}_{\text{ανοικτό } \subseteq F_\sigma = \Gamma_1}}_{\Gamma_1},
\end{aligned}$$

όπου πιο πάνω χρησιμοποιήσαμε ότι η τομή δύο F_σ συνόλων είναι F_σ σύνολο.

Τέλος, θεωρούμε ότι τα V_n είναι κλειστά-ανοικτά και δείχνουμε ότι κάθε $P_{u,w}$ είναι ανοικτό σύνολο. Από τον πιο πάνω υπολογισμό αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ το σύνολο

$$G_u = \{x \in \mathcal{X} \mid (x,u) \in T\}$$

είναι ανοικτό.

Ο ποσοδείκτης $\forall v \in J$ στον ορισμό του T είναι προβληματικός όσον αφορά το να δείξουμε πως το G_u είναι ανοικτό σύνολο. Από την άλλη όμως, παρατηρούμε ότι οι μεταβλητές x και v εμπλέκονται σε διαφορετικά σημεία της σύζευξης στον ορισμό του T. Από αυτό προκύπτει ότι

$$(x,u) \in T \iff \forall v \in J\ v \not\sqsubseteq u \quad \& \quad \forall n \in I \text{ με } n \leqslant |u|\ x \notin V_n.$$

Άρα για σταθερό $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ είτε η συνθήκη «$\forall v \in J\ v \not\sqsubseteq u$» δεν ικανοποιείται και άρα $G_u = \emptyset$ που είναι ανοικτό σύνολο, είτε η προηγούμενη συνθήκη ικανοποιείται όποτε

$$\begin{aligned} x \in G_u &\iff \forall n \in I \text{ με } n \leqslant |u|\ x \notin V_n \\ &\iff \forall n \leqslant f(n)\ (n \notin I\ \vee\ x \in \mathcal{X} \setminus V_n). \end{aligned}$$

Αφού το $\mathcal{X} \setminus V_n$ είναι ανοικτό σύνολο, προκύπτει από την τελευταία ισοδυναμία ότι το G_u είναι ανοικτό.

Άσκηση 3.3.11. Η ισότητα $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n = \mathrm{c}\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_n$ είναι σαφής από τον ορισμό $\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_n = \mathrm{c}\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ και την ισότητα $\mathrm{c}_\mathcal{X}(\mathrm{c}_\mathcal{X}P) = P$.

Έπειτα δείχνουμε τη συμπερίληψη $\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_{n+1} \subseteq \bigwedge_\mathbb{N} \utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$. Θεωρούμε $P \in \utilde{\mathbf{\Pi}}^0_{n+1}(\mathcal{X})$, τότε $\mathrm{c}_\mathcal{X}P \in \utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+1}$ και επομένως υπάρχει ακολουθία $(Q_i)_{i\in\mathbb{N}}$ από $\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_n$ υποσύνολα του $\mathcal{X}$ με $\mathrm{c}_\mathcal{X}P = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} Q_i$. Τότε $P = \mathrm{c}_\mathcal{X}\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} Q_i\right) = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{c}_\mathcal{X}Q_i$. Είναι σαφές ότι $\mathrm{c}_\mathcal{X}Q_i \in \utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n(\mathcal{X})$ και άρα $P \in \bigwedge_\mathbb{N} \utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$.

Αντίστροφα για να δείξουμε ότι $\bigwedge_\mathbb{N} \utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n \subseteq \utilde{\mathbf{\Pi}}^0_{n+1}$ παίρνουμε $P = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} Q_i$ όπου $Q_i \in \utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n(\mathcal{X})$ για κάθε i. Τότε έχουμε $\mathrm{c}_\mathcal{X}P = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{c}_\mathcal{X}Q_i \in \bigvee_\mathbb{N} \utilde{\mathbf{\Pi}}^0_n(\mathcal{X}) = \utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+1}(\mathcal{X})$. Άρα $P = \mathrm{c}_\mathcal{X}(\mathrm{c}_\mathcal{X}P) \in \utilde{\mathbf{\Pi}}^0_{n+1}(\mathcal{X})$.

Άσκηση 3.3.12. Αφού $\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_k \subseteq \utilde{\mathbf{\Pi}}^0_{k+1}$ για κάθε $k \geqslant 1$ (Πρόταση 3.3.3), έχουμε $\bigcup_{k\leqslant n} \utilde{\mathbf{\Pi}}^0_k = \utilde{\mathbf{\Pi}}^0_n$ για κάθε $n \geqslant 1$. Άρα $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+1} = \bigvee_\mathbb{N} \utilde{\mathbf{\Pi}}^0_n = \bigvee_\mathbb{N} \left(\bigcup_{k\leqslant n} \utilde{\mathbf{\Pi}}^0_k\right)$.

Άσκηση 3.3.13. Αν $P = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} Q_i$ όπου $Q_i \in \utilde{\mathbf{\Pi}}^0_n(\mathcal{X})$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$, θέτουμε $P_i = \bigcup_{k\leqslant i} Q_i$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Τότε $P_i \subseteq P_{i+1}$ και αφού η κλάση $\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_n$ είναι κλειστή ως προς πεπερασμένες ενώσεις (Θεώρημα 3.3.8), έχουμε ότι κάθε P_i ανήκει στην κλάση $\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_n$. Τέλος είναι σαφές ότι $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} P_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} Q_i = P$.

Άσκηση 3.3.14. Όπως έχουμε δει στη λύση της Άσκησης 3.2.14, ισχύει

$$x \in A_u \iff \forall n\ \exists w\ (|w| \geqslant n\ \&\ (x,w) \in T).$$

Η σχέση μέσα στις παρενθέσεις ορίζει ένα $\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_1$ σύνολο, συνεπώς το A_u ανήκει στην κλάση

$$\forall^\mathbb{N}\exists^{\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_1 \subseteq \forall^\mathbb{N}\exists^{\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_2 = \forall^\mathbb{N}\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_2 = \utilde{\mathbf{\Pi}}^0_3,$$

όπου πιο πάνω χρησιμοποιήσαμε την κλειστότητα της κλάσης $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_2$ ως προς $\exists^{\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$.

Άσκηση 3.3.15. Έχουμε ότι ένα δένδρο $T \in \mathrm{Tr}$ είναι πεπερασμένης διακλάδωσης αν και μόνο αν

$$\begin{aligned} &\forall u \in T\ \exists n_0,\ldots,n_{k-1}\ \forall v \in T\ [(u \sqsubseteq v\ \&\ |v| = |u|+1) \longleftrightarrow \exists i < k\ v = u * (n_i)\ ] \\ \iff &\forall u\ \exists n_0,\ldots,n_{k-1}\ \forall v\ [\ u \notin T\ \vee\ v \notin T \\ &\qquad\qquad \vee\ (u \sqsubseteq v\ \&\ |v| = |u|+1) \longleftrightarrow \exists i < k\ v = u * (n_i)\ ] \\ \iff &\forall u\ \exists w\ \forall v\ [\ u \notin T\ \vee\ v \notin T \\ &\qquad\qquad \vee\ (u \sqsubseteq v\ \&\ |v| = |u|+1) \longleftrightarrow \exists i < |w|\ v = u * (w(i))\ ]. \end{aligned}$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η σχέση μέσα στις αγκύλες ορίζει ένα κλειστό σύνολο. Συνεπώς, το σύνολο όλων των δένδρων πεπερασμένης διακλάδωσης ανήκει στην κλάση

$$\forall^{\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}\exists^{\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}\forall^{\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_1 = \forall^{\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}\exists^{\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_1 \subseteq \forall^{\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}\exists^{\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_2 = \forall^{\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_2 \subseteq \forall^{\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_3 = \utilde{\mathbf{\Pi}}^0_3.$$

Έτσι έχουμε το ζητούμενο.

Άσκηση 3.3.16. Η βασική παρατήρηση είναι ότι

$$\begin{aligned} y = f'(x) &\iff \forall r > 0\ \exists s > 0\ \forall t \in (-s,s) \setminus \{0\} \quad \big(t^{-1} \cdot (f(x+t) - f(x)) < r\big) \\ &\iff \forall n\ \exists m\ \forall q \in \mathbb{Q}\ (0 < |q| < 2^{-m} \ \longrightarrow\ q^{-1} \cdot (f(x+q) - f(x)) \leqslant 2^{-n}) \\ &\iff \forall n\ \exists m\ \forall q \in \mathbb{Q}\ (|q| \geqslant 2^{-m}\ \vee\ q = 0\ \vee\ q^{-1} \cdot (f(x+q) - f(x)) \leqslant 2^{-n}) \end{aligned}$$

όπου στη δεύτερη ισοδυναμία χρησιμοποιούμε τη συνέχεια της f. Είναι σαφές ότι η συνθήκη της τελευταίας ισοδυναμίας ορίζει ένα $\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_3$ υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.

Για το δεύτερο ζητούμενο παρατηρούμε ότι το όριο $\lim_{t\to 0} g(t)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ (όπου g συνεχής συνάρτηση) αν και μόνο αν για κάθε δύο ακολουθίες $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μη μηδενικών ρητών αριθμών που συγκλίνουν στο 0 έχουμε $\lim_{n\to\infty} |g(p_n) - g(q_n)| = 0$. Η τελευταία συνθήκη μπορεί να αναδιατυπωθεί χωρίς την επίκληση ακολουθιών έτσι που

$$\begin{aligned} &\text{υπάρχει η παράγωγος της } f \text{ στο } x \\ \iff &\text{υπάρχει το όριο } \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \text{ στο } \mathbb{R} \\ \iff &\forall n\ \exists m\ \forall p,q \in \mathbb{Q}\ \big(\ 0 < |p|, |q| < 2^{-m} \\ &\qquad \longrightarrow\ \big|p^{-1} \cdot (f(x+p) - f(x)) - q^{-1} \cdot (f(x+q) - f(x))\big| \leqslant 2^{-n}\ \big) \\ \iff &\forall n\ \exists m\ \forall p,q \in \mathbb{Q}\ \big(\ p = 0\ \vee\ q = 0\ \vee\ |p| \geqslant 2^{-m}\ \vee\ |q| \geqslant 2^{-m} \\ &\qquad \vee\ \big|p^{-1} \cdot (f(x+p) - f(x)) - q^{-1} \cdot (f(x+q) - f(x))\big| \leqslant 2^{-n}\ \big). \end{aligned}$$

Η συνθήκη της τελευταίας ισοδυναμίας ορίζει ένα $\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_3$ υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Άσκηση 3.3.17. Για κάθε $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ σύνολο $Q \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ έχουμε

$$\begin{aligned} x \in \exists^{\mathbb{N}} Q &\iff \exists i\ (x,i) \in Q \\ &\iff \exists i\ x \in Q_i \end{aligned}$$

όπου $Q_i = \{x \in \mathcal{X} \mid (x,i) \in Q\} \in \utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n|\mathcal{X}$ από την Παρατήρηση 3.3.5. Άρα $P = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} Q_i \in \utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n|\mathcal{X}$ από την κλειστότητα της $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$.

Άσκηση 3.3.18. Θεωρούμε $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ που ανήκει στην κλάση $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ και για κάθε $i \in \mathbb{N}$ ορίζουμε τα σύνολα $P_i, Q_i, R_i \subseteq \mathcal{X}$ με

$$\begin{aligned} P_i &= \{x \in \mathcal{X} \mid (x,i) \in P\} \\ Q_i &= \textstyle\bigcup_{j\leqslant i} P_j \\ R_i &= \textstyle\bigcap_{j\leqslant i} P_j. \end{aligned}$$

Από την Παρατήρηση 3.3.5 κάθε P_i ανήκει στη $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$. Από την κλειστότητα της κλάσης $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ ως προς πεπερασμένη ένωση και πεπερασμένη τομή έχουμε ότι τα σύνολα Q_i, R_i ανήκουν επίσης στη $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$. Από το Λήμμα 3.3.6 τα σύνολα $Q, R \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ με

$$(x,i) \in Q \iff x \in Q_i \quad \text{και} \quad (x,i) \in R \iff x \in R_i$$

ανήκουν στην κλάση $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$. Επιπλέον

$$\begin{aligned}(x,i)\in\exists^{\leqslant}P &\iff \exists j\leqslant i\ (x,j)\in P\\ &\iff \exists j\leqslant i\ x\in P_j\\ &\iff x\in Q_i\\ &\iff (x,i)\in Q.\end{aligned}$$

Άρα $\exists^{\leqslant}P=Q\in\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n|(\mathcal{X}\times\mathbb{N})$ και όμοια $\forall^{\leqslant}P=R\in\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n|(\mathcal{X}\times\mathbb{N})$.

Άσκηση 3.3.19. Για κάθε $y\in[0,1]$ ορίζουμε το σύνολο

$$V_y=\begin{cases}\mathcal{X}, & \text{αν } y\leqslant 2^{-1},\\ \varnothing, & \text{αλλιώς.}\end{cases}$$

Είναι σαφές ότι κάθε V_y είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathcal{X}$. Από την άλλη αν πάρουμε το σύνολο

$$(x,y)\in V \iff x\in V_y$$

τότε

$$V=\mathcal{X}\times[0,2^{-1}]$$

που δεν είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathcal{X}\times[0,1]$.

Άσκηση 3.3.20. Για κάθε $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}\in\mathcal{X}=\prod_{i\in\mathbb{N}}\mathcal{X}_i$,

$$\begin{aligned}(x_i)_{i\in\mathbb{N}}\in\textstyle\prod_{i\in\mathbb{N}}A_i &\iff \forall i\ x_i\in A_i\\ &\iff \forall i\ \mathsf{pr}_i((x_k)_{k\in\mathbb{N}})\in A_i,\end{aligned}$$

όπου $\mathsf{pr}_i:\mathcal{X}\to\mathcal{X}_i$ είναι η συνάρτηση της προβολής στην i-συντεταγμένη. Αφού κάθε A_i είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ σύνολο, προκύπτει από την τελευταία ισοδυναμία ότι το σύνολο $\prod_{i\in\mathbb{N}}A_i$ ανήκει στην κλάση $\forall^{\mathbb{N}}\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n=\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_{n+1}$.

Από την άλλη, αν κάθε A_i είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$ σύνολο, τότε από την τελευταία ισοδυναμία το $\prod_{i\in\mathbb{N}}A_i$ ανήκει στην κλάση $\forall^{\mathbb{N}}\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n=\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$.

Για την περίπτωση του πεπερασμένου γινομένου έχουμε όπως πριν:

$$(x_0,\dots,x_m)\in A_0\times\cdots\times A_m \iff \forall i\leqslant m\ \mathsf{pr}_i(x_0,\dots,x_m)\in A_i.$$

Οπότε αν κάθε A_i είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ σύνολο, το πεπερασμένο γινόμενο $A_0\times\cdots\times A_m$ είναι επίσης $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ λόγω της κλειστότητας της $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ ως προς τον φραγμένο καθολικό ποσοδείκτη. Εδώ κάνουμε χρήση της Παρατήρησης 3.1.6 με $f(x_0,\dots,x_m)=m$ (σταθερή συνάρτηση). Όμοια αν κάθε A_i είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$ σύνολο, τότε το $A_0\times\cdots\times A_m$ είναι επίσης $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$.

Άσκηση 3.3.21. Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή στο $n\geqslant 1$ ταυτόχρονα για τις κλάσεις $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ και $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$. Για $n=1$ ο ισχυρισμός είναι γνωστός: τα ανοικτά υποσύνολα του G είναι ακριβώς τα $G\cap U$, όπου το U είναι ανοικτό στον $\mathcal{X}$ και τα κλειστά υποσύνολα του G είναι ακριβώς τα $G\cap F$ όπου το F είναι κλειστό στον $\mathcal{X}$.

Υποθέτουμε ότι ο ισχυρισμός ισχύει για κάποιο $n\geqslant 1$ και δείχνουμε το ίδιο για το $n+1$. Παίρνουμε ένα $A\subseteq G$. Αν το $A\in\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+1}(G)$, τότε υπάρχει ακολουθία συνόλων $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ με $A_i\in\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n(G)$ για κάθε $i\in\mathbb{N}$ και $A=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}A_i$. Από την Επαγωγική Υπόθεση για την $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$, κάθε A_i είναι της μορφής $G\cap B_i$ όπου $B_i\in\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n(\mathcal{X})$. Επομένως

$$A=\textstyle\bigcup_i A_i=\bigcup_i(G\cap B_i)=G\cap(\bigcup_i B_i)=G\cap B$$

όπου $B=\bigcup_i B_i\in\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+1}(\mathcal{X})$.

Αντίστροφα, αν $A = G \cap B$ όπου $B \in \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+1}(\mathcal{X})$ επιλέγουμε μια ακολουθία συνόλων $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ με $B_i \in \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n(\mathcal{X})$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$ και $B = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$. Από την Επαγωγική Υπόθεση για την $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$ έχουμε $G \cap B_i \in \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n(G)$ για κάθε i. Όπως πιο πάνω, έχουμε $A = G \cap B = \bigcup_i (G \cap B_i) \in \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+1}(G)$.

Η απόδειξη για την $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_{n+1}$ παίρνοντας τα συμπληρώματα, για την ακρίβεια ισχύει $A = G \cap B$ αν και μόνο αν $G \setminus A = G \cap (\mathcal{X} \setminus B)$ για κάθε $A \subseteq G$ και $A \subseteq \mathcal{X}$.

Τέλος ο ισχυρισμός για την $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^0_n$ έχει ως εξής:

$$A \in \underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^0_n(G) \iff \exists B \in \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n(\mathcal{X})\ \exists C \in \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n(\mathcal{X})\ A = G \cap B = G \cap C.$$

Δεν μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα B, C είναι συμπληρωματικά στον $\mathcal{X}$ ώστε να συμπεράνουμε ότι το $A \in \underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^0_n(G)$ είναι η τομή του G με ένα $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^0_n$ υποσύνολο του $\mathcal{X}$.

Άσκηση 3.4.10. Θεωρούμε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$. Όπως έχουμε αναφέρει, η απόδειξη γίνεται με επαγωγή στο $n \geqslant 1$ και η περίπτωση $n = 1$ είναι το Λήμμα 3.4.3.

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \geqslant 1$ ισχύει $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n(\mathcal{X}) \subseteq \underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^1_1(\mathcal{X})$, ισοδύναμα $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n(\mathcal{X}) \subseteq \underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^1_1(\mathcal{X})$. Παίρνουμε $P \in \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+1}(\mathcal{X})$ και θεωρούμε μια ακολουθία $(P_i)_{i\in\mathbb{N}}$ από $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$ υποσύνολα του $\mathcal{X}$ με $P = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} P_i$. Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι $P_i \in \underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^1_1(\mathcal{X})$, δηλαδή $P_i \in \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_1(\mathcal{X})$ και $P_i \in \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_1(\mathcal{X})$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Αφού οι κλάσεις $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_1$ και $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_1$ είναι κλειστές ως προς τον τελεστή της αριθμήσιμης ένωσης $\bigvee_{\mathbb{N}}$ (Θεώρημα 3.4.6), έχουμε ότι το P είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_1$ και $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_1$ υποσύνολο του $\mathcal{X}$. Επομένως $P \in \underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^1_1(\mathcal{X})$.

Άσκηση 3.4.11. Από το Πόρισμα 3.4.8 το δοσμένο $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ σύνολο είναι συνεχής εικόνα $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_{n-1}$ συνόλου. Εφόσον η σύνθεση συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση, προκύπτει ότι η συνεχής εικόνα του δοσμένου $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ συνόλου είναι συνεχής εικόνα $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_{n-1}$ συνόλου, και πάλι από το Πόρισμα 3.4.8 είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ σύνολο.

Άσκηση 3.4.12. Οι ισοδυναμίες μεταξύ των τελεστών κλειστότητας προκύπτουν άμεσα από το Λήμμα 3.4.5, το Πόρισμα 3.2.9 και την Πρόταση 3.2.10, δεδομένου ότι οι προβολικές κλάσεις είναι κλειστές ως προς συνεχή αντικατάσταση.

Άσκηση 3.4.13. Η κατεύθυνση (iii) $\Longrightarrow$ (i) είναι σαφής αφού οι προβολές είναι συνεχείς συναρτήσεις, και άρα αν μια κλάση είναι κλειστή ως προς συνεχείς εικόνες είναι τότε κλειστή και ως προς τον τελεστή $\exists^{\mathcal{N}}$.

Για την κατεύθυνση (i) $\Longrightarrow$ (ii) θεωρούμε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{Y}$ και έναν συνεχή επιμορφισμό $\pi : \mathcal{N} \twoheadrightarrow \mathcal{Y}$. Τότε για κάθε $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ που ανήκει στη Γ, (όπου $\mathcal{X}$ Πολωνικός χώρος), και κάθε $x \in \mathcal{X}$ έχουμε

$$\begin{aligned} x \in \exists^{\mathcal{Y}} P &\iff \exists y\ (x, y) \in P \\ &\iff \exists \alpha\ (x, \pi(\alpha)) \in P, \end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ισοδυναμία χρησιμοποιήσαμε ότι η π είναι επιμορφισμός.

Αφού η Γ είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση, προκύπτει από τις πιο πάνω ισοδυναμίες ότι το σύνολο $\exists^{\mathcal{Y}} P$ ανήκει στην κλάση $\exists^{\mathcal{N}}\Gamma \subseteq \Gamma$.

Έπειτα ασχολούμαστε με την κατεύθυνση (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Θεωρούμε Πολωνικούς χώρους $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, μια συνεχή συνάρτηση $f : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ και ένα σύνολο $P \in \Gamma|\mathcal{Y}$.

Τότε για κάθε $x \in \mathcal{X}$ έχουμε

$$\begin{aligned} x \in f[P] &\iff \exists y \in P \ f(y) = x \\ &\iff \exists y \ (y \in P \ \& \ (y,x) \in Graph(f)). \end{aligned}$$

Το P ανήκει στη Γ από την υπόθεση και το γράφημα $Graph(f)$ της f είναι κλειστό σύνολο αφού η f είναι συνεχής. Από τις ιδιότητες κλειστότητας της Γ το σύνολο Q με

$$(y,x) \in Q \iff y \in P \ \& \ (y,x) \in Graph(f)$$

ανήκει στη Γ και το σύνολο $f[P] = \exists^{\mathcal{Y}} Q$ ανήκει στην $\exists^{\mathcal{Y}}\Gamma \subseteq \Gamma$.

Ο ισχυρισμός σχετικά με την $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ προκύπτει άμεσα από τα πιο πάνω αφού η $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ περιέχει τα κλειστά σύνολα, και είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση και &, όπου $n \geqslant 1$.

Άσκηση 3.4.14. Όπως στα Λήμματα 3.3.4 και 3.4.2.

Άσκηση 3.4.15. Όμοια με τη λύση της Άσκησης 3.3.21. Η μόνη μη τετριμμένη διαφορά βρίσκεται στο Επαγωγικό Βήμα, όπου δείχνουμε τον ισχυρισμό για την $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_{n+1}$ με βάση αυτόν για την $\utilde{\mathbf{\Pi}}^1_n$. Εδώ είναι απαραίτητο στην Επαγωγική Υπόθεση να έχουμε τον ισχυρισμό *για κάθε* χώρους $\mathcal{X}, G$.

Παίρνουμε λοιπόν ένα $A \subseteq G$ που ανήκει στην $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_{n+1}$. Τότε υπάρχει $Q \subseteq G \times \mathcal{N}$ το οποίο ανήκει στην $\utilde{\mathbf{\Pi}}^1_n$ και $A = \exists^{\mathcal{N}} Q$. Από την Επαγωγική Υπόθεση εφαρμοσμένη στους χώρους $\mathcal{X} \times \mathcal{N}$ και $G \times \mathcal{N}$ υπάρχει $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ που ανήκει στην $\utilde{\mathbf{\Pi}}^1_n$ με $Q = (G \times \mathcal{N}) \cap P$. Παίρνουμε το $B = \exists^{\mathcal{N}} P \in \utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_{n+1}(\mathcal{X})$ και για κάθε $x \in G$ έχουμε

$$x \in A \iff \exists \alpha \ (x,\alpha) \in Q \iff \exists \alpha \ (x,\alpha) \in P \iff x \in B.$$

Καταλήγουμε ότι $A = G \cap B$.

Αντίστροφα, αν το $B \subseteq \mathcal{X}$ ανήκει στην $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_{n+1}$, τότε υπάρχει $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ που ανήκει στη $\utilde{\mathbf{\Pi}}^1_n$ με $B = \exists^{\mathcal{N}} P$. Από την Επαγωγική Υπόθεση εφαρμοσμένη στους χώρους $\mathcal{X} \times \mathcal{N}$ και $G \times \mathcal{N}$ το σύνολο $Q = (G \times \mathcal{N}) \cap P$ ανήκει στη $\utilde{\mathbf{\Pi}}^1_n(G \times \mathcal{N})$, και επομένως το $\exists^{\mathcal{N}} Q$ ανήκει στην $\exists^{\mathcal{N}} \utilde{\mathbf{\Pi}}^1_n(G) = \utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_{n+1}(G)$. Όπως πιο πάνω, έχουμε ότι $G \cap B = \exists^{\mathcal{N}} Q$ άρα το $G \cap B$ ανήκει στη $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_{n+1}(G)$.

Άσκηση 3.5.2. Άμεσο από την Παρατήρηση 3.5.2 χρησιμοποιώντας ότι οι κλάσεις $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ και $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ είναι κλειστές ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$.

Άσκηση 3.5.9. Άμεση από την Παρατήρηση 3.5.2 καθώς οι κλάσεις $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ και $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ είναι κλειστές ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$.

Άσκηση 3.5.10. Αν η χ_A είναι $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$-μετρήσιμη συνάρτηση, τότε το $A = \chi_A^{-1}[(2^{-1}, 1+2^{-1})]$ είναι $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ υποσύνολο του $\mathcal{X}$, και επίσης το $\mathcal{X} \setminus A = \chi_A^{-1}[(-2^{-1}, 2^{-1})]$ είναι $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ υποσύνολο του $\mathcal{X}$. Άρα $A \in \utilde{\mathbf{\Delta}}^0_n(\mathcal{X})$.

Αντίστροφα υποθέτουμε ότι $A \in \utilde{\mathbf{\Delta}}^0_n(\mathcal{X})$. Για κάθε ανοικτό $U \subseteq \mathbb{R}$ έχουμε

$$\chi_A^{-1}[U] = \begin{cases} A, & \text{αν } 1 \in U \text{ και } 0 \notin U \\ \mathcal{X} \setminus A, & \text{αν } 1 \notin U \text{ και } 0 \in U \\ \varnothing, & \text{αν } 0,1 \notin U \\ \mathcal{X}, & \text{αν } 0,1 \in U. \end{cases}$$

Βλέπουμε ότι σε κάθε περίπτωση το $\chi_A^{-1}[U]$ είναι $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ υποσύνολο του $\mathcal{X}$, και άρα η χ_A είναι $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$-μετρήσιμη συνάρτηση.

Άσκηση 3.5.11. Θεωρούμε ένα ανοικτό $U \subseteq \mathbb{R}$ και θέτουμε $I = \{k \in \mathbb{N} \mid 2^{-k} \in U\}$. Αρχικά θεωρούμε ότι $0 \notin U$. Τότε για κάθε $x \in \mathcal{X}$,

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}[U] &\iff f(x) \in U \\ &\iff \exists k \in I \ f(x) = 2^{-k} \\ &\iff \exists k \in I \ (x \in B_k \ \& \ \forall m < k \ x \notin B_m) \\ &\iff \exists k \ (k \in I \ \& \ x \in B_k \ \& \ \forall m < k \ x \notin B_m) \end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει εύκολα ότι $f^{-1}[U] \in \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$. (Ένας τρόπος να το δει κανείς είναι με χρήση του διαγραμματικού συλλογισμού.)

Αν $0 \in U$, τότε υπάρχει k_0, έτσι ώστε για κάθε $k \geqslant k_0$ ισχύει $2^{-k} \in U$. Επομένως έχουμε για κάθε $x \in \mathcal{X}$,

$$\begin{aligned} x \notin f^{-1}[U] &\iff f(x) \notin U \\ &\iff \exists k < k_0 \ (k \notin I \ \& \ f(x) = 2^{-k}) \\ &\iff \exists k < k_0 \ (k \notin I \ \& \ x \in B_k \ \& \ \forall m < k \ x \notin B_m). \end{aligned}$$

Επομένως, το σύνολο $\mathcal{X} \setminus f^{-1}[U]$ είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^0_n$ υποσύνολο του $\mathcal{X}$ και άρα $f^{-1}[U] \in \underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^0_n(\mathcal{X}) \subseteq \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n(\mathcal{X})$. Καταλήγουμε ότι η f είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$-μετρήσιμη.

Παίρνοντας την ένωση κατάλληλα μικρών ανοικτών διαστημάτων με κέντρα τα 2^{-k} για κάθε $k \in \mathbb{N}$, βρίσκουμε ένα ανοικτό $U_0 \subseteq \mathbb{R}$ με $2^{-k} \in U_0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $0 \notin U_0$. Είναι τότε σαφές ότι $f^{-1}[U_0] = A$, επομένως αν $A \notin \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n(\mathcal{X})$, τότε η f δεν είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$-μετρήσιμη.

Άσκηση 3.5.12. Η συνεπαγωγή (i) $\Longrightarrow$ (ii) είναι προφανής. Για τη (ii) $\Longrightarrow$ (iii) θεωρούμε ένα $A \in \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_2(\mathcal{Y})$. Τότε το A είναι η αριθμήσιμη ένωση ακολουθίας κλειστών υποσυνόλων του $\mathcal{Y}$. Εφόσον η f αντιστρέφει τα ανοικτά σε $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$ σύνολα, αντιστρέφει τα κλειστά σε $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ υποσύνολα του $\mathcal{X}$. Άρα το $f^{-1}[A]$ είναι η αριθμήσιμη ένωση $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ υποσυνόλων του $\mathcal{X}$, και επομένως είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ σύνολο.

Τέλος για τη συνεπαγωγή (iii) $\Longrightarrow$ (i) θεωρούμε ένα ανοικτό $U \subseteq \mathcal{Y}$. Τότε το U είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_2$ και επομένως $f^{-1}[U] \in \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n(\mathcal{X})$. Επιπλέον, το συμπλήρωμα $\mathcal{Y} \setminus U$ είναι κλειστό και άρα $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_2$, επομένως

$$\mathcal{X} \setminus f^{-1}[U] = f^{-1}[\mathcal{Y} \setminus U] \in \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n(\mathcal{X}).$$

Καταλήγουμε ότι $f^{-1}[U] \in \underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^0_n(\mathcal{X})$ και η f είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^0_n$-μετρήσιμη.

Άσκηση 3.5.13. Αν οι $f, g : X \to \mathbb{R}$ είναι Borel-μετρήσιμες, τότε από την Άσκηση 4.2.17 η συνάρτηση

$$H : X \to \mathbb{R}^2 : H(x) = (f(x), g(x))$$

είναι επίσης Borel-μετρήσιμη.

Επειδή η συνάρτηση της πρόσθεσης $+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, πάλι από την Άσκηση 4.2.17 έχουμε ότι η σύνθεση

$$+ \circ H : X \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) + g(x),$$

δηλαδή η συνάρτηση $f + g$, είναι Borel-μετρήσιμη. Ο ισχυρισμός για τη μετρησιμότητα των υπόλοιπων συναρτήσεων αποδεικνύεται όμοια. Υπενθυμίζεται ότι

$$\max\{f, g\} = \frac{f + g + |f - g|}{2}, \quad \min\{f, g\} = \frac{f + g - |f - g|}{2} \ .$$

Άσκηση 3.5.14. Για κάθε $s \in \mathbb{N}$ θέτουμε $R^f_s = f^{-1}[V_s]$, έτσι που η f είναι Γ-μετρήσιμη αν και μόνο αν $R^f_s \in \Gamma(\mathcal{X})$ (Άσκηση 3.5.9). Από τα Λήμματα 3.3.6 και 3.4.5 είναι σαφές ότι το R^f ανήκει στη Γ αν και μόνο αν για κάθε $s \in \mathbb{N}$ το R^f_s ανήκει στη Γ.

Άσκηση 3.5.15. Θεωρούμε μια αριθμήσιμη βάση $\{V_s \mid s \in \mathbb{N}\}$ για την τοπολογία του $\mathcal{Y}$. Τότε για κάθε $x \in \mathcal{X}$ έχουμε

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}[A] &\iff f(x) \in A \\ &\iff \exists y\ (\ (x,y) \in Graph(f)\ \&\ y \in A\ ). \end{aligned}$$

Από την Πρόταση 3.5.4 το $Graph(f)$ είναι $\utilde{\mathbf{\Delta}}^1_n$ υποσυνόλο του $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.

Στην περίπτωση που $\Gamma = \utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n$, τότε το A είναι $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ υποσύνολο του $\mathcal{Y}$. Με βάση την τελευταία από τις προηγούμενες ισοδυναμίες και το ότι $Graph(f) \in \utilde{\mathbf{\Delta}}^1_n(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$, έχουμε ότι το $f^{-1}[A]$ είναι $\exists^{\mathcal{Y}}\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n \subseteq \utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ υποσύνολο του $\mathcal{X}$.

Στην περίπτωση που $\utilde{\mathbf{\Pi}}^1_n$ εφαρμόζουμε τις ακόλουθες ισοδυναμίες,

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}[A] &\iff f(x) \in A \\ &\iff \forall y(\ (x,y) \in Graph(f)\ \longrightarrow\ y \in A\ ) \\ &\iff \forall y(\ (x,y) \notin Graph(f)\ \vee\ y \in A). \end{aligned}$$

Εφόσον το A ανήκει στην $\utilde{\mathbf{\Pi}}^1_n$, έχουμε ότι και το $f^{-1}[A]$ είναι $\utilde{\mathbf{\Pi}}^1_n$ υποσύνολο $\mathcal{X}$.

Άσκηση 3.5.16. Εφόσον ο $\mathcal{X}$ είναι υπεραριθμήσιμος από το Θεώρημα 3.5.8, υπάρχει $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_2$-μετρήσιμη επί συνάρτηση $g : \mathcal{X} \twoheadrightarrow \mathcal{N}$ και από το Θεώρημα 2.3.7 υπάρχει συνεχής επιμορφισμός $\pi : \mathcal{N} \twoheadrightarrow \mathcal{Y}$. Επομένως η σύνθεση $f : \mathcal{X} \twoheadrightarrow \mathcal{Y} : f = \pi \circ g$ είναι επί και από την Πρόταση 3.5.6 είναι $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_2$-μετρήσιμη ως σύνθεση συνεχούς συνάρτησης με $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_2$-μετρήσιμη.

Άσκηση 3.5.17. Θεωρούμε μια συμβατή μετρική d στον $\mathcal{Y}$ και ένα αριθμήσιμο και πυκνό σύνολο $D = \{r_s \mid s \in \mathbb{N}\}$. Για κάθε $s \in \mathbb{N}$ και κάθε $q \in \mathbb{Q}^+$ παίρνουμε το σύνολο $B(r_s, q) = \{y \in \mathcal{Y} \mid d(y, r_s) < q\}$ έτσι που η οικογένεια $\mathcal{V} = \{B(r_s, q) \mid s \in \mathbb{N}\ \&\ q \in \mathbb{Q}^+\}$ αποτελεί βάση για τον $\mathcal{Y}$. Από την Παρατήρηση 3.5.2 αρκεί να δείξουμε ότι $f^{-1}[B(r_s, q)] \in \utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n(\mathcal{X})$ για κάθε $s \in \mathbb{N}$ και $q \in \mathbb{Q}^+$.

Αφού η ακολουθία $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\sup\{d(f_i(x), f(x)) \mid x \in \mathcal{X}\} < \infty$ *για κάθε* $i \in \mathbb{N}$, δηλαδή αφαιρούμε τα ενδεχόμενα $i \in \mathbb{N}$ για τα οποία $\sup\{d(f_i(x), f(x)) \mid x \in \mathcal{X}\} = \infty$, τα οποία είναι το πολύ πεπερασμένα. Στη συνέχεια, για κάθε i θέτουμε

$$a_i = \sup\{d(f_i(x), f(x)) \mid x \in \mathcal{X}\} < \infty$$

έτσι που $a_i \to 0$.

Παίρνουμε $s \in \mathbb{N}$ και $q \in \mathbb{Q}^+$ και ισχυριζόμαστε ότι για κάθε $x \in \mathcal{X}$ ισχύει

$$(\star 2) \qquad d(f(x), r_s) < q \iff \exists k, i \in \mathbb{N}\ (\ a_i < 2^{-k}\ \&\ d(f_i(x), r_s) < q - 2^{-k}\ ).$$

Για την απόδειξη της ευθείας κατεύθυνσης της προηγούμενης ισοδυναμίας θεωρούμε $x \in \mathcal{X}$ με $d(f(x), r_s) < q$. Παίρνουμε ένα $k \in \mathbb{N}$ με $2 \cdot 2^{-k} < q - d(f(x), r_s)$ και ένα $i \in \mathbb{N}$ με $a_i < 2^{-k}$. Τότε έχουμε

$$d(f(x), r_s) + 2^{-k} < q - 2^{-k}$$

και

$$d(f_i(x), r_s) \leqslant d(f_i(x), f(x)) + d(f(x), r_s) \leqslant a_i + d(f(x), r_s) < 2^{-k} + q - 2^{-k} = q.$$

Αντίστροφα αν έχουμε $a_i < 2^{-k}$ και $d(f_i(x), r_s) < q - 2^{-k}$ για κάποια i, k τότε

$$d(f(x), r_s) \leqslant d(f(x), f_i(x)) + d(f_i(x), r_s) \leqslant a_i + d(f_i(x), r_s) < 2^{-k} + q - 2^{-k} = q.$$

Από την ($\star 2$) είναι άμεσο ότι

$$x \in f^{-1}[B(r_s, q)] \iff \exists k, i \in \mathbb{N}\ \exists p \in \mathbb{Q}$$
$$(a_i < 2^{-k}\ \&\ p = q - 2^{-k}\ \&\ x \in f_i^{-1}[B(r_s, p)])$$

για κάθε $x \in \mathcal{X}$.

Επειδή κάθε f_i είναι $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$-μετρήσιμη έχουμε ότι το σύνολο $f_i^{-1}[B(r_s, p)$ είναι $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$. Προκύπτει από την τελευταία ισοδυναμία και τις ιδιότητες κλειστότητας της κλάσης $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ ότι το $f^{-1}[B(r_s, q)]$ είναι $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ υποσύνολο του $\mathcal{X}$ και επομένως η f είναι $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$-μετρήσιμη. (Θεωρούμε το $\mathbb{Q}$ με τη διακριτή μετρική.)

Σχόλιο. Ο λόγος που ζητάμε $a_i \in \mathbb{R}$ για κάθε i είναι για να μπορέσουμε να εφαρμόσουμε τον διαγραμματικό συλλογισμό στην τελευταία ισοδυναμία: στην ουσία θεωρούμε την ακολουθία $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ και τις προβολές σε κάθε συντεταγμένη a_i.

Άσκηση 3.6.8. Αν πάρουμε $\mathcal{X} = \mathbb{N}$, τότε κάθε υποσύνολο του $\mathcal{X}$ είναι ανοικτό, δηλαδή $\mathcal{P}(\mathcal{X}) = \utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_1(\mathcal{X})$. Αφού όλα τα στοιχεία των υπόλοιπων κλάσεων είναι ειδικότερα υποσύνολα του $\mathcal{X}$, έχουμε

$$\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n(\mathcal{X}) = \utilde{\mathbf{\Pi}}^0_n(\mathcal{X}) = \utilde{\mathbf{\Delta}}^0_n(\mathcal{X}) = \utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_m(\mathcal{X}) = \utilde{\mathbf{\Pi}}^1_m(\mathcal{X}) = \utilde{\mathbf{\Delta}}^1_m(\mathcal{X}) = \mathcal{P}(\mathcal{X}).$$

Δηλαδή όλες οι κλάσεις είναι ίσες μεταξύ τους ή, όπως λέμε διαφορετικά, η *ιεραρχία καταρρέει.*

Άσκηση 3.6.9. Από το Θεώρημα 3.6.7 και το Πόρισμα 3.4.7 έχουμε

$$\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n(\mathcal{X}) \subsetneq \utilde{\mathbf{\Delta}}^0_{n+1}(\mathcal{X}) \subseteq \utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+1}(\mathcal{X}) \subseteq \utilde{\mathbf{\Delta}}^1_1(\mathcal{X}),$$

άρα $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n(\mathcal{X}) \subsetneq \utilde{\mathbf{\Delta}}^1_1(\mathcal{X})$.

Άσκηση 3.6.10. Σύμφωνα με το Λήμμα 3.6.6 αν υπήρχε σύνολο $G \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ που είναι $\mathcal{X}$-καθολικό για την $\utilde{\mathbf{\Delta}}^0_n(\mathcal{X})$, τότε θα είχαμε $c\utilde{\mathbf{\Delta}}^0_n(\mathcal{X}) \neq \utilde{\mathbf{\Delta}}^0_n(\mathcal{X})$, που είναι άτοπο γιατί ένα σύνολο $A \subseteq \mathcal{X}$ ανήκει στην $\utilde{\mathbf{\Delta}}^0_n$ αν και μόνο αν το $\mathcal{X} \setminus A$ ανήκει στην $\utilde{\mathbf{\Delta}}^0_n$. (Παρατηρούμε ότι το ίδιο ισχύει ακόμα και αν ο $\mathcal{X}$ είναι αριθμήσιμο σύνολο.)

Στη συνέχεια υποθέτουμε προς άτοπο ότι υπάρχει ένα $H \subseteq 2^{\mathbb{N}} \times \mathcal{X}$ που είναι $2^{\mathbb{N}}$-καθολικό για την $\utilde{\mathbf{\Delta}}^0_{n+1}(\mathcal{X})$. Αφού ο $\mathcal{X}$ είναι υπεραριθμήσιμος, υπάρχει ένας συνεχής μονορφισμός $\tau : 2^{\mathbb{N}} \rightarrowtail \mathcal{X}$. Όπως και στην απόδειξη της Πρότασης 3.6.5, το σύνολο $H' \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ με

$$(y, x) \in H' \iff y \in \tau[2^{\mathbb{N}}]\ \&\ (\tau^{-1}(y), x) \in H$$

θα ήταν $\mathcal{X}$-καθολικό για την $\utilde{\mathbf{\Delta}}^0_{n+1}(\mathcal{X})$, που είναι άτοπο από τα προηγούμενα. Εδώ χρησιμοποιούμε ότι το σύνολο $\tau[2^{\mathbb{N}}]$ ως κλειστό ανήκει στην $\utilde{\mathbf{\Delta}}^0_{n+1}(\mathcal{X})$.

Τέλος για την κατασκευή του ζητούμενου J θεωρούμε το σύνολο $A = \{\alpha \in 2^{\mathbb{N}} \mid \alpha(0) \neq 0\}$. Τότε το A είναι κλειστό-ανοικτό υποσύνολο του $2^{\mathbb{N}}$, επομένως το $J = A \times \mathbb{R}$ είναι κλειστό-ανοικτό υποσύνολο του $2^{\mathbb{N}} \times R$, δηλαδή $J \in \utilde{\mathbf{\Delta}}^0_1(\mathbb{R})$. Παρατηρούμε ότι

$$J_\alpha = \begin{cases} \varnothing, & \alpha(0) = 0 \\ \mathbb{R}, & \alpha(0) = 1. \end{cases}$$

Αν το $P \subseteq \mathbb{R}$ είναι κλειστό-ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, υπάρχουν ακριβώς δύο περιπτώσεις: α) $P = \varnothing$ οπότε $P = J_{\vec{0}}$, όπου $\vec{0} = (0, 0, 0, \dots)$ και, β) $P = \mathbb{R}$ οπότε $P = J_{\vec{1}}$, όπου $\vec{1} = (1, 1, 1, \dots)$. Επομένως, το J είναι $2^{\mathbb{N}}$-καθολικό για την $\utilde{\mathbf{\Delta}}^0_1(\mathbb{R})$.

Άσκηση 3.6.11. Θεωρούμε έναν συνεχή μονομορφισμό $\tau : 2^{\mathbb{N}} \rightarrowtail \mathcal{X}$ και ένα $G \subseteq 2^{\mathbb{N}} \times \mathcal{X}$ που είναι $2^{\mathbb{N}}$-καθολικό για την $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n(\mathcal{X})$.

Το σύνολο $\tau[2^{\mathbb{N}}]$ είναι Πολωνικός χώρος. Ορίζουμε το $H \subseteq \tau[2^{\mathbb{N}}] \times \mathcal{X}$ ως εξής:

$$(y, x) \in H \iff (\tau^{-1}(y), x) \in G.$$

Το H είναι $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ υποσύνολο του $\tau[2^{\mathbb{N}}] \times \mathcal{X}$ γιατί είναι η εικόνα του G μέσω του τοπολογικού ισομορφισμού

$$(\alpha, x) \in 2^{\mathbb{N}} \times \mathcal{X} \quad \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \quad (\tau(\alpha), x) \in \tau[2^{\mathbb{N}}] \times \mathcal{X}.$$

Εφόσον ο $\tau[2^{\mathbb{N}}] \times \mathcal{X}$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$, από την Άσκηση 3.3.21 υπάρχει ένα $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ υποσύνολο J του $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ με $H = J \cap \tau[G] \times \mathcal{X}$.

Όπως στο Λήμμα 3.6.6, ορίζουμε το σύνολο

$$A = \{x \in \mathcal{X} \mid (x, x) \notin J\}.$$

Τότε το A ανήκει στην $\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_n(\mathcal{X})$. Έστω προς άτοπο ότι $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n(\mathcal{X})$, οπότε υπάρχει $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$ με $A = G_\alpha$. Έχουμε εύκολα ότι $G_\alpha = H_{\tau(\alpha)}$. Επομένως

$$\begin{aligned}
\tau(\alpha) \in A &\iff (\tau(\alpha), \tau(\alpha)) \notin J \\
&\iff (\tau(\alpha), \tau(\alpha)) \notin H \quad (\text{γιατί } (\tau(\alpha), \tau(\alpha)) \in \tau[2^{\mathbb{N}}] \times \mathcal{X}) \\
&\iff \tau(\alpha) \notin H_{\tau(\alpha)} = G_\alpha \\
&\iff \tau(\alpha) \notin A,
\end{aligned}$$

που είναι άτοπο. Άρα $A \notin \utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n(\mathcal{X})$.

Άσκηση 3.6.12. Λόγω των γνωστών εγκλεισμών μεταξύ των κλάσεων αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $n \geqslant 1$ ισχύει $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n(\mathcal{X}) \leqslant_c 2^{\mathbb{N}}$. Σταθεροποιούμε ένα $n \geqslant 1$. Από την Πρόταση 3.6.4 υπάρχει ένα σύνολο $G \subseteq 2^{\mathbb{N}} \times \mathcal{X}$ που είναι $2^{\mathbb{N}}$-καθολικό για την $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n(\mathcal{X})$. Επομένως, για κάθε $P \in \utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n(\mathcal{X})$ υπάρχει ένα $\varepsilon^P \in 2^{\mathbb{N}}$ με $P = G_{\varepsilon^P}$. Από το Αξίωμα Επιλογής υπάρχει συνάρτηση

$$P \in \utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n(\mathcal{X}) \mapsto \varepsilon^P \in 2^{\mathbb{N}}$$

όπου το ε^P είναι όπως πιο πάνω. Αυτή η συνάρτηση είναι ένα-προς-ένα γιατί αν έχουμε $P, Q \in \utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n(\mathcal{X})$ με $P \neq Q$, τότε $P = G_{\varepsilon^P} \neq G_{\varepsilon^Q} = Q$ και ειδικότερα $\varepsilon^P \neq \varepsilon^Q$.

Τέλος έχουμε

$$\bigcup_{n \geqslant 1} \utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n(\mathcal{N}) \leqslant_c \mathbb{N} \times 2^{\mathbb{N}} =_c 2^{\mathbb{N}} =_c \mathcal{N} <_c \mathcal{P}(\mathcal{N}).$$

Επομένως το $\bigcup_{n \geqslant 1} \utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n(\mathcal{N})$ είναι γνήσιο υποσύνολο του $\mathcal{P}(\mathcal{N})$, και άρα υπάρχει $A \subseteq \mathcal{N}$ με $A \notin \bigcup_{n \geqslant 1} \utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n(\mathcal{N})$.

Άσκηση 3.6.13. Υποθέτουμε προς άτοπο ότι υπάρχει κάποιο $n_0 \geqslant 1$ με $P \in \utilde{\mathbf{\Pi}}^1_{n_0}(\mathcal{N})$. Τότε $P \in \utilde{\mathbf{\Pi}}^1_n(\mathcal{N})$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Ορίζουμε την ακολουθία $(P_n)_{n \geqslant 1}$ υποσυνόλων του $\mathcal{N}$ ως εξής:

$$P_n = \begin{cases} \emptyset, & n < n_0, \\ P, & n \geqslant n_0, \end{cases}$$

έτσι που $P = \bigcup_{n \geqslant 1} P_n$.

Όπως έχουμε δει στην απόδειξη του Λήμματος 3.6.3, το συμπλήρωμα $\mathrm{c}_{\mathcal{N} \times \mathcal{N}} G^n$ είναι $\mathcal{N}$-καθολικό για την $\utilde{\mathbf{\Pi}}^1_n(\mathcal{N})$. Για κάθε $n \geqslant 1$ έχουμε προφανώς $P_n \in \utilde{\mathbf{\Pi}}^1_n(\mathcal{N})$ και άρα υπάρχει $\alpha_n \in \mathcal{N}$, έτσι ώστε το P_n να είναι ίσο με την α_n-τομή $(\mathrm{c}_{\mathcal{N} \times \mathcal{N}} G^n)_{\alpha_n}$ του $\mathrm{c}_{\mathcal{N} \times \mathcal{N}} G^n$, η οποία είναι εύκολα ίση με το συμπλήρωμα $\mathrm{c}_{\mathcal{N}} G^n_{\alpha_n}$ της α_n-τομής του G^n. Έχουμε επομένως $P_n = \mathrm{c}_{\mathcal{N}} G^n_{\alpha_n}$ για κάθε $n \geqslant 1$.

Παίρνουμε $\alpha \in \mathcal{N}$ με $(\alpha)_n = \alpha_n$ για κάθε $n \geqslant 1$. Τότε

$$\begin{aligned}
\alpha \in P &\iff \alpha \in \bigcup_{n \geqslant 1} P_n \\
&\iff \exists n \geqslant 1 \ \alpha \in P_n \\
&\iff \exists n \geqslant 1 \ \alpha \notin G^n_{\alpha_n} \\
&\iff \exists n \geqslant 1 \ (\alpha_n, \alpha) \notin G^n \\
&\iff \exists n \geqslant 1 \ ((\alpha)_n, \alpha) \notin G^n \\
&\iff \alpha \notin P,
\end{aligned}$$

που είναι άτοπο, όπου στην τελευταία ισοδυναμία χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό του P. Άρα το P δεν είναι προβολικό σύνολο.

Άσκηση 3.7.12. Θεωρούμε το σύνολο $P \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ όλων των τελικά μηδενικών ακολουθιών, το οποίο από το Λήμμα 3.7.10 είναι $\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^0_2$-πλήρες. Το σύνολο P είναι εύκολα αριθμήσιμο. Αν για κάθε $\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^0_2$ σύνολο $A \subseteq \mathcal{N}$ υπήρχε ένα-προς-ένα συνεχής αναγωγή f από το A στο P, τότε θα ήταν ισοπληθικό με το P και άρα θα ήταν αριθμήσιμο. Αυτό όμως είναι άτοπο, γιατί υπάρχουν $\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^0_2$ σύνολα που είναι υπεραριθμήσιμα, όπως ο ίδιος ο χώρος του Baire για παράδειγμα.

Σχόλιο. Προκύπτει από ένα αποτέλεσμα του Steel (βλ. [**8**], 26.8-26.9) ότι η $\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^0_n$-πληρότητα όπου $n \geqslant 3$, επαληθεύεται από μία ένα-προς-ένα συνεχή αναγωγή.

Άσκηση 3.8.8. Θεωρούμε μια αριθμήσιμη βάση $\mathcal{V} = \{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ της τοπολογίας του $\mathcal{X}$ που αποτελείται από κλειστά-ανοικτά σύνολα. Τότε το U γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} V_{k_i}$. Επαναλαμβάνουμε την απόδειξη της Πρότασης 3.8.2 με το V_{k_i} στη θέση του Q_i και το U στη θέση του P.

Οι επόμενοι ισχυρισμοί προκύπτουν άμεσα από τις Προτάσεις 3.8.4 και 3.8.6.

Άσκηση 3.8.9. Θεωρούμε μια αριθμήσιμη βάση $\mathcal{V} = \{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ του $\mathcal{X}$ που αποτελείται από κλειστά-ανοικτά σύνολα.

Επειδή $F_1 \cap F_2 = \varnothing$, έχουμε για κάθε $x \in \mathcal{X}$ ότι $x \notin F_1$ ή $x \notin F_2$. Αφού τα F_1, F_2 είναι κλειστά, για κάθε $x \in \mathcal{X}$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $x \in V_n$ και

$$V_n \cap F_1 = \varnothing \qquad \text{ή} \qquad V_n \cap F_2 = \varnothing.$$

Θέτουμε $n_x =$ το ελάχιστο $n \in \mathbb{N}$ όπως πιο πάνω, και $I = \{n_x \in \mathbb{N} \mid x \in \mathcal{X}\}$. Για κάθε $n \in I$ ορίζουμε

$$U_n = V_n \setminus \bigcup_{m<n, m \in I} V_m,$$

έτσι που κάθε U_n είναι κλειστό-ανοικτό υποσύνολο του V_n, $U_n \cap U_m = \varnothing$ για κάθε $m \neq n$ με $m, n \in I$, και $\bigcup_{n \in I} U_n = \bigcup_{n \in I} V_n = \mathcal{X}$, όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιούμε ότι $x \in V_{n_x}$ για κάθε x. Ειδικότερα, για κάθε $x \in \mathcal{X}$ υπάρχει μοναδικό $n \in I$ με $x \in U_n$.

Στη συνέχεια θέτουμε $J = \{n \in I \mid U_n \cap F_1 \neq \varnothing\}$ και

$$C = \bigcup_{n \in J} U_n.$$

Ισχυριζόμαστε ότι το C είναι το ζητούμενο σύνολο.

Αν $x \in F_1$, θεωρούμε το μοναδικό $n \in I$ με $x \in U_n$, οπότε $U_n \cap F_1 \neq \varnothing$. Άρα $n \in J$ και αφού $x \in U_n$ συμπεραίνουμε ότι $x \in C$. Επομένως $F_1 \subseteq C$.

Αν $x \in C$, τότε υπάρχει $n \in J$ με $x \in U_n$. Επειδή $n \in J$ έχουμε $U_n \cap F_1 \neq \varnothing$ και αφού $U_n \subseteq V_n$ ισχύει επίσης $V_n \cap F_1 \neq \varnothing$. Από την επιλογή των στοιχείων του I ισχύει $V_n \cap F_1 = \varnothing$ ή $V_n \cap F_2 = \varnothing$. (Το $n \in J \subseteq I$ είναι της μορφής n_y για κάποιο $y \in \mathcal{X}$ που δεν είναι απαραίτητα το ίδιο με το x). Αφού δεν είμαστε στην περίπτωση $V_n \cap F_1 = \varnothing$ θα είμαστε αναγκαστικά στην $V_n \cap F_2 = \varnothing$. Επειδή $x \in U_n \subseteq V_n$, προκύπτει ότι $x \notin F_2$. Συνεπώς $C \cap F_2 = \varnothing$.

Μέχρι στιγμής έχουμε αποδείξει ότι το C διαχωρίζει το F_1 από το F_2. Απομένει να δείξουμε ότι το C είναι κλειστό-ανοικτό σύνολο. Από τον ορισμό του είναι ανοικτό σύνολο ως ένωση ανοικτών. Για να δείξουμε ότι είναι κλειστό ισχυριζόμαστε ότι

$$x \notin C \iff \exists n \notin J \ x \in U_n$$

για κάθε $x \in \mathcal{X}$, απ' όπου προκύπτει ότι το συμπλήρωμα του C είναι ένωση ανοικτών συνόλων και επομένως ανοικτό. Επομένως, αν δείξουμε την προηγούμενη ισοδυναμία θα έχουμε ότι το C είναι κλειστό σύνολο.

Για την ευθεία κατεύθυνση θεωρούμε $x \notin C$ και το μοναδικό n με $x \in U_n$. Αν ήταν $n \in J$ τότε από τον ορισμό του C θα είχαμε $x \in C$, που είναι άτοπο. Άρα $n \notin J$. Αντίστροφα, αν $x \in U_n$ για κάποιο $n \notin J$ τότε για κάθε $m \in J$ ισχύει $n \neq m$ και άρα $U_n \cap U_m = \varnothing$. Επομένως, $x \notin U_m$ για κάθε $m \in J$, δηλαδή $x \notin C$.

Κεφάλαιο 4

Άσκηση 4.1.9. Πρέπει να δείξουμε ότι η κλειστότητα ως προς την αριθμήσιμη ένωση υποσυνόλων του X είναι ισοδύναμη με την κλειστότητα ως προς την αριθμήσιμη τομή (υποσυνόλων του X) παρουσία των άλλων δύο ιδιοτήτων της σ-άλγεβρας.

Θεωρούμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα και παίρνουμε μια ακολουθία $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από υποσύνολα του X, που ανήκουν στην $\mathcal{A}$. Τότε

$$X \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X \setminus A_n.$$

Αφού $A_n \in \mathcal{A}$, έχουμε ότι $X \setminus A_n \in \mathcal{A}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και από την κλειστότητα ως προς αριθμήσιμη ένωση έχουμε ότι $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X \setminus A_n \in \mathcal{A}$. Προκύπτει ότι $X \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ και άρα $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$. Καταλήγουμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή ως προς την αριθμήσιμη τομή υποσυνόλων του X.

Η αντίστροφη κατεύθυνση αποδεικνύεται όμοια.

Άσκηση 4.1.10. Ορίζουμε τις οικογένειες $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4$ ως εξής:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1 &= \{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X) \mid \text{η } \mathcal{A} \text{ είναι } \sigma\text{-άλγεβρα που περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του } X\} \\
\mathcal{F}_2 &= \{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X) \mid \text{η } \mathcal{A} \text{ είναι } \sigma\text{-άλγεβρα που περιέχει τα κλειστά υποσύνολα του } X\} \\
\mathcal{F}_3 &= \{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X) \mid \text{η } \mathcal{A} \text{ είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες ενώσεις/τομές και} \\
&\qquad\qquad \text{περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του } X\} \\
\mathcal{F}_4 &= \{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X) \mid \text{η } \mathcal{A} \text{ είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες ενώσεις/τομές και} \\
&\qquad\qquad \text{περιέχει τα κλειστά υποσύνολα του } X\}.
\end{aligned}$$

Πρέπει να δείξουμε ότι $\bigcap \mathcal{F}_1 = \bigcap \mathcal{F}_2 = \bigcap \mathcal{F}_3 = \bigcap \mathcal{F}_4$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η τομή κάθε μίας από αυτές τις οικογένειες ικανοποιεί την αντίστοιχη ιδιότητα της οικογένειας, δηλαδή ισχύει $\bigcap \mathcal{F}_i \in \mathcal{F}_i$ για κάθε $i = 1, 2, 3, 4$.

Κάθε σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ στο X, που περιέχει τα ανοικτά σύνολα, περιέχει επίσης και τα κλειστά. Αυτό συμβαίνει γιατί κάθε κλειστό σύνολο είναι G_δ και ειδικότερα είναι αριθμήσιμη τομή στοιχείων της $\mathcal{A}$. Η $\mathcal{A}$ ως σ-άλγεβρα είναι κλειστή ως προς τις αριθμήσιμες τομές (Άσκηση 4.1.9).

Επομένως, κάθε στοιχείο της $\mathcal{F}_1$ είναι και στοιχείο της $\mathcal{F}_2$. Αντίστροφα, αν η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα που περιέχει τα κλειστά σύνολα, τότε περιέχει και τα ανοικτά, γιατί κάθε ανοικτό σύνολο είναι F_σ και άρα αριθμήσιμη ένωση στοιχείων της $\mathcal{A}$. Προκύπτει ότι $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$ και άρα $\bigcap \mathcal{F}_1 = \bigcap \mathcal{F}_2$.

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο δείχνει κανείς ότι $\mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_4$ και επομένως $\bigcap \mathcal{F}_3 = \bigcap \mathcal{F}_4$.

Απομένει να δείξουμε ότι $\bigcap \mathcal{F}_1 = \bigcap \mathcal{F}_3$. Από την Άσκηση 4.1.9 κάθε σ-άλγεβρα είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες ενώσεις και αριθμήσιμες τομές, άρα $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_3$ και επομένως $\bigcap \mathcal{F}_3 \subseteq \bigcap \mathcal{F}_1 = \mathcal{B}|X$. Για την αντίστροφη συμπερίληψη θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{A}_0 = \bigcap \mathcal{F}_3 \ \bigcap \ \{A \subseteq X \mid X \setminus A \in \mathcal{F}_3\}$$

και δείχνουμε ότι η $\mathcal{A}_0$ είναι σ-άλγεβρα που περιέχει τα ανοικτά σύνολα. Από αυτό προκύπτει ότι $\mathcal{B}|X \subseteq \mathcal{A}_0$ και άρα

$$\bigcap \mathcal{F}_1 = \mathcal{B}|X \subseteq \mathcal{A}_0 \subseteq \bigcap \mathcal{F}_3.$$

Αν το V είναι ανοικτό υποσύνολο του X, τότε προφανώς ανήκει στην $\bigcap \mathcal{F}_3$. Επιπλέον, το $C = X \setminus V$ είναι κλειστό σύνολο και άρα G_δ, δηλαδή αριθμήσιμη τομή ανοικτών συνόλων. Ειδικότερα το C είναι αριθμήσιμη τομή στοιχείων της $\bigcap \mathcal{F}_3$ και αφού $\bigcap \mathcal{F}_3 \in \mathcal{F}_3$ (ειδικότερα η $\bigcap \mathcal{F}_3$ είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες τομές), έχουμε ότι $C = X \setminus V \in \bigcap \mathcal{F}_3$. Συνεπώς $V \in \mathcal{A}_0$.

Είναι σαφές ότι η $\mathcal{A}_0$ είναι κλειστή ως προς το συμπλήρωμα και ότι τα σύνολα $\emptyset, X$ (ως ανοικτά) ανήκουν στην $\mathcal{A}_0$. Θεωρούμε μια ακολουθία $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων της $\mathcal{A}_0$. Πρέπει να δείξουμε ότι $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}_0$.

Έχουμε $A_n \in \bigcap \mathcal{F}_3$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και εφόσον η τελευταία οικογένεια είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες ενώσεις, έχουμε $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \bigcap \mathcal{F}_3$. Επιπλέον $X \setminus A_n \in \bigcap \mathcal{F}_3$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και εφόσον η τελευταία οικογένεια είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες τομές έχουμε

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X \setminus A_n = X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \bigcap \mathcal{F}_3.$$

Αφού $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \bigcap \mathcal{F}_3$ και $X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \bigcap \mathcal{F}_3$, έχουμε $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}_0$. Καταλήγουμε ότι η $\mathcal{A}_0$ είναι σ-άλγεβρα που περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του X.

Άσκηση 4.1.11. Όπως η λύση της Άσκησης 3.6.13.

Άσκηση 4.2.14. Για κάθε σύνολο $U \subseteq Y$ έχουμε

$$f^{-1}[U] = \left(f_1^{-1}[U] \cap B\right) \ \cup \ \left(f_2^{-1}[U] \cap (X \setminus B)\right).$$

Αν το U είναι ανοικτό, τότε τα σύνολα $f_1^{-1}[U]$, $f_2^{-1}[U]$ είναι Borel υποσύνολα του X. Επιπλέον, εφόσον το B είναι Borel και η $\mathcal{B}|X$ είναι σ-άλγεβρα, έχουμε ότι τα σύνολα

$$\begin{gathered} X \setminus B, \quad f_1^{-1}[U] \cap B, \quad f_2^{-1}[U] \cap (X \setminus B), \\ \left(f_1^{-1}[U] \cap B\right) \ \cup \ \left(f_2^{-1}[U] \cap (X \setminus B)\right) = f^{-1}[U] \end{gathered}$$

είναι Borel.

Άσκηση 4.2.15. Θεωρούμε μετρικούς χώρους X, Y, Z και Borel-μετρήσιμες συναρτήσεις

$$f : X \to Y, \quad g : Y \to Z.$$

Τότε για κάθε ανοικτό $U \subseteq Z$ το σύνολο $g^{-1}[U]$ είναι Borel υποσύνολο του Y και από την Πρόταση 4.2.2 η αντίστροφη εικόνα

$$f^{-1}[g^{-1}[U]] = (g \circ f)^{-1}[U]$$

είναι Borel υποσύνολο του X.

Άσκηση 4.2.16. Για κάθε $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ έχουμε

$$(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \prod_{i\in\mathbb{N}} B_i \iff \forall n\ x_n \in B_n \iff \forall n\ \mathsf{pr}_n((x_i)_{i\in\mathbb{N}}) \in B_n$$

όπου $\mathsf{pr}_n : \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i \to X_n$ είναι η προβολή $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \mapsto x_n$, η οποία είναι προφανώς συνεχής.

Από την κλειστότητα της κλάσης των Borel συνόλων ως προς συνεχή αντικατάσταση και τον τελεστή $\forall^{\mathbb{N}}$ προκύπτει το ζητούμενο.

Η απόδειξη του ισχυρισμού για πεπερασμένα το πλήθος Borel σύνολα $B_0, \dots, B_n$ είναι όμοια.

Άσκηση 4.2.17. Θεωρούμε τις προβολές

$$\mathsf{pr}_n : \prod_{i\in\mathbb{N}} Y_i \to Y_n : (y_i)_{i\in\mathbb{N}} \mapsto y_n$$

όπου $n \in \mathbb{N}$ έτσι που για κάθε συνάρτηση

$$f : X \to \prod_{n\in\mathbb{N}} Y_n : f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

έχουμε $f_n = \mathsf{pr}_n \circ f$ για κάθε n.

Αν η f είναι Borel-μετρήσιμη, τότε από την Άσκηση 4.2.15 κάθε σύνθεση $\mathsf{pr}_n \circ f = f_n$ είναι Borel-μετρήσιμη.

Αντίστροφα υποθέτουμε ότι κάθε f_n είναι Borel-μετρήσιμη συνάρτηση. Θεωρούμε ένα βασικό ανοικτό $W \subseteq \prod_{n\in\mathbb{N}} Y_n$. Εφόσον το U είναι ανοικτό, υπάρχουν ανοικτά σύνολα $U_i \subseteq Y_i$, $i = \dots, n$ (για κάποιο $n \in \mathbb{N}$) ώστε

$$W = U_0 \times \cdots \times U_n \times Y_{n+1} \times Y_{n+2} \times \cdots \times \dots.$$

Τότε για κάθε $x \in X$ έχουμε

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}[W] &\iff (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \in W \\ &\iff \forall k \leqslant n\ f_k(x) \in U_k \\ &\iff x \in \textstyle\bigcap_{k\leqslant n} f_k^{-1}[U_k]. \end{aligned}$$

Εφόσον κάθε f_k είναι Borel-μετρήσιμη, τα σύνολα $f_0^{-1}[U_0], \dots, f_n^{-1}[U_n]$ είναι Borel. Προκύπτει από τα προηγούμενα ότι το $f^{-1}[W]$ είναι επίσης Borel.

Αν τώρα το W είναι τυχαίο ανοικτό υποσύνολο του $\prod_{n\in\mathbb{N}} Y_n$, τότε είναι αριθμήσιμη ένωση βασικών ανοικτών συνόλων W_i, $i \in \mathbb{N}$. Επομένως, το σύνολο

$$f^{-1}[W] = f^{-1}[\textstyle\bigcup_{i\in\mathbb{N}} W_i] = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f^{-1}[W_i]$$

είναι Borel.

Η απόδειξη του ισχυρισμού για συναρτήσεις της μορφής $f = (f_0, \dots, f_n)$ είναι όμοια.

Άσκηση 4.2.18. Αν οι $f, g : X \to \mathbb{R}$ είναι Borel-μετρήσιμες, τότε από την Άσκηση 4.2.17 η συνάρτηση

$$H : X \to \mathbb{R}^2 : H(x) = (f(x), g(x))$$

είναι επίσης Borel-μετρήσιμη.

Επειδή η συνάρτηση της πρόσθεσης $+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, πάλι από την Άσκηση 4.2.17 έχουμε ότι η σύνθεση

$$+ \circ H : X \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) + g(x),$$

δηλαδή η συνάρτηση $f+g$ είναι Borel-μετρήσιμη. Ο ισχυρισμός για τη μετρησιμότητα των υπόλοιπων συναρτήσεων αποδεικνύεται όμοια. Υπενθυμίζεται ότι

$$\max\{f,g\} = \frac{f+g+|f-g|}{2}, \quad \min\{f,g\} = \frac{f+g-|f-g|}{2} \ .$$

Άσκηση 4.2.19. Θεωρούμε Πολωνικούς χώρους $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ και μια Borel-μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$. Όπως στην απόδειξη της Πρότασης 3.5.4, έχουμε

$$\begin{aligned}(x,y) \in Graph(f) &\iff \forall s \ (y \in V_s \ \longrightarrow \ f(x) \in V_s)\\ &\iff \forall s \ (y \notin V_s \ \vee \ f(x) \in V_s).\end{aligned}$$

Είναι τότε σαφές από τις ιδιότητες κλειστότητας της κλάσης των Borel συνόλων ότι το $Graph(f)$ είναι Borel υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.

Άσκηση 4.2.20. Άμεση από την Άσκηση 3.5.15 εφόσον κάθε Borel-μετρήσιμη συνάρτηση είναι και $\undertilde{\boldsymbol{\Delta}}^1_n$ μετρήσιμη για κάθε $n \geqslant 1$.

Άσκηση 4.2.21. Αν ο $\mathcal{X}$ είναι αριθμήσιμος Πολωνικός χώρος, τότε κάθε υποσύνολό του γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση μονοσυνόλων, τα οποία φυσικά είναι κλειστά σύνολα. Επομένως $\mathcal{P}(X) = \undertilde{\boldsymbol{\Sigma}}^0_2(\mathcal{X})$.

Υποθέτουμε ότι ο $\mathcal{X}$ είναι άπειρος αριθμήσιμος και θεωρούμε οποιαδήποτε ένα-προς-ένα απαρίθμηση$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του $\mathcal{X}$.

Τότε η συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathcal{X} : f(n) = x_n$ είναι αντιστοιχία. Επιπλέον για κάθε ανοικτό $U \subseteq \mathcal{X}$ το $f^{-1}[U]$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{N}$ (γιατί κάθε υποσύνολο του $\mathbb{N}$ είναι ανοικτό) και για κάθε $V \subseteq \mathbb{N}$ το $(f^{-1})^{-1}[V] = f[V]$ είναι $\undertilde{\boldsymbol{\Sigma}}^0_2$ (και επομένως Borel) υποσύνολο του $\mathcal{X}$. Επομένως, η f είναι Borel-ισομορφισμός.

Άσκηση 4.3.5. Θεωρούμε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και ένα υπεραριθμήσιμο Borel $B \subseteq \mathcal{X}$. Από την Πρόταση 4.3.4 υπάρχει ένα κλειστό $F \subseteq \mathcal{N}$ και μια συνεχής συνάρτηση $\pi : \mathcal{N} \to \mathcal{X}$, έτσι ώστε ο περιορισμός $\pi|F$ είναι ένα-προς-ένα και $\pi[F] = B$.

Αν το F ήταν αριθμήσιμο σύνολο, τότε και το $B = \pi[F]$ θα ήταν αριθμήσιμο, που είναι άτοπο. Επομένως το F είναι υπεραριθμήσιμο και αφού είναι Πολωνικός χώρος (ως κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{N}$), υπάρχει ένας συνεχής μονομορφισμός $\tau : 2^{\mathbb{N}} \rightarrowtail F$. Παίρνουμε $P = (\pi \circ \tau)[2^{\mathbb{N}}]$, έτσι που $P \subseteq \pi[F] = B$ και το P είναι η συνεχής ένα-προς-ένα εικόνα του συμπαγούς χώρου $2^{\mathbb{N}}$. Επομένως, το P είναι τοπολογικά ισομορφικό με τον $2^{\mathbb{N}}$. Το P είναι φυσικά τέλειο υποσύνολο του B.

Άσκηση 4.3.6. Θεωρούμε το σύνολο G όλων των σημείων $x \in \mathbb{R}$ στα οποία υπάρχει η παράγωγος της f στο $\mathbb{R}$. Τότε από την Άσκηση 3.3.16, το G είναι $\undertilde{\boldsymbol{\Pi}}^0_3$, ειδικότερα είναι Borel. Συνεχίζουμε όπως στη λύση της Άσκησης 4.3.5 με $B = G$.

Άσκηση 4.3.7. Εφόσον $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$, τότε κάθε σ-άλγεβρα που περιέχει τα $\mathcal{T}'$-ανοικτά περιέχει και τα $\mathcal{T}$-ανοικτά. Επομένως, αν συμβολίσουμε με $\mathcal{A}'$ και $\mathcal{A}$ τις οικογένειες όλων των σ-αλγεβρών που περιέχουν τα $\mathcal{T}'$-ανοικτά και $\mathcal{T}$-ανοικτά αντίστοιχα, έχουμε $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$. Άρα η τομή $\bigcap \mathcal{A}$ είναι υποσύνολο της τομής $\bigcap \mathcal{A}'$, δηλαδή

$$\mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{T}) = \bigcap \mathcal{A} \subseteq \bigcap \mathcal{A}' = \mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{T}).$$

Με άλλα λόγια, κάθε $\mathcal{T}$-Borel σύνολο είναι και $\mathcal{T}'$-Borel.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση θεωρούμε την ταυτοτική συνάρτηση id : $(\mathcal{X},\mathcal{T}') \to (\mathcal{X},\mathcal{T})$, η οποία είναι προφανώς ένα-προς-ένα και συνεχής επειδή

$\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$. Από το Θεώρημα 4.3.3 έχουμε ότι για κάθε $\mathcal{T}'$-Borel σύνολο $B \subseteq \mathcal{X}$ η εικόνα $\mathrm{id}[B] = B$ είναι $\mathcal{T}$-Borel.

Άσκηση 4.3.8. Θεωρούμε έναν μηδενοδιάστατο Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και ένα G_δ σύνολο $P \subseteq \mathcal{X}$. Το P με τη σχετική τοπολογία είναι επίσης μηδενοδιάστατος τοπολογικός χώρος. Για να το δούμε αυτό, θεωρούμε μια βάση $\mathcal{V}$ για τον $\mathcal{X}$ που αποτελείται από κλειστά-ανοικτά σύνολα. Για κάθε $V \in \mathcal{V}$ το σύνολο $V \cap P$ είναι κλειστό-ανοικτό υποσύνολο του P. Επιπλέον, αν το W είναι ανοικτό στον P, τότε υπάρχει ανοικτό U στον $\mathcal{X}$ με $W = U \cap P$ και για κάθε $x \in W$ υπάρχει $V \in \mathcal{V}$ με $x \in V \subseteq U$, άρα $x \in V \cap P \subseteq W$. Αυτό δείχνει ότι η οικογένεια $\mathcal{V}_P = \{V \cap P \mid V \in \mathcal{V}\}$ κλειστών-ανοικτών υποσυνόλων του P είναι βάση για τον P.

Εφόσον το P είναι G_δ από το Θεώρημα 2.1.8, το P είναι Πολωνικός χώρος. Επομένως, από το Θεώρημα 2.6.10 ο P είναι τοπολογικά ισομορφικός με ένα κλειστό $C \subseteq \mathcal{N}$. Ας συμβολίσουμε με g τον τοπολογικό ισομορφισμό από το C στο P. Πρέπει να επεκτείνουμε την g σε όλο τον $\mathcal{N}$. Από την Άσκηση 2.5.24 υπάρχει συνεχής $f : \mathcal{N} \to C$ με $f(\alpha) = \alpha$ για κάθε $\alpha \in C$. Προκύπτει ότι η $\pi : \mathcal{N} \to \mathcal{X} : \pi = g \circ f$ είναι συνεχής, ένα-προς-ένα στο C και ικανοποιεί $\pi[C] = g[C] = P$. Με άλλα λόγια, το P είναι η συνεχής ένα-προς-ένα εικόνα ενός κλειστού υποσυνόλου του $\mathcal{N}$. Μάλιστα, η αντίστροφη $\pi^{-1} : P \to C$ είναι η ίδια με την g^{-1} που είναι και αυτή συνεχής.

Άσκηση 4.4.12. Θεωρούμε το σύνολο P της Άσκησης 4.1.11,

$$\alpha \in P \iff \forall n((\alpha)_n, \alpha) \in G^n,$$

όπου το $G^n \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ είναι $\mathcal{N}$-καθολικό για την $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n(\mathcal{N})$. Όπως έχει δειχθεί στην πιο πάνω άσκηση, το P δεν ανήκει στην $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n(\mathcal{N})$ για κάθε $n \geqslant 1$.

Αν για κάθε $n \geqslant 1$ θέσουμε $P_n = \{\alpha \mid ((\alpha)_n, \alpha) \in G^n\}$, τότε το P_n είναι $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ υποσύνολο του $\mathcal{N}$ και $P = \bigcap_{n \geqslant 1} P_n$. Επομένως, το P είναι $\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_\omega$ υποσύνολο του $\mathcal{N}$.

Το συμπλήρωμα $Q = \mathcal{N} \setminus P$ είναι $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_\omega$ υποσύνολο του $\mathcal{N}$. Αν είχαμε $Q \in \utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n(\mathcal{N})$ για κάποιο $n \geqslant 1$, τότε θα είχαμε επίσης $Q \in \utilde{\mathbf{\Pi}}^0_{n+1}(\mathcal{N})$ και επομένως $P \in \utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+1}(\mathcal{N})$, που είναι άτοπο. Άρα το Q είναι $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_\omega$ υποσύνολο του $\mathcal{N}$ που δεν ανήκει στην $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n(\mathcal{N})$ για κάθε $n \geqslant 1$.

Κεφάλαιο 5

Άσκηση 5.1.7. Έχουμε για κάθε $y \in \mathcal{Y}$,

$$y \in f[A] \iff \exists x\ (x \in A \ \&\ (x, y) \in Graph(f)).$$

Από την Άσκηση 4.2.19 το γράφημα της f είναι Borel σύνολο και από το Πόρισμα 4.1.7 είναι και $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n$. Από τις ιδιότητες κλειστότητας της $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ έχουμε ότι το $f[A]$ είναι $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ σύνολο.

Άσκηση 5.1.8. Η ευθεία κατεύθυνση είναι άμεση από την Πρόταση 5.1.3 παίρνοντας $\mathcal{X} = \mathcal{N}$ ή πιο απλά από την Πρόταση 5.1.2 παίρνοντας $\mathcal{X} = F$, όπου το $F \subseteq \mathcal{Y} \times \mathcal{N}$ είναι μη κενό κλειστό με $A = \exists^{\mathcal{N}} F$ και f να είναι η συνάρτηση της προβολής $(y, \alpha) \mapsto y$.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση αν υπάρχει Πολωνικός χώρος $\mathcal{X}$ και συνεχής συνάρτηση $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ με $A = f[\mathcal{X}]$, τότε για κάθε $y \in \mathcal{Y}$ έχουμε

$$\begin{aligned} y \in A &\iff \exists\ x\ (x, y) \in Graph(f) \\ &\iff \exists \alpha\ (\pi(\alpha), y) \in Graph(f), \end{aligned}$$

όπου η $\pi : \mathcal{N} \twoheadrightarrow \mathcal{X}$ είναι συνεχής επιμορφισμός, ο οποίος υπάρχει από το Θεώρημα 2.3.7. Το γράφημα $Graph(f)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, επειδή η f είναι συνεχής. Από την κλειστότητα της κλάσης των κλειστών συνόλων ως προς συνεχή αντικατάσταση έχουμε ότι το A ανήκει στην κλάση $\exists^{\mathcal{N}} \utilde{\mathbf{\Pi}}^0_1 = \utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_1$.

Άσκηση 5.2.6. Άμεσο από το Πόρισμα 5.2.4 για $B = \mathcal{X}$.

Άσκηση 5.2.7. Θεωρούμε Πολωνικούς χώρους $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ και μια συνάρτηση $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$. Αν η f είναι Borel-μετρήσιμη, τότε είναι και $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_1$-μετρήσιμη καθώς κάθε Borel σύνολο είναι και $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_1$ σύνολο. Αν η f είναι $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_1$-μετρήσιμη, τότε από την Πρόταση 3.5.3 είναι και $\utilde{\mathbf{\Delta}}^1_1$-μετρήσιμη. Επομένως, η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}[U]$ κάθε ανοικτού $U \subseteq \mathcal{Y}$ είναι $\utilde{\mathbf{\Delta}}^1_1$ υποσύνολο του $\mathcal{X}$. Από το Θεώρημα του Suslin (Πόρισμα 5.2.2) το $f^{-1}[U]$ είναι Borel σύνολο και επομένως η f είναι Borel-μετρήσιμη.

Άσκηση 5.2.9. Υποθέτουμε προς άτοπο ότι υπάρχει ζεύγος αναλυτικών συνόλων (P_0^*, P_1^*) το οποίο ανάγει το ζεύγος (P_0, P_1).

Εφόσον τα P_0^*, P_1^* είναι αναλυτικά και ξένα από το Θεώρημα Διαχωρισμού του Lusin (Θεώρημα 5.2.1), υπάρχει ένα Borel σύνολο $B \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ με

$$P_0^* \subseteq B \quad \text{και} \quad P_1^* \cap B = \emptyset.$$

Ισχυριζόμαστε ότι ένα τέτοιο σύνολο B είναι $\mathcal{N}$-καθολικό για την $\mathcal{B}(\mathcal{N})$, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με το Λήμμα 3.6.6 για $\Gamma = \mathcal{B} =$ η κλάση των Borel συνόλων και $\mathcal{X} = \mathcal{N}$.

Για την απόδειξη του πιο πάνω ισχυρισμού αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε Borel $C \subseteq \mathcal{N}$ υπάρχει $\alpha \in \mathcal{N}$ με $C = B_\alpha$. Θεωρούμε λοιπόν ένα Borel $C \subseteq \mathcal{N}$.

Τότε τα σύνολα C και $\mathcal{N} \setminus C$ είναι αναλυτικά, επομένως από την καθολικότητα του G υπάρχουν α_0 και α_1 με

$$C = G_{\alpha_0} \quad \text{και} \quad \mathcal{N} \setminus C = G_{\alpha_1}.$$

Παίρνουμε επίσης ένα $\alpha \in \mathcal{N}$ με $(\alpha)_i = \alpha_i$, $i = 0, 1$.

Συμβολίζουμε με $(P_0)_\alpha$ την α-τομή του P_0 και όμοια για τα υπόλοιπα σύνολα με δείκτες. Από τον ορισμό των συνόλων P_0, P_1 έχουμε

$$C = G_{\alpha_0} = (P_0)_\alpha \quad \text{και} \quad \mathcal{N} \setminus C = G_{\alpha_1} = (P_1)_\alpha.$$

Από τις ιδιότητες του ζεύγους (P_0^*, P_1^*) έχουμε ότι $P_0^* \cup P_1^* = P_0 \cup P_1$, άρα

$$(P_0^*)_\alpha \cup (P_1^*)_\alpha = (P_0^* \cup P_1^*)_\alpha = (P_0 \cup P_1)_\alpha = (P_0)_\alpha \cup (P_1)_\alpha = C \cup (\mathcal{N} \setminus C) = \mathcal{N}.$$

Έχουμε λοιπόν ότι τα $(P_0^*)_\alpha$, $(P_1^*)_\alpha$ είναι ξένα και η ένωσή τους είναι ο χώρος $\mathcal{N}$. Επομένως, κάθε ένα από αυτά τα σύνολα είναι το συμπλήρωμα του άλλου.

Επειδή το B διαχωρίζει το P_0^* από το P_1^* είναι άμεσο ότι η τομή B_α διαχωρίζει το $(P_0^*)_\alpha$ από το $(P_1^*)_\alpha$. Από την άλλη, το μόνο σύνολο που διαχωρίζει ένα $A \subseteq \mathcal{N}$ από το $\mathcal{N} \setminus A$ είναι το ίδιο το A. Επομένως

$$B_\alpha = (P_0^*)_\alpha = C,$$

έχουμε δηλαδή το ζητούμενο.

Για τον δεύτερο ισχυρισμό αν έχουμε έναν υπεραριθμήσιμο Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$, τότε από το Πόρισμα 4.2.13 υπάρχει Borel-ισομορφισμός $f : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow \mathcal{X}$. Μεταφέρουμε το ζεύγος P_0, P_1 στον $\mathcal{X}$ –η εικόνα ενός αναλυτικού συνόλου μέσω ενός Borel-ισομορφισμό παραμένει αναλυτικό σύνολο.

Άσκηση 5.3.7. Αφού ο $\mathcal{X}$ είναι υπεραριθμήσιμος χώρος, από το Θεώρημα 3.6.7 υπάρχει $P \subseteq \mathcal{X}$ που είναι $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_1$ αλλά όχι $\utilde{\mathbf{\Pi}}^1_1$ υποσύνολο του $\mathcal{X}$. Θεωρούμε ένα κλειστό $F \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ με $P = \exists^{\mathcal{N}} F$. Από το Λήμμα 2.5.14 υπάρχει ένα κλειστό $T \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, έτσι ώστε για κάθε $x \in \mathcal{X}$ το σύνολο $T(x) = \{u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \mid (x, u) \in T\}$ να είναι δένδρο και $F_x = [T(x)]$.

Θεωρούμε ένα σύνολο $R \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, έτσι ώστε για κάθε $x \in \mathcal{X}$ το $R(x) = \{u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \mid (x, u) \in R\}$ να είναι δένδρο με $[R(x)] = [T(x)]$ και αν $[T(x)] \neq \varnothing$ τότε το $R(x)$ να είναι κλαδεμένο.

Παρατηρούμε τότε ότι για κάθε $x \in \mathcal{X}$,

$$[T(x)] \neq \varnothing \iff \text{το } R(x) \text{ είναι κλαδεμένο},$$

καθώς κάθε κλαδεμένο δένδρο έχει μη κενό σώμα και $[R(x)] = [T(x)]$.

Επομένως, για κάθε $x \in \mathcal{X}$ έχουμε

$$\begin{aligned} x \in P &\iff \exists \alpha \; (x, \alpha) \in F \\ &\iff \exists \alpha \; \alpha \in [T(x)] \\ &\iff \text{το } R(x) \text{ είναι κλαδεμένο} \\ &\iff \forall u \; [\; u \in R(x) \;\longrightarrow\; \exists v \; (\; u \subsetneq v \;\&\; v \in R(x) \;) \;] \\ &\iff \forall u \; [\; (x, u) \in R \;\longrightarrow\; \exists v \; (\; u \subsetneq v \;\&\; (x, v) \in R \;) \;]. \end{aligned}$$

Αν το R ήταν Borel σύνολο, τότε από την τελευταία ισοδυναμία θα είχαμε ότι το P είναι επίσης Borel που είναι άτοπο.

Για το τελευταίο συμπέρασμα παίρνουμε το $R \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με

$$(x, u) \in R \iff \exists \alpha \; (\; u \sqsubseteq \alpha \;\&\; \alpha \in [T(x)] \;) \;\vee\; u = \Lambda.$$

Τότε για κάθε x το $R(x)$ είναι δένδρο με $[R(x)] = [T(x)]$ και επιπλέον αν $[T(x)] \neq \varnothing$, τότε το $R(x)$ είναι κλαδεμένο. Επομένως, από το πιο πάνω συμπέρασμα το R δεν είναι Borel.

Άσκηση 5.4.11. Δείχνουμε με επαγωγή στο n ότι $\alpha_L | n \leqslant_{\text{lex}} (u(0), \ldots, u(n-1))$.

Άσκηση 5.4.14. Αν $x \preceq y$ με χρήση της μεταβατικότητας της $\preceq$ έχουμε

$$\{z \in P \mid z \prec x\} \subseteq \{z \in P \mid z \prec y\}, \quad \text{άρα} \quad \{\rho(z) + 1 \mid z \prec x\} \subseteq \{\rho(z) + 1 \mid z \prec y\}$$

και επομένως

$$\rho(x) = \sup\{\rho(z) + 1 \mid z \prec x\} \leqslant \sup\{\rho(z) + 1 \mid z \prec y\} = \rho(y).$$

Άσκηση 5.4.15. Αρχικά δείχνουμε με χρήση της Αρχής Επαγωγής για θεμελιωμένες σχέσεις (Θεώρημα 5.4.4) ότι για κάθε $x \in P$ ο $\rho(x)$ (και επομένως και ο $\rho(x) + 1$) είναι αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός. Για να το δούμε αυτό, θεωρούμε $x \in P$ και υποθέτουμε ότι για κάθε $y \prec x$ ο διατακτικός αριθμός $\rho(y)$ (και επομένως και ο $\rho(y) + 1$) είναι αριθμήσιμος. Έχουμε

$$\rho(x) = \sup\{\rho(y) + 1 \mid y \prec x\}$$

και επειδή το σύνολο P είναι αριθμήσιμο, καταλήγουμε ότι ο $\rho(x)$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα ενός αριθμήσιμου συνόλου αριθμήσιμων διατακτικών. Επομένως, ο $\rho(x)$ είναι αριθμήσιμος.

Από το Θεώρημα 5.4.4 έχουμε ότι ο $\rho(x)$ είναι αριθμήσιμος για κάθε $x \in P$. Τέλος για το μήκος $| \preceq |$ της $\preceq$ έχουμε όπως πριν,

$$| \preceq | = \sup\{\rho(x) + 1 \mid x \in P\}$$

άρα και ο $| \preceq |$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα ενός αριθμήσιμου συνόλου αριθμήσιμων διατακτικών, και άρα είναι αριθμήσιμος.

Άσκηση 5.4.17. Δείχνουμε το ζητούμενο με βάση την Αρχή Επαγωγής για θεμελιωμένες σχέσεις (Θεώρημα 5.4.4) εφαρμοσμένη στη σχέση $\leqslant_{\mathrm{KB}}$ περιορισμένη στο T. Θεωρούμε $u \in T$ και υποθέτουμε ότι για κάθε $v \in T$ με $v <_{\mathrm{KB}} u$ ισχύει $\rho(v) \leqslant \rho_{\mathrm{KB}}(v)$ (Επαγωγική Υπόθεση). Δείχνουμε ότι $\rho(u) \leqslant \rho_{\mathrm{KB}}(u)$.

Αν $v <_T u$, τότε $u \sqsubseteq v$ και $v \neq u$, επομένως $v <_{\mathrm{KB}} u$. Άρα

$$\{\rho(v) + 1 \mid v <_T u\} \subseteq \{\rho(v) + 1 \mid v <_{\mathrm{KB}} u\},$$

επομένως

$$\begin{aligned} \rho(u) &= \sup\{\rho(v) + 1 \mid v <_T u\} \\ &\leqslant \sup\{\rho(v) + 1 \mid v <_{\mathrm{KB}} u\} \\ &\leqslant \sup\{\rho_{\mathrm{KB}}(v) + 1 \mid v <_{\mathrm{KB}} u\} \qquad \text{(Επαγωγική Υπόθεση)} \\ &= \rho_{\mathrm{KB}}(u). \end{aligned}$$

Άσκηση 5.5.6. Θεωρούμε μια U-καλή ημικλίμακα $\overline{\varphi} = (\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο P και υποθέτουμε ότι για μια ακολουθία $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ στοιχείων του P έχουμε ότι: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η $(\varphi_n(x_i))_{i \in \mathbb{N}}$ είναι τελικά σταθερή και $x_i \to x$, για κάποιο $x \in P$. Από την ιδιότητα της καλής ημικλίμακας υπάρχει $x' \in P$ με $x_i \to x'$ και από τη μοναδικότητα του ορίου έχουμε $x = x' \in P$.

Άσκηση 5.5.7. Αν η $\preceq$ είναι διάταξη στο $\mathbb{R}$, τότε

$$x \prec y \iff x \prec y \ \& \ x \neq y, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

απ' όπου είναι άμεσο ότι αν η $\preceq$ είναι αναλυτικό σύνολο, τότε και το αυστηρό της μέρος $\prec$ είναι αναλυτικό σύνολο.

Επιπλέον, αν η $\preceq$ είναι γραμμική διάταξη στο $\mathbb{R}$, τότε

$$x \prec y \iff \neg(y \preceq x), \qquad x, y \in \mathbb{R},$$

απ' όπου προκύπτει ότι αν η $\preceq$ είναι συναναλυτικό σύνολο, τότε το αυστηρό της μέρος $\prec$ είναι το συμπλήρωμα ενός συναναλυτικού συνόλου, δηλαδή είναι ένα αναλυτικό σύνολο.

Στη συνέχεια υποθέτουμε προς άτοπο ότι υπάρχει μια καλή διάταξη $\preceq$ στο $\mathbb{R}$, η οποία είναι αναλυτικό ή συναναλυτικό σύνολο. Προκύπτει από τα πιο πάνω ότι το αυστηρό της μέρος $\prec$ είναι αναλυτικό σύνολο. Επειδή η $\preceq$ είναι θεμελιωμένη σχέση, προκύπτει από το Θεώρημα Kunen-Martin (Θεώρημα 5.5.5) ότι το μήκος $|\preceq|$ της $\preceq$ είναι αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός.

Συμβολίζουμε με ρ τη συνάρτηση κατάταξης της $\preceq$. Ισχυριζόμαστε ότι η ρ είναι ένα-προς-ένα. Πράγματι, αν έχουμε $x, y \in \mathbb{R}$ με $x \neq y$, επειδή η $\preceq$ είναι γραμμική, έχουμε $x \prec y$ ή $y \prec x$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $x \prec y$. Τότε $\rho(x) + 1 \in \{\rho(z) + 1 \mid z \prec y\}$ και άρα

$$\rho(x) < \rho(x) + 1 \leqslant \sup\{\rho(z) + 1 \mid z \prec y\} = \rho(y),$$

ειδικότερα έχουμε $\rho(x) \neq \rho(y)$. Άρα η ρ είναι ένα-προς-ένα.

Επειδή $|\preceq| = \sup\{\rho(x) + 1 \mid x \in \mathbb{R}\}$ είναι σαφές ότι η ρ παίρνει τιμές στον διατακτικό αριθμό $|\preceq|$, έχουμε δηλαδή $\rho : \mathbb{R} \to |\preceq|$.

Συνεπώς, έχουμε μια ένα-προς-ένα συνάρτηση $\rho : \mathbb{R} \rightarrowtail |\preceq|$ και το σύνολο $\preceq$ είναι αριθμήσιμο. Επομένως, το $\mathbb{R}$ είναι αριθμήσιμο σύνολο, που είναι άτοπο.

Άσκηση 5.6.4. Αρχικά υποθέτουμε ότι το A περιέχεται σε κάποιο Borel C με $\mu(C) < \infty$. Τότε το σύνολο

$$M = \{a \in \mathbb{R} \mid \exists\ Q \in \mathcal{B}(\mathcal{X})\ (A \subseteq Q \ \& \ \mu(Q) = a)\}$$

είναι μη κενό. Επομένως υπάρχει ακολουθία $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ από Borel υποσύνολα του $\mathcal{X}$ με $\mu(Q_n) \to \inf M$, $A \subseteq Q_n$ και $\mu(Q_n) < \infty$ για κάθε n. Παίρνουμε

$B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Q_n$. Είναι σαφές ότι το B είναι Borel υποσύνολο του $\mathcal{X}$ που περιέχει το A. Επειδή $\mu(B) \leqslant \mu(Q_0) < \infty$, έχουμε από τις ιδιότητες του μέτρου ότι

$$\mu(B) = \lim_{n\to\infty} \mu(Q_n) = \inf M.$$

Για κάθε Borel $D \subseteq B \setminus A$ ισχύει $A \subseteq B \setminus D$, καθώς και $\mu(B \setminus D) \leqslant \mu(B) < \infty$, άρα $\mu(B \setminus D) = \mu(B) - \mu(D)$ και $B \setminus D \in M$. Συμπεραίνουμε ότι

$$\inf M \leqslant \mu(B \setminus D) = \mu(B) - \mu(D) = \inf M - \mu(D)$$

και επομένως $\mu(D) = 0$. Αυτό δείχνει το ζητούμενο στην περίπτωση όπου υπάρχει ένα Borel σύνολο C με $A \subseteq C$ και $\mu(C) < \infty$.

Στη γενική περίπτωση θεωρούμε μια ακολουθία $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από Borel υποσύνολα του $\mathcal{X}$ με $\mathcal{X} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ και $\mu(C_n) < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα C_n, $n \in \mathbb{N}$, είναι ξένα ανά δύο, αλλιώς μπορούμε να τα αντικαταστήσουμε από τα σύνολα $C'_n = C_n \setminus \bigcup_{k<n} C_k$.

Εφαρμόζουμε αυτό που αποδείξαμε πιο πάνω στα σύνολα $A_n = A \cap C_n$, και βρίσκουμε Borel σύνολα B_n με $A_n \subseteq B_n$ και για κάθε Borel $D_n \subseteq B_n \setminus A_n$ να ισχύει $\mu(D_n) = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Θέτουμε

$$B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (B_n \cap C_n).$$

Επειδή τα C_n, $n \in \mathbb{N}$, είναι ξένα ανά δύο, έχουμε $B \cap C_n = B_n \cap C_n$ για κάθε n. Επιπλέον, το B είναι Borel και περιέχει το σύνολο $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \cap C_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A \cap C_n) = A$. Αν έχουμε ένα Borel $D \subseteq B \setminus A$, θέτουμε $D_n = D \cap C_n$ για κάθε n και έχουμε ότι

$$D_n \subseteq (B \setminus A) \cap C_n = (B \cap C_n) \setminus A = B_n \setminus A,$$

επομένως $\mu(D_n) = 0$. Άρα

$$\mu(D) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(D_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k\leqslant n} \mu(D_k) = 0.$$

Αυτό δείχνει το ζητούμενο.

Κεφάλαιο 6

Άσκηση 6.2.8. Για την κατεύθυνση (i) $\Longrightarrow$ (ii) θεωρούμε έναν $\mathcal{Y}$, όπως στον ορισμό του καλού καθολικού συστήματος. Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι ο $\mathcal{N} \times \mathcal{Y}$ είναι τοπολογικά ισομορφικός με τον $\mathcal{N}$. Θεωρούμε λοιπόν έναν τοπολογικό ισομορφισμό $h : \mathcal{N} \times \mathcal{Y} \rightarrowtail\!\!\!\rightarrow \mathcal{N}$.

Παίρνουμε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και ορίζουμε το σύνολο $P \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{X}$ ως εξής:

$$(\alpha, x) \in P \iff (h^{-1}(\alpha), x) \in G^{\mathcal{Y}\times\mathcal{X}}.$$

Τότε το P ανήκει στη Γ λόγω της κλειστότητας της τελευταίας ως προς συνεχή αντικατάσταση. Αφού το $G^{\mathcal{X}}$ είναι καλό καθολικό για τη $\Gamma(\mathcal{X})$, υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ έτσι ώστε $P_\alpha = G^{\mathcal{X}}_{f(\alpha)}$ για κάθε $\alpha \in \mathcal{N}$. Επομένως

$$(\varepsilon, y, x) \in G^{\mathcal{Y}\times\mathcal{X}} \iff (h(\varepsilon, y), x) \in P \iff (f(h(\varepsilon, y)), x) \in G^{\mathcal{X}}$$

για κάθε ε, y, x. Επομένως παίρνουμε τη συνεχή συνάρτηση $S = f \circ h : \mathcal{N} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{N}$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Θεωρούμε ένα $P \subseteq \mathcal{N} \times$ που ανήκει στη Γ. Αφού το $G^{\mathcal{N}\times\mathcal{X}}$ είναι $\mathcal{N}$-καθολικό για την οικογένεια $\Gamma(\mathcal{N} \times \mathcal{X})$, υπάρχει $\varepsilon_0 \in \mathcal{N}$ έτσι ώστε $P = G^{\mathcal{N}\times\mathcal{X}}_{\varepsilon_0}$.

Από την υπόθεσή μας υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $S : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$, έτσι ώστε

$$(\varepsilon, \alpha, x) \in G^{\mathcal{Y}\times\mathcal{X}} \iff (S(\varepsilon, \alpha), x) \in G^{\mathcal{N}\times\mathcal{X}}$$

για κάθε ε, α, x. Τότε παίρνουμε $f(\alpha) = S(\varepsilon_0, \alpha)$.

Άσκηση 6.3.2. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 6.3.1 για $P_0 = P$, $P_1 = Q$ και $P_n = \varnothing$ για κάθε $n \geqslant 2$.

Άσκηση 6.3.3. Θεωρούμε ένα ζεύγος (P_0^*, P_1^*) συναναλυτικών συνόλων που ανάγει το (P_0, P_1) και υποθέτουμε προς άτοπο ότι υπάρχει ένα Borel σύνολο B το οποίο διαχωρίζει το P_0^* από το P_1^*. Δείχνουμε ότι το B είναι $\mathcal{N}$-καθολικό για την $\mathcal{B}(\mathcal{N})$. Το τελευταίο έρχεται σε αντίθεση με το Λήμμα 3.6.6 παίρνοντας για Γ να είναι η κλάση όλων των Borel συνόλων και για $\mathcal{X}$ να είναι $\mathcal{N}$.

Για να δείξουμε ότι το B είναι $\mathcal{N}$-καθολικό για την $\mathcal{B}(\mathcal{N})$, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε Borel σύνολο $C \subseteq \mathcal{N}$ υπάρχει $\alpha \in \mathcal{N}$, έτσι ώστε $C = B_\alpha$. Θεωρούμε λοιπόν ένα Borel $C \subseteq \mathcal{N}$. Συμβολίζουμε με $(P_0)_\alpha$ την α-τομή του P_0 για κάθε $\alpha \in \mathcal{N}$ και όμοια για τα υπόλοιπα σύνολα με δείκτες.

Είναι άμεσο ότι για κάθε $\alpha \in \mathcal{N}$ η τομή B_α διαχωρίζει το $(P_0^*)_\alpha$ από το $(P_1^*)_\alpha$. Επιπλέον το ζεύγος $((P_0^*)_\alpha, (P_1^*)_\alpha)$ ανάγει το $((P_0)_\alpha, (P_1)_\alpha)$.

Τα σύνολα C και $\mathcal{N} \setminus C$ είναι συναναλυτικά. Επομένως υπάρχουν α_0 και α_1, έτσι ώστε $C = G_{\alpha_0}$ και $C = G_{\alpha_1}$. Επιλέγουμε ένα $\alpha \in \mathcal{N}$, έτσι ώστε $(\alpha)_i = \alpha_i$, $i = 0, 1$. Τότε

$$C = G_{\alpha_0} = (P_0)_\alpha \quad \text{και} \quad \mathcal{N} \setminus C = (P_1)_\alpha.$$

Ειδικότερα τα $(P_0)_\alpha$ και $(P_0)_\alpha$ είναι ξένα σύνολα. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι αν το ζεύγος (A^*, B^*) ανάγει το (A, B) και $A \cap B = \varnothing$, τότε $A = A^*$ και $B = B^*$. Καταλήγουμε λοιπόν ότι $(P_0^*)_\alpha = (P_0)_\alpha$ και $(P_1^*)_\alpha = (P_1)_\alpha$. Καταλήγουμε στο ότι $(P_1^*)_\alpha = \mathcal{N} \setminus (P_0^*)_\alpha$.

Το μοναδικό σύνολο που διαχωρίζει ένα σύνολο A από το συμπλήρωμά του είναι το ίδιο το α. Εφόσον λοιπόν το B_α διαχωρίζει το $(P_0^*)_\alpha$ από το $(P_1^*)_\alpha$ και τα δύο τελευταία σύνολα είναι συμπληρωματικά συμπεραίνουμε ότι

$$B_\alpha = (P_0^*)_\alpha = (P_0)_\alpha = C$$

και έχουμε το ζητούμενο.

Για τον δεύτερο ισχυρισμό, αν ο $\mathcal{X}$ είναι υπεραριθμήσιμος Πολωνικός χώρος, από το Πόρισμα 4.2.13 υπάρχει Borel-ισομορφισμός $f : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow \mathcal{X}$. Θεωρούμε τα συναναλυτικά σύνολα P_0, P_1 της εκφώνησης. Από την Άσκηση 6.3.2 υπάρχει ένα ζεύγος (P_0^*, P_1^*) συναναλυτικών συνόλων που ανάγει το (P_0, P_1). Τότε τα σύνολα $f[P_0^*]$, $f[P_1^*]$ είναι ξένα συναναλυτικά και δεν υπάρχει Borel σύνολο που να διαχωρίζει το $f[P_0^*]$ από $f[P_1^*]$. Αλλιώς, θα υπήρχε Borel σύνολο που να διαχωρίζει το P_0^* από P_1^*, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με τα προηγούμενα.

Άσκηση 6.3.4. Από την Άσκηση 6.3.3 υπάρχουν δύο ξένα συναναλυτικά σύνολα $P, Q \subseteq \mathcal{X}$, για τα οποία δεν υπάρχει Borel σύνολο B που να διαχωρίζει το P από το Q. Θεωρούμε τα αναλυτικά σύνολα $A = \mathcal{X} \setminus P$ και $B = \mathcal{X} \setminus Q$, καθώς και κλειστά σύνολα $F_A, F_B \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$, έτσι ώστε $A = \exists^{\mathcal{N}} F_A$ και $B = \exists^{\mathcal{N}} F_B$. Ορίζουμε το σύνολο $F \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ ως εξής:

$$(x, \beta) \in F \iff (\beta(0) = 0 \ \& \ (x, \beta^*) \in F_A) \ \vee \ (\beta(0) = 1 \ \& \ (x, \beta^*) \in F_B),$$

όπου $(x, \beta) \in \mathcal{X} \times \mathcal{N}$.

Προφανώς, το F είναι κλειστό σύνολο. Για κάθε $x \in \mathcal{X}$, αν $x \in P$, τότε $x \notin Q$, επομένως $x \in B$ και άρα υπάρχει γ με $(x, \gamma) \in F_B$, ισοδύναμα $(x, (1) * \gamma) \in F$. Αν $x \notin P$, τότε $x \in A$ και άρα υπάρχει γ με $(x, \gamma) \in F_A$, ισοδύναμα $(x, (0) * \gamma) \in F$. Επομένως, για κάθε $x \in \mathcal{X}$ υπάρχει β με $(x, \beta) \in F$.

Υποθέτουμε προς άτοπο ότι υπάρχει Borel ενοποίηση F^* του F. Αν $x \in P$ και β_x είναι το μοναδικό στοιχείο του $\mathcal{N}$ με $(x, \beta_x) \in F^*$, επειδή $F^* \subseteq F$, έχουμε από τον ορισμό του τελευταίου ότι $\beta_x(0) = 1$. (Σε διαφορετική περίπτωση θα είχαμε $\beta_x(0) = 0$ και $x \in \exists^{\mathcal{N}} F_A = A = \mathcal{X} \setminus P$.) Επομένως, αν θέσουμε

$$B = \{x \in \mathcal{X} \mid \exists \beta\ ((x, \beta) \in F^* \ \&\ \beta(0) = 1)\}$$

έχουμε ότι $P \subseteq B$.

Παρατηρούμε ότι το B ικανοποιεί επίσης

$$\begin{aligned} x \in B &\iff \forall \beta\ ((x, \beta) \in F^* \ \longrightarrow\ \beta(0) = 1) \\ &\iff \forall \beta\ ((x, \beta) \notin F^* \ \vee\ \beta(0) = 1), \end{aligned}$$

όπου πιο πάνω χρησιμοποιήσαμε ξανά ότι $\exists^{\mathcal{N}} F^* = \exists^{\mathcal{N}} F = \mathcal{X}$. Το B είναι αναλυτικό σύνολο από τον ορισμό του και από την τελευταία ισοδυναμία βλέπουμε ότι το B είναι και συναναλυτικό σύνολο. Επομένως, από το Θεώρημα του Suslin (Πόρισμα 5.2.2) το B είναι Borel.

Τέλος έχουμε ότι για κάθε $x \in Q$ για το μοναδικό β_x με $(x, \beta_x) \in F^* \subseteq F$ θα ισχύει $\beta_x(0) = 0$ (αλλιώς θα είχαμε $\beta_x(0) = 1$ και $x \in \exists^{\mathcal{N}} F_B = B = \mathcal{X} \setminus Q$), άρα $x \notin B$. Επομένως, $B \cap Q = \emptyset$.

Καταλήγουμε λοιπόν σε ένα Borel σύνολο B, το οποίο διαχωρίζει το P από το Q, που είναι άτοπο. Επομένως, το σύνολο F δεν έχει Borel ενοποίηση.

Άσκηση 6.3.5. Θεωρούμε ένα κλειστό σύνολο $F \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ για το οποίο ισχύει ότι για κάθε $x \in \mathcal{X}$ υπάρχει $\beta \in \mathcal{N}$ με $(x, \beta) \in F$, αλλά το F δεν έχει Borel ενοποίηση – ένα τέτοιο F υπάρχει από την Άσκηση 6.3.4.

Από το Βασικό Λήμμα Αναπαράστασης κλειστών συνόλων (Λήμμα 2.5.14) υπάρχει ένα κλειστό σύνολο $T \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, έτσι ώστε για κάθε x το σύνολο $T(x) = \{u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \mid (x, u) \in T\}$ να είναι δένδρο και $F_x = [T(x)]$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f : \mathcal{X} \to \mathcal{N} : f(x) = \text{το αριστερότερο άπειρο κλαδί του } T(x)$$

καθώς και το σύνολο

$$F^* = Graph(f) \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}.$$

Προφανώς ισχύει $F^* \subseteq F$ και για κάθε $x \in \mathcal{X}$ υπάρχει β με $(x, \beta) \in F^*$ – συγκεκριμένα το $\beta = f(x)$. Επομένως $\exists^{\mathcal{N}} F^* = \mathcal{X} = \exists^{\mathcal{N}} F$. Επιπλέον είναι σαφές ότι για κάθε $(x, \beta), (x, \beta') \in F^*$ ισχύει $\beta = f(x) = \beta'$. Επομένως, το F^* είναι ενοποίηση του F.

Αν η f ήταν Borel-μετρήσιμη, τότε και το γράφημά της θα ήταν Borel (Πόρισμα 5.2.3), δηλαδή το σύνολο F^* θα ήταν Borel, και επομένως το F θα είχε μια Borel ενοποίηση, πράγμα που είναι άτοπο.

Άσκηση 6.4.10. Ορίζουμε το $Q \subseteq \mathcal{Y} \times \mathcal{X}$ με

$$(y, x) \in Q \iff x \in B \ \&\ y = f(x),$$

έτσι που $\exists^{\mathcal{X}} Q = f[B]$.

Το Q είναι Borel σύνολο, επιπλέον είναι σαφές ότι $Q_y = f^{-1}[\{y\}] \cap B = (f|B)^{-1}[\{y\}]$ για κάθε $y \in \mathcal{Y}$. Επομένως, κάθε τομή Q_y είναι αριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathcal{X}$. Από το Θεώρημα 6.4.6 η προβολή $\exists^{\mathcal{X}} Q = f[B]$ είναι Borel σύνολο και το Q έχει μια Borel ενοποίηση $Q^* \subseteq Q$.

Σταθεροποιούμε ένα $x_0 \in \mathcal{X}$ και ορίζουμε τη συνάρτηση $g : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ ως εξής:

$$g(y) = \begin{cases} \text{το μοναδικό } x \in B \text{ με } (y, x) \in Q^*, & \text{αν } y \in \exists^{\mathcal{X}} Q = f[B], \\ x_0, & \text{αν } y \notin f[B]. \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι η g επιλέγει για κάθε $y \in f[B]$ ένα από τα $x \in B$, για το οποίο ισχύει $y = f(x)$. Για κάθε $y = f(x) \in f[B]$, όπου $x \in B$, έχουμε $g(y) =$ το μοναδικό x' με $(y, x') \in Q^*$. Ειδικότερα έχουμε $(y, g(y)) \in Q^* \subseteq Q$, επομένως $g(y) \in B$ και $y = f(g(y))$. (Δεν μπορούμε όμως να συμπεράνουμε ότι $g(f(x)) = x$, γιατί $g(f(x)) = g(y) = x'$ και δεν έχουμε απαραίτητα ότι $x' = x$.)

Τέλος το γράφημα $Graph(g)$ είναι Borel σύνολο γιατί

$$(y, x) \in Graph(g) \iff (y \in f[B] \ \& \ (y, x) \in Q^*) \ \vee \ (y \notin f[B] \ \& \ x = x_0)$$

και επομένως από το Πόρισμα 5.2.3 η g είναι Borel-μετρήσιμη συνάρτηση.

Άσκηση 6.4.11. Θεωρούμε μια Borel-μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ και ένα Borel σύνολο $B \subseteq \mathcal{X}$ για το οποίο ο περιορισμός $f|B$ είναι ένα-προς-ένα.

(i) Όπως στην επίλυση της Άσκησης 6.4.10 ορίζουμε το $Q \subseteq \mathcal{Y} \times \mathcal{X}$ ως εξής:

$$(y, x) \in Q \iff x \in B \ \& \ y = f(x).$$

Τότε το Q είναι Borel σύνολο και για κάθε $y \in \mathcal{Y}$ η τομή Q_y είναι είτε κενή (όταν $y \notin f[B]$) είτε είναι ακριβώς μονοσύνολο (όταν $y = f[B]$). Το τελευταίο συμβαίνει γιατί η f είναι ένα-προς-ένα στο B. Σε κάθε περίπτωση, η τομή Q_y είναι αριθμήσιμο σύνολο για κάθε $y \in \mathcal{Y}$. Από το Θεώρημα 6.4.6 η προβολή $\exists^{\mathcal{X}} Q$ είναι Borel σύνολο.

Σχόλιο. Όπως στην επίλυση της Άσκησης 6.4.10 μπορούμε επίσης να αποδείξουμε το ισχυρότερο συμπέρασμα του Πορίσματος 5.2.4 ότι υπάρχει Borel-μετρήσιμη $g : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$, η οποία επεκτείνει την $(f|B)^{-1} : f[B] \to \mathcal{X}$. Για να δούμε το τελευταίο θεωρούμε μια Borel ενοποίηση $Q^* \subseteq Q$ και ορίζουμε $g(y)$ να είναι το μοναδικό $x \in B$ με $(y, x) \in Q^*$, αν $y = f[B]$. Αν $y \in \mathcal{Y} \setminus f[B]$, ορίζουμε $g(y) = x_0$ για ένα σταθερό $x_0 \in \mathcal{X}$. Τότε για κάθε $y \in f[B]$ ισχύει $g(y) =$ το μοναδικό $x \in B$ με $y = f(x)$, δηλαδή η g επεκτείνει την $(f|B)^{-1}$. Τέλος το γράφημα $Graph(g)$ της g είναι εύκολα Borel σύνολο.

(ii) Από το Λήμμα 4.2.9 υπάρχει ένας συνεχής επιμορφισμός $\pi : \mathcal{N} \twoheadrightarrow \mathcal{X}$ και ένα G_δ σύνολο $P \subseteq \mathcal{N}$, έτσι ώστε ο περιορισμός $\pi|P$ να είναι ένα-προς-ένα και $\pi[P] = \mathcal{X}$.

Ορίζουμε το σύνολο $Q \subseteq \mathcal{Y} \times \mathcal{N}$ ως εξής:

$$(y, \alpha) \in Q \iff \alpha \in P \cap \pi^{-1}[B] \ \& \ f(\pi(\alpha)) = y.$$

Δηλαδή το Q είναι το (αντιμετατεθειμένο) γράφημα της συνάρτησης $f \circ (\pi|P)$ περιορισμένο στο σύνολο $\pi^{-1}[B] \times \mathcal{Y}$. Το Q είναι εύκολα Borel σύνολο. Επιπλέον για κάθε $y \in \mathcal{Y}$ έχουμε

$$\begin{aligned} y \in f[B] &\iff \exists x \in B \ y = f(x) \\ &\iff \exists \alpha \in P \ (\pi(\alpha) \in B \ \& \ y = f(\pi(\alpha))) && \text{(επειδή } \pi[P] = \mathcal{X}\text{)} \\ &\iff \exists \alpha \in P \cap \pi^{-1}[B] \ y = f(\pi(\alpha)) \\ &\iff y \in \exists^{\mathcal{N}} Q. \end{aligned}$$

Άρα $f[B] = \exists^{\mathcal{N}} Q$.

Ορίζουμε επίσης το σύνολο $H \subseteq \mathcal{Y} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ως εξής:

$$(y, n, m) \in H \iff \forall \beta \ ((y, \beta) \in Q \longrightarrow \beta(n) = m).$$

Είναι σαφές ότι το H είναι συναναλυτικό σύνολο. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Ενοποίησης του Kreisel (Θεώρημα 6.3.1) και βρίσκουμε ένα συναναλυτικό σύνολο $H^* \subseteq H$ που είναι ενοποίηση του H ως προς την τελευταία μεταβλητή. Επαληθεύουμε τη συνθήκη (6.2) του Θεωρήματος 6.4.2 για το Q και για $H_i^* = H^*$, $i \in \mathbb{N}$.

Θεωρούμε $y \in \mathcal{Y}$ και πως υπάρχει $\alpha \in \mathcal{N}$ με $(y, \alpha) \in Q$, δηλαδή $y = f(\pi(\alpha))$ και $\alpha \in P \cap \pi^{-1}[B]$. Αρκεί να δείξουμε ότι $(y, n, \alpha(n)) \in H^*$ για κάθε n. Σταθεροποιούμε ένα $n \in \mathbb{N}$. Τότε για κάθε β με $(y, \beta) \in Q$ έχουμε $\beta \in P \cap \pi^{-1}[B]$ και

$$y = f(\pi(\beta)) = f(\pi(\alpha)).$$

Αφού $\pi(\alpha), \pi(\beta) \in B$, και η f είναι ένα-προς-ένα στο B έχουμε ότι $\pi(\alpha) = \pi(\beta)$, και αφού η π είναι ένα-προς-ένα στο P έχουμε επίσης ότι $\alpha = \beta$. Επομένως ισχύει $\beta(n) = \alpha(n)$. Αυτό δείχνει ότι $(y, n, \alpha(n)) \in H$. Αν $(y, n, m') \in H$ εφαρμόζοντας τον ορισμό για $\beta = \alpha$, έχουμε $\beta(n) = \alpha(n) = m'$. Άρα το $\alpha(n)$ είναι ο μοναδικός φυσικός m με $(x, n, m) \in H$. Προκύπτει ότι $(x, n, \alpha(n)) \in H^*$ και έχουμε αποδείξει την (6.2).

Από το Θεώρημα 6.4.2 το σύνολο $\exists^{\mathcal{N}} Q = f[B]$ είναι Borel.

Κεφάλαιο 7

Άσκηση 7.1.15. Άμεσο από την Άσκηση 7.1.14. Παρατηρούμε ότι για κάθε Borel $A \subseteq X^{\mathbb{N}}$ το A_T σύμφωνα με τον συμβολισμό της τελευταίας είναι επίσης Borel υποσύνολο του $X^{\mathbb{N}}$.

Άσκηση 7.2.4. Αν το A είναι είναι ένα υπεραριθμήσιμο αναλυτικό υποσύνολο ενός Πολωνικού χώρου $\mathcal{X}$ και το F είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathcal{N}$ με $A = \exists^{\mathcal{N}} F$ θεωρούμε το ξεδιπλωμένο *-παίγνιο $G^*_{un}(F)$ και –όπως στην απόδειξη του Πορίσματος 7.2.3– το δένδρο των κανόνων T, όπως επίσης και το σύνολο απόδοσης A^F του παιγνίου $G^*_{un}(F)$. Τότε $A^F = g^{-1}[F]$ για μια συνεχή συνάρτηση g και επομένως το A^F είναι κλειστό.

Από το Θεώρημα 7.1.11 το παίγνιο με κανόνες $G_{\mathbb{N}}(T, A^F)$ είναι προσδιοριστό, δηλαδή το $G^*_{un}(F)$ είναι προσδιοριστό. Αν η Παίκτρια II είχε νικητήρια στρατηγική, τότε από το Θεώρημα 7.2.2 το σύνολο $\exists^{\mathcal{N}} F = A$ θα ήταν αριθμήσιμο, πράγμα που είναι άτοπο. Επομένως, ο Παίκτης I έχει νικητήρια στρατηγική στο $G^*_{un}(F)$, και άρα από το Θεώρημα 7.2.2 υπάρχει συνεχής μονομορφισμός $f : 2^{\mathbb{N}} \rightarrowtail \mathcal{X}$ με $f[2^{\mathbb{N}}] \subseteq \exists^{\mathcal{N}} F = A$.

Κεφάλαιο 8

Άσκηση 8.1.14. Υπάρχει ένα κλειστό $C \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{X} \times \mathcal{N}$, έτσι ώστε $R = \exists^{\mathcal{N}} C$. Ορίζουμε το $F \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ ως εξής:

$$F = \{(x, y, \alpha) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X} \times \mathcal{N} \mid (x, y, \alpha) \in C \ \vee \ (y, x, \alpha) \in C\}.$$

Είναι τότε σαφές πως το F είναι κλειστό σύνολο και πως για κάθε α έχουμε

$$\begin{aligned}(x, y) \in F^\alpha &\iff (x, y, \alpha) \in C \ \vee \ (y, x, \alpha) \in C \\ &\iff (y, x, \alpha) \in C \ \vee \ (x, y, \alpha) \in C \\ &\iff (y, x) \in F^\alpha.\end{aligned}$$

Άρα το F^α είναι συμμετρικό σύνολο. Τέλος δείχνουμε ότι $R = \exists^{\mathcal{N}} F$. Προφανώς $C \subseteq F$ άρα $R = \exists^{\mathcal{N}} C \subseteq \exists^{\mathcal{N}} F$. Αντίστροφα, αν $(x, y) \in \exists^{\mathcal{N}}$ και πάρουμε $\alpha \in \mathcal{N}$ με $(x, y, \alpha) \in F$ υπάρχουν δύο περιπτώσεις: (α) $(x, y, \alpha) \in C$ οπότε $(x, y) \in \exists^{\mathcal{N}} C = R$, (β) $(y, x, \alpha) \in C$ οπότε $(y, x) \in \exists^{\mathcal{N}} C = R$ και αφού η R είναι συμμετρική σχέση έχουμε επίσης ότι $(x, y) \in R$. Αυτό δείχνει ότι $\exists^{\mathcal{N}} F \subseteq R$.

Άσκηση 8.1.15. Αν έχουμε μια ακολουθία $(\varphi_i, \psi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ στο $\mathsf{Hom}^{\mathsf{u}}(H, G)$, η οποία συγκλίνει σε κάποιο $(\varphi, \psi) \in \mathcal{X}^{2^n} \times \mathcal{N}^{2^{2n}}$, τότε για κάθε $(u, v) \in H$ και για κάθε $r > 0$ έχουμε από τη συνέχεια των προβολών ότι υπάρχει κάποιο i_0, έτσι ώστε για κάθε $i \geqslant i_0$ να ισχύει

$$d(\varphi_i(u), \varphi(u)) < r, \quad d(\varphi_i(v), \varphi(v)) < r, \quad d(\psi_i(u,v), \psi(u,v)) < r,$$

όπου d είναι μια κατάλληλη μετρική στον $\mathcal{X}$. Επομένως $\varphi_i(u) \to \varphi(u)$, $\varphi_i(v) \to \varphi(v)$ και $\psi_i(u,v) \to \psi(u,v)$. Επειδή $(\varphi_i(u), \varphi_i(v), \psi_i(u,v)) \in F$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$ και το F είναι κλειστό καταλήγουμε ότι $(\varphi(u), \varphi(v), \psi(u,v)) \in F$. Επομένως, για κάθε $(u,v) \in H$ έχουμε $(\varphi(u), \varphi(v), \psi(u,v)) \in F$, δηλαδή $(\varphi, \psi) \in \mathsf{Hom}^{\mathsf{u}}(H, G)$ και το τελευταίο σύνολο είναι κλειστό.

Σχετικά με τον ισχυρισμό για το $\mathcal{H} +_u \mathcal{H}$ θεωρούμε αρχικά τις συναρτήσεις

$$F_i : \mathsf{Hom}^{\mathsf{u}}(H +_u H, G) \to \mathsf{Hom}^{\mathsf{u}}(H, G) : F(\varphi, \psi) = (\varphi^i, \psi^i), \quad i = 0, 1,$$

όπου οι (φ^i, ψ^i), $i = 0, 1$, είναι όπως στον Ορισμό 8.1.7. Οι F_0, F_1 είναι εύκολα συνεχείς συναρτήσεις και από τον ορισμό του $\mathcal{H} +_u \mathcal{H}$ έχουμε

$$\mathcal{H} +_u \mathcal{H} = F_0^{-1}[\mathcal{H}] \cap F_1^{-1}[\mathcal{H}],$$

Αν το $\mathcal{H}$ είναι Borel, τότε και τα $F_i^{-1}[\mathcal{H}]$, $i = 0, 1$ είναι Borel σύνολα, επομένως και το $\mathcal{H} +_u \mathcal{H}$ είναι Borel.

Άσκηση 8.1.17. Η ιδέα είναι να ορίσουμε

$$\begin{aligned}
&u_1 = \Lambda, \\
&u_2 = (0), \ u_3 = (1) * (0), \\
&u_4 = (0,0) * (0), \ u_5 = (0,1) * (0,0), \ u_6 = (1,0) * (0)^3, \ u_7 = (1,1) * (0)^4, \\
&u_8 = (0,0,0) * (0)^4 \ldots .
\end{aligned}$$

Με άλλα λόγια, κάθε φορά διατρέχουμε όλες τις πεπερασμένες ακολουθίες μήκους n και έπειτα παραθέτουμε σε αυτές τόσες φορές το 0, όσες χρειάζεται για να επιτύχουμε το ζητούμενο μήκος.

Για τον αυστηρό ορισμό θεωρούμε ένα $n \in \mathbb{N}$ και μια απαρίθμηση $\{v_0^n, \ldots, v_{2^n-1}^n\}$ όλων των στοιχείων του $\{0,1\}^n$. Τότε για κάθε $i \in J_n$ έχουμε $i = 2^n + k$ για κάποιο $k < 2^n$. Ορίζουμε

$$u_i = u_{2^n+k} = v_k^n * (0)^{2^n+k-n-1}$$

για κάθε $i = 2^n + k \in J_n$.

Παραδείγματα. Όταν $n = 0$, ισχύει $J_0 = \{1\}$. Επειδή $1 = 2^0 + 0$, έχουμε $k = 0$ και $\{v_0^n, \ldots, v_{2^n-1}^n\} = \{v_0^0\} = \{\Lambda\}$. Άρα σε αυτή την περίπτωση ισχύει $2^n + k - n - 1 = 1 + 0 - 0 - 1 = 0$ και $u_1 = \Lambda * (0)^0 = \Lambda * \Lambda = \Lambda$.

Όταν $n = 1$ ισχύει $J_1 = \{2, 3\}$ οπότε $k = 0, 1$. Επίσης έχουμε $\{v_0^n, \ldots, v_{2^n-1}^n\} = \{v_0^1, v_1^1\} = \{(0), (1)\}$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $v_0^1 = (0)$ και $v_1^1 = (1)$.

Αν $k = 0$, έχουμε $2^n + k - n - 1 = 2 + 0 - 1 - 1 = 0$, οπότε $v_0^1 * (0)^{2^n+k-n-1} = (0) * (0)^0 = (0)$. Αν $k = 1$ έχουμε $2^n + k - n - 1 = 2 + 1 - 1 - 1 = 1$, άρα $v_1^1 * (0)^{2^n+k-n-1} = (1) * (0)^1 = (1) * (0)$. Σε όλες τις υπόλοιπες περιπτώσεις έχουμε $2^n + k - n - 1 \geqslant 2^n - n - 1 > 0$.

Επανερχόμενοι στην επίλυση της άσκησης, είναι σαφές από τον ορισμό ότι

$$|u_i| = |u_{2^n+k}| = |v_k^n| + 2^n + k - n - 1 = n + 2^n + k - n - 1 = 2^n + k - 1 = i - 1.$$

Επιπλέον για κάθε $v \in \{0,1\}^n$ έχουμε $v = v_k^n$ για κάποιο $k < 2^n$, οπότε $v = v_k^n \sqsubseteq v_k^n * (0)^{2^n+k-n-1} = u_{2^n+k} = u_i$ όπου $i = 2^n + k \in J_n$. Έχουμε εξασφαλίσει λοιπόν τις ιδιότητες α) και β).

Σχετικά με το σύνολο $S = \{u_i \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}} \mid i \in \mathbb{N}\}$, είναι σαφές ότι τα σύνολα J_n, $n \in \mathbb{N}$, αποτελούν διαμέριση του συνόλου όλων των θετικών φυσικών αριθμών. Οπότε τα μήκη $|u_i| = i - 1$, $i \in J_n$, $n \in \mathbb{N}$, διατρέχουν όλους τους φυσικούς αριθμούς (δηλαδή μαζί με το 0). Άρα το S είναι πλήρους μήκους.

Επιπλέον από την ιδιότητα β) το S είναι πυκνό. Τέλος, για κάθε $i \neq j$ έχουμε $|u_i| \neq |u_j|$ και επομένως, όταν διατρέχουμε το S δεν υπάρχει μήκος που να εμφανίζεται πάνω από μία φορά. Αυτό δείχνει ότι το S είναι αραιό.

Άσκηση 8.1.18. Δείχνουμε το ζητούμενο με επαγωγή στο μήκος n της πεπερασμένης ακολουθίας $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ που υλοποιεί ότι $\alpha \sim_S \beta$. Συγκεκριμένα δείχνουμε με επαγωγή στο $n \geqslant 1$ ότι για κάθε $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in 2^{\mathbb{N}}$ με $(\alpha_i, \alpha_{i+1}) \in \mathcal{G}_S(2^{\mathbb{N}})$ για κάθε $i \leqslant n-1$, ισχύει ότι το σύνολο $I(\alpha_0, \alpha_n) = \{i \in \mathbb{N} \mid \alpha_0(i) \neq \alpha_n(i)\}$ είναι πεπερασμένο.

Αν $n = 1$, τότε $(\alpha_0, \alpha_1) \in \mathcal{G}_S(2^{\mathbb{N}})$ οπότε υπάρχουν $u \in S$, $i \in \{0, 1\}$, και $\gamma \in 2^{\mathbb{N}}$ έτσι ώστε $\alpha_0 = u*(i)*\gamma$ και $\alpha_1 = u*(1-i)*\gamma$. Είναι τότε σαφές πως το σύνολο $I(\alpha_0, \alpha_1)$ είναι πεπερασμένο. Συγκεκριμένα ισχύει $I(\alpha_0, \alpha_1) \subseteq \{k \in \mathbb{N} \mid k \leqslant |u|\}$.

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \geqslant 1$ ισχύει το εξής: για κάθε $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in 2^{\mathbb{N}}$ με $(\alpha_i, \alpha_{i+1}) \in \mathcal{G}_S(2^{\mathbb{N}})$ για κάθε $i \leqslant n-1$ το σύνολο $I(\alpha_0, \alpha_n)$ είναι πεπερασμένο. Δείχνουμε το ίδιο για το $n+1$, θεωρούμε λοιπόν $\alpha_0, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ για τα οποία ισχύει $(\alpha_i, \alpha_{i+1}) \in \mathcal{G}_S(2^{\mathbb{N}})$ για κάθε $i \leqslant n$. Από την Επαγωγική Υπόθεση υπάρχει $i_0 \in \mathbb{N}$, έτσι ώστε για κάθε $i \geqslant i_0$ να ισχύει $\alpha_0(i) = \alpha_n(i)$. Επιπλέον, αφού $(\alpha_n, \alpha_{n+1}) \in \mathcal{G}_S(2^{\mathbb{N}})$, υπάρχει i_1 έτσι ώστε για κάθε $i \geqslant i_1$ να ισχύει $\alpha_n(i) = \alpha_{n+1}(i)$. Είναι τότε σαφές πως $\alpha_0(i) = \alpha_{n+1}(i)$ για κάθε $i \geqslant \max\{i_0, i_1\}$ και έχουμε το ζητούμενο.

Σχόλιο. Το τελευταίο επιχείρημα αναδιατυπώνεται με τη χρήση των πιο πάνω συνόλων $I(\alpha, \beta)$ ως εξής: $I(\alpha_0, \alpha_{n+1}) \subseteq I(\alpha_0, \alpha_n) \cup I(\alpha_n, \alpha_{n+1})$.

Άσκηση 8.1.19. Δείχνουμε το ζητούμενο με επαγωγή στο κοινό μήκος $|u| = |v|$. Για $|u| = |v| = 0$ έχουμε ότι $u * \alpha = \alpha = v * \alpha$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ ισχύει το εξής: για κάθε $u, v \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ με $|u| = |v| = n$ και *για κάθε* $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$ έχουμε ότι $u * \alpha \sim_S v * \alpha$. Δείχνουμε το ίδιο με το $n+1$ στη θέση του n.

Θεωρούμε λοιπόν $u, v \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ με $|u| = |v| = n+1$ και $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$. Γράφουμε $u = u' * (i)$ και $v = v' * (j)$ όπου $u', v' \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ με $|u'| = |v'| = n$ και $i, j \in \{0, 1\}$. Αφού το S είναι πλήρους μήκους, υπάρχει $w \in S$ με $|w| = n$.

Εφαρμόζουμε την Επαγωγική Υπόθεση στα $u', w \in S$ και $(i) * \alpha$:

$$u * \alpha = u' * (i) * \alpha \sim_S w * (i) * \alpha.$$

Εφαρμόζουμε επίσης την Επαγωγική Υπόθεση στα $v', w \in S$ και $(j) * \alpha$:

$$w * (j) * \alpha \sim_S v' * (j) * \alpha = v * \alpha.$$

Αν $i = j$, τότε $w * (i) * \alpha = w * (j) * \alpha$ και άρα από τη μεταβατικότητα της $\sim_S$ έχουμε $u * \alpha \sim_S v * \alpha$. Αν $i \neq j$, τότε $j = 1 - i$ και αφού $w \in S$ έχουμε από τον ορισμό ότι $(w * (i) * \alpha, w * (j) * \alpha) \in \mathcal{G}_S$. Επομένως $w * (i) * \alpha \sim_S w * (j) * \alpha$. Πάλι από τη μεταβατικότητα της $\sim_S$ προκύπτει ότι $u * \alpha \sim_S v * \alpha$.

Για τον επόμενο ισχυρισμό θεωρούμε ένα $\beta, \gamma \in 2^{\mathbb{N}}$. Τότε για κάθε $i \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\beta|i*(\gamma(i), \gamma(i+1), \gamma(i+2), \dots) = \beta|i*(\gamma(i))*(\gamma(i+1), \gamma(i+2), \dots) \sim_S \beta|(i+1)*(\gamma(i+1), \gamma(i+2), \dots)$$

όπου στην τελευταία σχέση εφαρμόσαμε τον πιο πάνω ισχυρισμό στα $u = \beta|i * (i)$, $v = \beta|(i+1)$ (που έχουν ίσο μήκος i) και $\alpha = (\gamma(i+1), \gamma(i+2), \dots)$. Θέτουμε

$$\beta_i = \beta|i * (\gamma(i), \gamma(i+1), \gamma(i+2), \dots), \ i \in \mathbb{N}.$$

έτσι που σύμφωνα με τα προηγούμενα ισχύει $\beta_i \sim_S \beta_{i+1}$, $i \in \mathbb{N}$. Τέλος είναι σαφές ότι $\beta_i \to \beta$ και πως $\beta_0 = \Lambda * (\gamma(0), \gamma(1), \gamma(2), \dots) = \gamma$.

Άσκηση 8.1.20. Τα στοιχεία του $\mathcal{G}_S(2^n) +_u \mathcal{G}_S(2^n)$ είναι είτε της μορφής

$$(v * (k) * w * (i), v * (1-k) * w * (i)) = (v * (k) * w', v * (1-k) * w') \in \mathcal{G}_S(2^{n+1})$$

όπου $k, i \in \{0,1\}$, $v \in S$, και $w \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ με $|v| + |w| + 2 = n+1$, είτε της μορφής

$$(u * (i), u * (1-i)) \in \mathcal{G}_S(2^{n+1}) \quad (u \in S).$$

Αντίστροφα τα στοιχεία του $\mathcal{G}_S(2^{n+1})$ είναι της μορφής

$$(v * (k) * w', v * (1-k) * w')$$

όπου $k \in \{0,1\}$, $v \in S$ και $w' \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ με $|v| + |w'| + 1 = n+1$. Αν το w' είναι η κενή ακολουθία, τότε το πιο πάνω είναι ίσο με

$$(v * (k), v * (1-k))$$

όπου $|v| = n$. Από την υπόθεσή μας το u είναι το μοναδικό στοιχείο του S μήκους n άρα $v = u$, και επομένως το πιο πάνω στοιχείο είναι το $(u * (k), u * (1-k)) \in \mathcal{G}_S(2^n) +_u \mathcal{G}_S(2^n)$. Αν $w' = w * (i)$ όπου $i \in \{0,1\}$ και $w \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ τότε

$$(v * (k) * w', v * (1-k) * w') = (v * (k) * w * (i), v * (1-k) * w * (i)),$$

το οποίο ανήκει στο $\mathcal{G}_S(2^n) +_u \mathcal{G}_S(2^n)$ γιατί $v \in S$ και $|v| + |w| + 1 = |v| + |w'| = n$ οπότε $(v * (k) * w, v * (1-k) * w) \in \mathcal{G}_S(2^n)$.

Άσκηση 8.1.21. Το (i) είναι προφανές από τον ορισμό του A_G. Για το (ii) αν υπάρχει $x \in A \cap A_G$, τότε υπάρχει και $y \in A$ με $(x, y) \in G$, επομένως το A δεν είναι G-ανεξάρτητο. Συνεπώς, αν το A είναι G-ανεξάρτητο, τότε $A \cap A_G = \emptyset$.

Για την ευθεία κατεύθυνση του (iii) θεωρούμε $x \in A \cap C_G$, τότε υπάρχει $y \in C$ με $(x, y) \in G$. Από τη συμμετρικότητα του G ισχύει επίσης $(y, x) \in G$ και αφού $x \in A$ καταλήγουμε ότι $y \in A_G$. Επομένως, $y \in A_G \cap C$ και το τελευταίο σύνολο είναι μη κενό. Η αντίστροφη κατεύθυνση του (iii) είναι άμεση από την ευθεία του κατεύθυνση εναλλάσσοντας τα σύνολα A, C.

Για το τελευταίο συμπέρασμα θεωρούμε ότι το G είναι αναλυτικό γράφημα στο $\mathcal{X}$ και ότι το A είναι αναλυτικό G-ανεξάρτητο υποσύνολο του $\mathcal{X}$. Από τα πιο πάνω, τα A, A_G είναι αναλυτικά ξένα υποσύνολα του $\mathcal{X}$. Επομένως, από το Θεώρημα Διαχωρισμού του Lusin (Θεώρημα 5.2.1) υπάρχει ένα Borel σύνολο C με $A \subseteq C$ και $C \cap A_G = \emptyset$.

Από το (iii) έχουμε ότι $C_G \cap A = \emptyset$. Αφού το C είναι Borel και επομένως αναλυτικό σύνολο, από το (i) έχουμε ότι το C_G είναι επίσης αναλυτικό. Πάλι από το Θεώρημα Διαχωρισμού του Lusin (Θεώρημα 5.2.1) υπάρχει ένα Borel σύνολο D με $A \subseteq D$ και $D \cap C_G = \emptyset$.

Παίρνουμε $B = C \cap D$, τότε το B είναι Borel σύνολο και $A \subseteq B$. Δείχνουμε ότι το B είναι G-ανεξάρτητο. Ας υποθέσουμε προς άτοπο ότι υπάρχουν $x, y \in B$ με $(x, y) \in G$. Ειδικότερα $y \in D$ και άρα $x \in D_G$, επιπλέον $x \in C$. Άρα $C \cap D_G \neq \emptyset$ και από το (iii) έχουμε επίσης $C_G \cap D \neq \emptyset$, άτοπο. Άρα το B είναι G-ανεξάρτητο.

Βιβλιογραφία

[1] Louveau A. *Effective Descriptive Set Theory*. 1990. Unpublished, widely circulated manuscript.

[2] Anton Bernshteyn. The $\mathbb{G}_0$-dichotomy. https://abernshteyn3.math.gatech.edu/resources/KST.pdf.

[3] David Blackwell. A Borel set not containing a graph. *Ann. Math. Statist.*, 39:1345–1347, 1968.

[4] David Gale and F. M. Stewart. Infinite games with perfect information. In *Contributions to the theory of games, vol. 2*, volume no. 28 of *Annals of Mathematics Studies*, pages pp 245–266. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1953.

[5] J. Harrison. *Some applications of recursive pseudo-well orderings*. PhD thesis, Stanford University, 1967.

[6] Felix Hausdorff. Über halbstetige Funktionen und deren Verallgemeinerung. *Math. Z.*, 5(3-4):292–309, 1919.

[7] A. S. Kechris, S. Solecki, and S. Todorcevic. Borel chromatic numbers. *Adv. Math.*, 141(1):1–44, 1999.

[8] Alexander S. Kechris. *Classical Descriptive Set Theory*, volume 156 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 1995.

[9] S. C. Kleene. Recursive predicates and quantifiers. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 53:41–73, 1943.

[10] S.C. Kleene. Quantification of number-theoretic functions. *Compositio Math.*, 14:23–40, 1959.

[11] G. Kreisel. The axiom of choice and the class of hyperarithmetic functions. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 65 = Indag. Math.*, 24:307–319, 1962.

[12] K. Kuratowski. *Topology. Vol. I.* Academic Press, New York-London; Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warsaw, 1966. New edition, revised and augmented, Translated from the French by J. Jaworowski.

[13] K. Kuratowski. *Topology. Vol. I.* Academic Press, New York-London; Państwowe Wydawnictwo Naukowe [Polish Scientific Publishers], Warsaw, new edition, 1966. Translated from the French by J. Jaworowski.

[14] H. Lebesgue. Sur les fonctions represéntables analytiquement. *Journal de Mathématiques* 6^{e} *serie*, 1:139–216, 1905.

[15] N. Lusin. Sur la classification de M. Baire. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, 164:91–94, 1917.

[16] N. Lusin. Les proprietes des ensembles projectifs. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, 180:1817–1819, 1925.

[17] N. Lusin. Sur les ensembles non measurables B et l'emploi de la diagonale de Cantor. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, 181:95–96, 1925.

[18] N. Lusin. Sur les ensembles projectifs de M. Henri Lebesgue. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, 180:1572–1574, 1925.

[19] N. Lusin. Sur un probléme de M. Emile Borel et les ensembles projectifs de M. Henri Lebesgue: les ensembles analytiques. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, 180:1318–1320, 1925.

[20] N. Lusin. Sur les ensembles analytiques. *Fundamenta Methematicae*, 10:1–95, 1927.

[21] N. Lusin. Sur le probléme de M.J. Hadamard d'uniformisation des ensembles. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, 190:349–351, 1930.

[22] N. Lusin and W. Sierpinski. Sur quelques proprietés des ensembles (A). *Bull. Int. Acad. Sci. Cracovie Série A: Sciences Mathematiques*, pages 35–48, 1918.

[23] N. Lusin and W. Sierpinski. Sur un ensemble non measurable B. *Journal de Mathématiques 9 e serie*, 2:53–72, 1923.

[24] Nicolas Lusin. *Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications*. Chelsea Publishing Co., New York, 1972. Avec une note de W. Sierpiński, Preface de Henri Lebesgue, Réimpression de l'edition de 1930.

[25] Richard Mansfield. Perfect subsets of definable sets of real numbers. *Pacific J. Math.*, 35:451–457, 1970.

[26] Donald A. Martin. Projective sets and cardinal numbers, 1971. Unpublished, widely circulated manuscript.

[27] Donald A. Martin. Borel determinacy. *Ann. of Math. (2)*, 102(2):363–371, 1975.

[28] Donald A. Martin. A purely inductive proof of Borel determinacy. In *Recursion theory (Ithaca, N.Y., 1982)*, volume 42 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 303–308. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1985.

[29] Donald A. Martin and John R. Steel. A proof of projective determinacy. *J. Amer. Math. Soc.*, 2(1):71–125, 1989.

[30] Benjamin D. Miller. Forceless, ineffective, powerless proofs of descriptive dichotomy theorems. https://glimmeffros.github.io/unpublished/pariszero.pdf, 2009.

[31] Benjamin D. Miller. The graph-theoretic approach to descriptive set theory. *Bull. Symbolic Logic*, 18(4):554–575, 2012.

[32] Yiannis Moschovakis. *Notes on set theory*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, second edition, 2006.

[33] Y.N. Moschovakis. *Descriptive set theory, Second edition*, volume 155 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, 2009.

[34] Y.N. Moschovakis. *Descriptive set theory, Second edition*, volume 155 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, 2009.

[35] A. Mostowski. On definable sets of positive integers. *Fund. Math.*, 34:81–112, 1947.

[36] P. Novikoff. Sur les fonctions implicites measurables B. *Fundamenta Mathematicae*, 17:8–25, 1931.

[37] Walter Rudin. *Principles of mathematical analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York-Auckland-Düsseldorf, third edition, 1976.

[38] W. Sierpinski. Sur une classe d'ensembles. *Fundamenta Methematicae*, 7:237–243, 1925.

[39] W. Sierpinski. Sur les produits des images continue des ensembles C(A). *Fundamenta Mathematicae*, 11:123–126, 1928.

[40] W. Sierpiński. *Les ensembles projectifs et analytiques*, volume no. 112. Gauthier-Villars, Paris, 1950.

[41] S. M. Srivastava. *A course on Borel sets*, volume 180 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1998.