Περιγραφική Θεωρία Συνόλων

→ Μελέτη υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ και γενικότερα συνόλων σε Πλήρεις και διαχωρίσιμους μετρικούς χώρους.

→ <u>Κίνητρο</u>: 1) Μελέτη συναρτήσεων με βάση τον «γενικό» ορισμό του Riemann.

2) Ύπαρξη συνόλων με ιδιότητες που θεωρήθηκαν «περίεργες».

Παράδοξο Banach–Tarski

Λέμε ότι μια συνάρτηση $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ <u>διατηρεί τον όγκο</u> αν για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^3$, που έχει όγκο, το $T(A)$ είναι σύνολο που έχει όγκο και ισχύει

$V(A) = V(T(A))$ $\quad T[A]$

$V(\cdot) =$ ο όγκος του συνόλου

<u>Θεώρημα</u> (Banach-Tarski):

Θεωρούμε τη μοναδιαία μπάλα B του $\mathbb{R}^3$. Τότε υπάρχει μια διαμέριση $A_1, \dots, A_n$, του B και μετασχηματισμοί $T_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $i=1,\dots,n$ που διατηρούν τον όγκο έτσι ώστε τα $T_1(A_1), \dots, T_n(A_n)$ να αποτελούν τη διαμέριση δύο μπαλών, η κάθε μία από τις οποίες έχει όγκο όσο και η B.

<u>Παράδοξο</u>: Μοιάζει να διπλασιάσαμε τον όγκο της B με μετασχηματισμούς που διατηρούν τον όγκο.

<u>Εξήγηση:</u> Τα A_i, $i=1,\dots,n$ δεν έχουν όγκο!

$$
\begin{aligned}
V(B) &= V(A_1 \cup \dots \cup A_n) \\
&= V(A_1) + \dots + V(A_n) \\
&= V(T_1(A_1)) + \dots + V(T_n(A_n)) \\
&= V(B) + V(B) \\
&= 2V(B) \qquad \text{Άτοπο.}
\end{aligned}
$$

Η περιγραφική θεωρία συνόλων ασχολείται με την ταξινόμηση και τις ιδιότητες των συνόλων (και κατ' επέκταση των συναρτήσεων) που ορίζονται με «φυσιολογικό» τρόπο.

Ιστορικά στοιχεία

1900–1910 : Lebesgue, Baire, Borel
(1905)

Αρχική θεμελίωση
Borel σύνολα

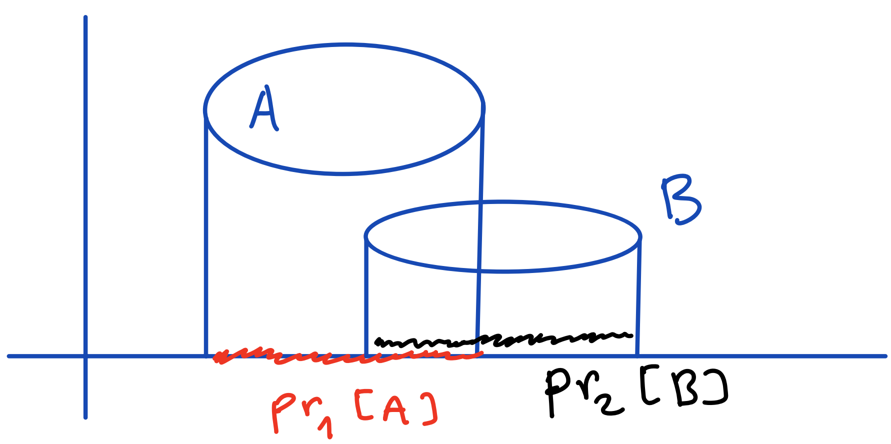
Λανθασμένος ισχυρισμός Lebesgue:

«Οι συνεχείς εικόνες Borel συνόλων είναι Borel σύνολα.»

Το λάθος στην απόδειξη:

«Αν $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ τότε

$$pr_1[A \cap B] = pr_1[A] \cap pr_2[B]»$$



$$pr_1[A] \cap pr_1[B] \neq \emptyset$$

$$pr_1[A \cap B] = pr_1[\emptyset] = \emptyset$$

1910 – 1940: Suslin, Lusin, Sierpinski

Αναλυτικά σύνολα
(συνεχείς εικόνες Borel)
και πιο σύνθετα σύνολα.

1940 – 1960 Ανάπτυξη μεθόδων
από τη Θεωρία Αναδρομής
(Recursion Theory
ή αλλιώς Computability Theory)

→ Αναλογίες με τη θεωρία
που αναπτύχθηκε από τους
Lebesgue, Suslin, Lusin, κ.τ.λ.

Turing, Kleene, Church, Post,
Mostowski

Μελέτη υποσυνόλων του $\mathbb{N}$

0 1 0 1 0 1 ... → $\{1, 3, 5, \ldots\}$

0 1 2 3 4 5

τα οποία « υπολογίζονται ».

Η πρώτη συστηματική μελέτη αυτών των αναλογιών έγινε με τον Addison (μαθητή του Kleene)

Με τη μελέτη μεταγενέστερων μαθητών του Kleene, όπως ο Μοσχοβάκης, έγινε μια ενοποίηση σε μία θεωρία, η οποία είναι γνωστή ως

effective descriptive set theory
(κατασκευαστική περιγραφική θεωρία συνόλων)

Άλλοι ερευνητές: Louveau, Becker κτλ.

⇝ μέχρι τη δεκαετία του 70.

Παρ' όλ' αυτά η effective dst δεν έλυσε τα ανοικτά προβλήματα που απασχολούσαν τους Lusin, Sierpinski και τους λοιπούς ερευνητές της περιοχής.

<u>Ένα βασικό πρόβλημα:</u>

Με τη βοήθεια των αναλυτικών συνόλων ορίζονται πιο σύνθετα σύνολα (προβολικά σύνολα).

Έχει κάθε προβολικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$ όγκο;

Αποδείχτηκε ότι το πιο πάνω πρόβλημα είναι ανεξάρτητο από τα Αξιώματα των Μαθηματικών.

Για να αποδειχτεί αυτό, καθοριστική ήταν η συμβολή της Θεωρίας Παιγνίων.

1960 – 1980 Ανάπτυξη της Θεωρίας παιγνίων στην περιγραφική θεωρία συνόλων.

Martin, Solovay, Κεχρής κ.α.

1990 – Σήμερα Εφαρμογές όλων των προηγουμένων σε άλλες περιοχές των Μαθηματικών

Κεχρής και άλλοι

2005 – Σήμερα Εφαρμογές της Θεωρίας Γραφημάτων στην ΠΘΣ.

Ben Miller, Andrew Marks

Εισαγωγή: Review των βασικών εννοιών

$$\forall x \in A \quad P(x) \stackrel{\text{λογικά ισοδύναμη}}{\equiv} \forall x \, (x \in A \to P(x))$$

$$Q(x) \to P(x) \equiv \neg Q(x) \vee P(x)$$

Οπότε η πρόταση

$\forall x \in A \; P(x)$ είναι λογικά ισοδύναμη

με την:

$$\forall x \, (x \notin A \text{ ή } P(x))$$

Αν θέσουμε $A = \emptyset$, τότε:

$$\forall x \in \emptyset \; P(x) \equiv \forall x \, (\underbrace{\underbrace{x \notin \emptyset}_{\text{αληθής}} \text{ ή } P(x)}_{\text{αληθής}})$$

Π.χ. Η πρόταση

$$\forall x \in \emptyset \ (x \neq x)$$

είναι αληθής.

$$\forall x \ (x \notin \emptyset \text{ ή } x \neq x)$$

Το να πούμε ότι η f είναι συνάρτηση από το $\emptyset$ στο $\mathbb{R}$ είναι το ίδιο με το να πούμε

μοναδικό

$$\underbrace{\forall x \in \emptyset \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad f(x) = y}_{\text{αληθές}}$$

Αυτή η f είναι μόνο ένα αντικείμενο, το κενό σύνολο, και τη λέμε κενή συνάρτηση.

Μπορούμε επίσης να δούμε την κενή συνάρτηση σαν συνάρτηση

$f: \emptyset \to \emptyset$ γιατί:

$$\underbrace{\forall x \in \emptyset \;\; \exists y \in \emptyset \;\; f(x) = y}_{\text{ισχύει πάντα}}$$

$$\forall x \in \emptyset \;\; P(x)$$

$f: X \to Y$

ένα-προς-ένα:

$$\forall x_1, x_2 \in X \;\; \big(f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2 \big)$$

Για $X = \emptyset$:

$$\forall x_1, x_2 \in \emptyset \;\; (\ldots\ldots)$$

Η $f: \emptyset \to \emptyset$ είναι ένα-προς-ένα και επί:

$\forall y \in \emptyset \ \exists x \in \emptyset \quad f(x) = y$

αληθές.

Αριθμήσιμα και υπεραριθμήσιμα σύνολα

Δίνονται δύο σύνολα A και B.

A, B: ισοπληθικά αν

υπάρχει $f: A \rightarrowtail\!\!\!\rightarrow B$ ένα-προς-ένα

και επί.

Για $A = B = \emptyset$ έχουμε ότι η κενή

συνάρτηση $f: \emptyset \to \emptyset$ είναι ένα-προς-ένα

και επί, άρα το $\emptyset$ είναι ισοπληθικό

με το $\emptyset$.

Cantor

Συμβολισμός: $A =_c B$

σημαίνει ότι τα A, B είναι ισοπληθικά.

Ιδιότητες:

$$A \overset{f(x)=x}{=_c} A$$

$$\underbrace{A =_c B}_{f} \Rightarrow \underbrace{B =_c A}_{f^{-1}}$$

$$(\underbrace{A =_c B}_{f} \text{ και } \underbrace{B =_c C}_{g}) \rightarrow \underbrace{A =_c C}_{g \circ f}$$

Θα λέμε ότι το A έχει πληθάριθμο μικρότερο ή ίσο από το B, συμβολικά $A \leq_c B$, αν υπάρχει $f: A \rightarrow B$ που είναι ένα-προς-ένα.

Η κενή συνάρτηση $f: \emptyset \rightarrow B$ είναι ένα-προς-ένα, άρα $\emptyset \leq_c B$.

Ιδιότητες: $A \leq_c A$

$$(\underbrace{A \leq_c B}_{f} \text{ και } \underbrace{B \leq_c C}_{g}) \rightarrow \underbrace{A \leq_c C}_{g \circ f}.$$

Θεώρημα: (Schröder-Bernstein)

Αν $A \leq_c B$ και $B \leq_c A$ τότε $A =_c B$.

Ένα σύνολο A λέγεται πεπερασμένο αν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε

$$A =_c \{ i \in \mathbb{N} \mid i < n \}$$

Π.χ. $A = \{a\}$ $A =_c \{ i \mid i < 1 \}$

(για $n = 0$ έχουμε $A = \emptyset$)

Το A λέγεται αριθμήσιμο αν είναι πεπερασμένο ή $A =_c \mathbb{N}$.

Το A λέγεται <u>υπεραριθμήσιμο</u> αν δεν είναι αριθμήσιμο.

Τα εξής είναι ισοδύναμα:

1) A: αριθμήσιμο

2) $A \leq_c \mathbb{N}$

3) $A = \emptyset$ ή υπάρχει $\pi : \mathbb{N} \longrightarrow A$ που είναι επί.

$$A = \{\pi(0), \pi(1), \ldots, \pi(n), \ldots\}$$
$$= \{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$$

Βασικά αποτελέσματα:

1) Αν A_n: αριθμήσιμο, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$: αριθμήσιμο.

2) Αν $A_1, \dots, A_n$: αριθμήσιμα τότε

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n : \text{αριθμήσιμο}$$

3) Αν το B είναι αριθμήσιμο και $A \leq_c B$ τότε και το A είναι αριθμήσιμο.

Συνέπειες:

- Το $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-1)\cdot\mathbb{N}$ είναι αριθμήσιμο σύνολο.

- Το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο σύνολο.

$$\mathbb{Q} \leq_c \underbrace{\mathbb{Z}}_{\text{αριθμ.}} \times \underbrace{\mathbb{N}}_{\text{αριθμ.}}$$

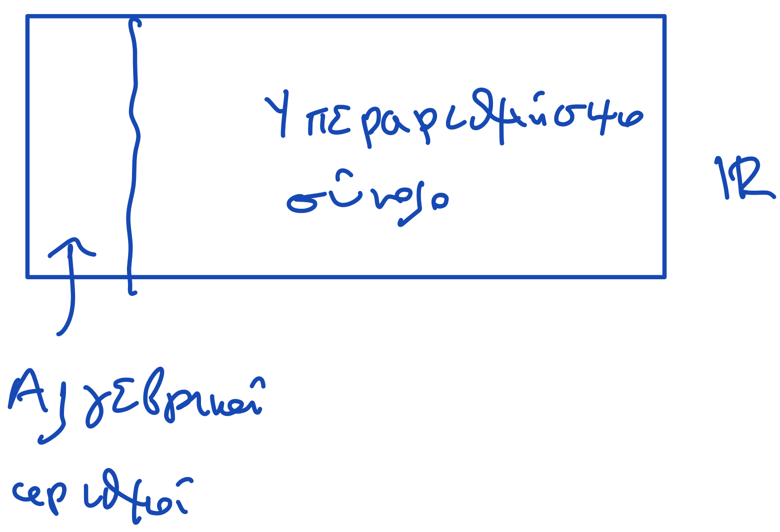
$$\mathbb{Q} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{n}{m} \;\middle|\; n \in \mathbb{Z} \right\}$$: αριθμήσιμη ένωση αριθμ. συνόλων

Άρα $\mathbb{N} =_c \mathbb{Z} =_c \mathbb{Q}$

Άλλες γνωστές ισοπληθικότητες:

$\mathbb{N} =_c$ το σύνολο όλων των αλγεβρικών αριθμών

το $\mathbb{R}$ δεν είναι αριθμήσιμο σύνολο, δηλαδή είναι υπεραριθμήσιμο



$$\mathbb{R} =_c P(\mathbb{N}) =_c \{0,1\}^{\mathbb{N}} =_c \mathbb{N}^{\mathbb{N}} =_c \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

$$\mathbb{R} =_c (a,b) =_c (a,b] \underset{a<b}{=_c} [a,b) =_c [a,b]$$

$\mathbb{R} =_c C([0,1])$ το σύνολο όλων των συνεχών $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

$\mathbb{R} =_c \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$\mathbb{R} =_c \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$A \neq_c \underbrace{P(A) \quad \text{και} \quad A}$ $\leq_c P(A)$

Συμβολισμός : $A <_c P(A)$

$\mathbb{N} <_c \mathbb{R}$

$\mathbb{N} <_c P(\mathbb{N})$

$\mathbb{N}$	?	$\mathbb{R}$
$\mathbb{Z}$	Cantor	(a,b) κ.τ.λ. $a<b$
$\mathbb{Q}$		$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
Αλγεβρικοί		

Λέμε ότι ένα σύνολο A έχει τον πληθάριθμο του συνεχούς αν $A =_c \mathbb{R}$ και ότι το A έχει πληθάριθμο μικρότερο ή ίσο του συνεχούς αν $A \leq_c \mathbb{R}$.

Υπόθεση του Συνεχούς (Continuum Hypothesis)

Για κάθε άπειρο $A \subseteq \mathbb{R}$ ισχύει

$$A =_c \mathbb{N} \quad \text{ή} \quad A =_c \mathbb{R}$$

Θεώρημα Cantor: Αν το A είναι κλειστό $\subseteq \mathbb{R}$ τότε είτε $A =_c \mathbb{N}$ είτε $A =_c \mathbb{R}$.

Στοιχεία μετρικών χώρων και τοπολογίας

Έστω $X \neq \emptyset$ σύνολο και $d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$.

Η d ονομάζεται <u>μετρική</u> στο X αν ικανοποιεί τα εξής:

- $d(x,y) \geq 0$ και
  $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- $d(x,y) = d(y,x)$
- $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$
  $x, y, z \in X$.

συνήθης μετρική

<u>Π.χ.</u> $X = \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$

Το ζεύγος (X, d) ονομάζεται μετρικός χώρος.

Η διακριτή μετρική στο X είναι

η $d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y. \end{cases}$

Στο εξής θεωρούμε ότι έχουμε έναν μετρικό χώρο (X, d).

Αν $Y \subseteq X$, $Y \neq \emptyset$ θεωρούμε τον περιορισμό $d_Y = d|(Y \times Y)$, δηλαδή $d_Y : Y \times Y \to \mathbb{R}$

$$d_Y(x,y) = d(x,y).$$

Τότε η d_Y είναι μετρική στο Y.

Ο (Y, d_Y) λέγεται υπόχωρος του (X, d).

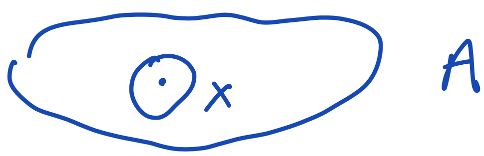
Αν $x \in X$ και $r > 0$, η ανοικτή μπάλα κέντρου x και ακτίνας r

είναι το σύνολο

$$B_d^X(x, r) \equiv B_d(x, r) \equiv B(x, r)$$

$$= \{ y \in X \mid d(x, y) < r \}.$$

Το x είναι **εσωτερικό σημείο** του $A \subseteq X$ αν υπάρχει $r > 0$ με $B_d^X(x, r) \subseteq A$.



Το $A \subseteq X$ λέγεται ανοικτό στον (X, d) αν κάθε σημείο του είναι εσωτερικό. Δηλαδή:

$$\forall x \in A \ \exists r > 0 : B(x, r) \subseteq A.$$

Το **εσωτερικό A°** του $A \subseteq X$

είναι το σύνολο των εσωτερικών σημείων του A, δηλαδή

$$A^\circ = \bigcup \{ V \subseteq X \mid V : \text{ανοικτό} \subseteq A \}$$

$$A^\circ \subseteq A$$

A : ανοικτό $\Leftrightarrow$ $A = A^\circ$

$f : \mathbb{N} \longrightarrow X \quad x_n = f(n)$

Μια ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στον (X, d) συγκλίνει στο $x \in X$ αν

$$\lim_{n \to +\infty} d(x_n, x) = 0.$$

Ισοδύναμα:

$$\forall r > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \quad d(x_n, x) < r.$$

Συμβολισμός: $x_n \xrightarrow{d} x$ ή πιο απλά

$$x_n \longrightarrow x$$

για να πούμε ότι η $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στο x.

Λέμε ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα αν συγκλίνει σε κάποιο $x\in X$

και ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα στο $A\subseteq X$ αν συγκλίνει σε κάποιο $x\in A$.

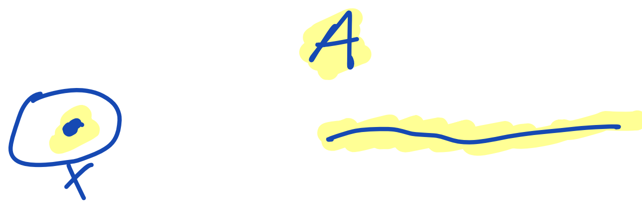
Ένα $x\in X$ είναι οριακό σημείο του $A\subseteq X$ αν υπάρχει $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $x_n\in A$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, και $x_n\to x$.

Ισοδύναμα: $\forall\, r>0\ \exists\, y\in A\ d(x,y)<r$.

Το $x\in X$ είναι σημείο συσσώρευσης του $A\subseteq X$ αν υπάρχει $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $x_n\in A$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, και $x_n\to x$ και $x_n\neq x$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

Ισοδύναμα: $\forall\, r>0\ \exists\, y\in A\setminus\{x\}\ d(x,y)<r$.

Το $x \in A$ ονομάζεται <u>μεμονωμένο σημείο του A</u> αν υπάρχει $r>0$ με $B(x,r) \cap A = \{x\}$.



Rudin Principles of mathematical analysis.

Ισχύει το εξής

Οριακά σημεία του A $=$ (Σημεία συσσώρευσης του A) $\cup$ (Μεμονωμένα σημεία του A)

Το $A \subseteq X$ είναι <u>κλειστό</u> αν περιέχει όλα τα οριακά του σημεία, ισοδύναμα αν περιέχει όλα τα σημεία συσσώρευσής του.

Το A ονομάζεται <u>τέλειο</u> αν είναι κλειστό και δεν έχει μεμονωμένα σημεία.

Η <u>κλειστότητα $\bar{A}$</u> του A είναι το σύνολο όλων των οριακών σημείων του A, ισοδύναμα

$$\bar{A} = \bigcap \{ F \subseteq X \mid F : \text{κλειστό} \supseteq A \}$$

Ισχύει $A^\circ \subseteq A \subseteq \bar{A}$ και

A : ανοικτό $\Leftrightarrow$ $A = A^\circ$ και

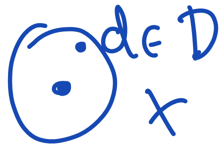
A : κλειστό $\Leftrightarrow$ $A = \bar{A}$.

Ισχύει επίσης,

A : κλειστό $\Leftrightarrow$ $X \setminus A$: ανοικτό

A : ανοικτό $\Leftrightarrow$ $X \setminus A$: κλειστό.

Ένα $D \subseteq X$ ονομάζεται <u>πυκνό</u> αν για κάθε $x \in X$ και κάθε $r > 0$ ισχύει $B(x, r) \cap D \neq \emptyset$.



$(d_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}}$

Ισοδύναμα: $\forall x \in X$ $\exists (d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο D με $d_n \to x$.

Ισοδύναμα $\overline{D} = X$.

Ο (X, d) ονομάζεται **διαχωρίσιμος** αν υπάρχει $D \subseteq X$ που είναι αριθμήσιμο και πυκνό.

Π.χ. Το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο και πυκνό στον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Ένα $K \subseteq X$ ονομάζεται **συμπαγές** αν για κάθε οικογένεια $(V_i)_{i\in I}$ από ανοικτά σύνολα στο X με $K \subseteq \bigcup_{i\in I} V_i$ υπάρχουν $i_1, \dots, i_n \in I$

με $K \subseteq V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_n}$.

Ισοδύναμα: για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο K υπάρχει υπακολουθία $(x_{m_n})_{n\in\mathbb{N}}$ και υπάρχει $\underline{\underline{x \in K}}$ με $x_{m_n} \to x$.

Κάθε συμπαγές είναι κλειστό.

<u>Συνεχείς συναρτήσεις</u> -

Θεωρούμε μετρικούς χώρους (X,d) και (Y,ρ), $x\in X$ και μια συνάρτηση $f:(X,d)\to(Y,\rho)$.

Η f είναι συνεχής στο x αν

$$\forall r>0 \ \exists \delta>0 \quad f[B_d(x,\delta)] \subseteq B_\rho(f(x),r)$$

$$\Leftrightarrow$$

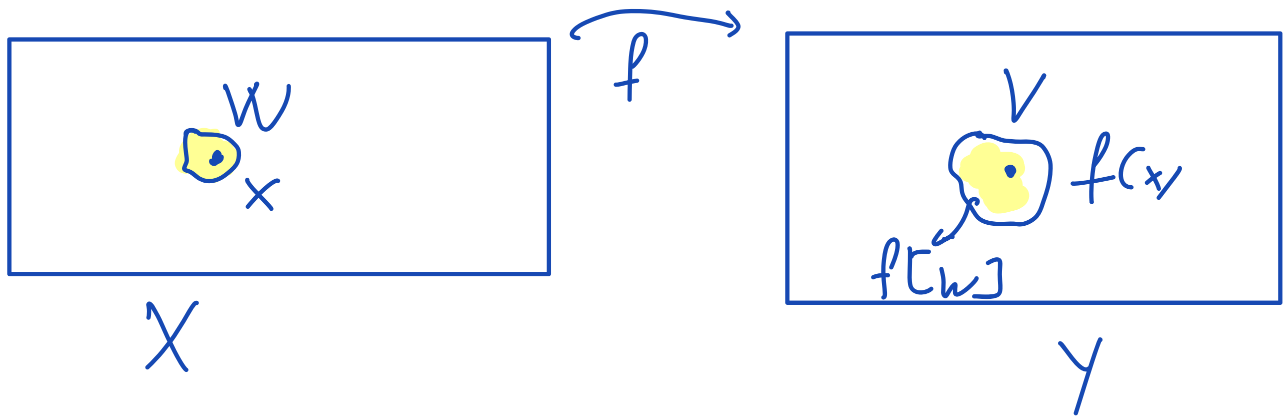
$$\forall y \text{ με } d(x,y)<\delta \Rightarrow \rho(f(x),f(y))<r$$

Ισοδύναμα:

$\forall V \subseteq Y$ ανοικτό με $f(x) \in V$

$\exists W \subseteq X$ ανοικτό με $x \in W$

έτσι ώστε $f[W] \subseteq V$.



Ισοδύναμα: $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο X

με $x_n \xrightarrow{d} x$

ισχύει $f(x_n) \xrightarrow{\rho} f(x)$

Η f είναι <u>συνεχής</u> αν είναι

συνεχής σε κάθε $x \in X$.

Ισοδύναμα: $\forall V \subseteq Y$ ανοικτό ισχύει

ότι το σύνολο $f^{-1}[V]$ είναι ανοικτό.

Η f λέγεται <u>τοπολογικός</u> <u>ισομορφισμός</u> αν είναι ένα-προς-ένα, επί, συνεχής και η $f^{-1}: Y \to X$ είναι επίσης συνεχής.

<u>Ισοδύναμες μετρικές:</u>

Δύο μετρικές d_1, d_2 σε ένα μη κενό σύνολο X είναι <u>ισοδύναμες</u>, συμβολικά $d_1 \sim d_2$, αν έχουν τα ίδια ανοικτά σύνολα. Δηλαδή $\forall V \subseteq X$ το V είναι d_1-ανοικτό $\Leftrightarrow$ το V είναι d_2-ανοικτό.

Ισοδύναμα: η ταυτοτική συνάρτηση

$$id : (X, d_1) \to (X, d_2)$$

$$id(x) = x$$

$V \subseteq X$ d_2-ανοικτό.

$id^{-1}[V] = V$: d_1-ανοικτό.

είναι τοπολογικός ισομορφισμός

$id^{-1}: (X, d_2) \to (X, d_1)$

$V \subseteq X$ d_1-ανοιχτό

$(id^{-1})^{-1}[V] = V$: d_2-ανοιχτό

Ισοδύναμα: $\forall$ ακολουθία στο X και $\forall x \in X$

$$x_n \xrightarrow{d_1} x \iff x_n \xrightarrow{d_2} x$$

Αν έχουμε έναν μετρικό χώρο (X, d_1) τότε μπορούμε να ορίσουμε τις συναρτήσεις

$f(t) = \frac{t}{1+t}$, $t \geq 0$

$f' \uparrow$

$$d_2 = \min\{d_1, 1\} \quad \text{και} \quad d_3 = \frac{d_1}{1+d_1}$$

Οι d_2, d_3 είναι μετρικές στο X και μάλιστα ισοδύναμες με την d_1.

Παρατηρούμε ότι $d_2, d_3 \leq 1$.

Η οικογένεια όλων των ανοικτών συνόλων σε ένα μετρικό χώρο (X, d) ικανοποιεί τα εξής:

α) το $\emptyset$ και το X είναι ανοικτά

β) αν τα $A_i, i \in I$ είναι ανοικτά τότε η ένωση $\bigcup_{i \in I} A_i$ είναι ανοικτό

γ) αν $A_1, \ldots, A_n$ είναι ανοικτά τότε $A_1 \cap \ldots \cap A_n$ είναι ανοικτό.

Τοπολογία:

Δίνεται ένα μη κενό σύνολο X.
Μια οικογένεια $\mathcal{T}$ από υποσύνολα του X ονομάζεται τοπολογία στο X αν ικανοποιεί τις προηγούμενες ιδιότητες α), β) γ).

Δηλαδή:

α) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

β) Αν $A_i \in \mathcal{T}$, για κάθε $i \in I$

τότε $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$.

γ) Αν $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{T}$ τότε $\bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{T}$.

Παρατηρούμε ότι αν έχουμε έναν μετρικό χώρο (X, d) και θέσουμε

$\mathcal{T}_d = \{ V \subseteq X \mid V : d\text{-ανοικτό} \}$

τότε η $\mathcal{T}_d$ είναι τοπολογία στο X.

Αυτή η $\mathcal{T}_d$ ονομάζεται <u>τοπολογία του (X, d)</u>.

Τοπολογικός χώρος είναι ένα ζεύγος $(X, \mathcal{T})$ όπου το X είναι μη κενό σύνολο και $\mathcal{T}$ είναι τοπολογία στο X. (*) Τα στοιχεία της τοπολογίας λέγονται ανοικτά σύνολα

Ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T})$ λέγεται <u>μετρικοποιήσιμος</u> αν υπάρχει μετρική d στο X έτσι ώστε $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$.

<u>Σχόλιο:</u> Όλες οι προηγούμενες έννοιες (εσωτερικό, κλειστότητα, πυκνότητα, σύγκλιση κ.τ.λ.) μπορούν να δοθούν στο πλαίσιο των τοπολογικών χώρων αντικαθιστώντας την $B_d(x, r)$ με ένα $V \in \mathcal{T}$ που ικανοποιεί $x \in V$.

<u>Π.χ.</u> x: εσωτερικό του A
$\iff \exists\, V \in \mathcal{T}$ με $x \in V \subseteq A$.

<u>Βάση</u> ενός τοπολογικού χώρου $(X, \mathcal{T})$ είναι μια οικογένεια $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$

έτσι ώστε για κάθε $U \in \mathcal{T}$ ισχύει $U = \bigcup_{i \in I} B_i$, όπου $B_i \in \gamma$, για κάθε $i \in I$.

Αν ο $(X, \mathcal{T})$ είναι μετρικοποιήσιμος από την d τότε μια βάση της $\mathcal{T}$ δίνεται από την

$$\gamma = \{ B_d(x, q) \mid x \in D,\ q \in \mathbb{Q},\ q > 0 \}$$

όπου $D \subseteq X$ είναι πυκνό.

Αν ο $(X, \mathcal{T})$ είναι μετρικοποιήσιμος και διαχωρίσιμος και το $D \subseteq X$ είναι αριθμήσιμο και πυκνό, τότε η γ όπως πιο πάνω είναι αριθμήσιμο σύνολο.

Και ταυτόχρονα στο εξής:

Κάθε διαχωρίσιμος μετρικός χώρος έχει αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του.

Ισχύει και το αντίστροφο: κάθε μετρικός χώρος που έχει αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του είναι διαχωρίσιμος.

Πλήρεις μετρικοί χώροι:

Δίνεται ένας μετρικός χώρος (X, d) και μία ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο X.

Η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ λέγεται Cauchy ή βασική αν για κάθε $r>0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $\forall n, m \geq n_0$ να ισχύει $d(x_n, x_m) < r$.

Ο (X, d) λέγεται πλήρης αν

κάθε ακολουθία Cauchy στο X συγκλίνει σε κάποιο $x \in X$.

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbb{Q}, |\cdot-\cdot|) \\ q_n \to \sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \\ (q_n)_{n \in \mathbb{N}} : \text{Cauchy} \\ \text{στον } (\mathbb{Q}, |\cdot-\cdot|) \\ \text{αλλά όχι} \\ \text{συγκλίνουσα} \\ \text{στον } (\mathbb{Q}, |\cdot-\cdot|) \end{array} \right.$$

<u>Σχόλιο:</u> Οι προηγούμενες κατασκευές

$d \longmapsto \min\{d, 1\}$

$d \longmapsto \dfrac{d}{1+d}$

διατηρούν την πληρότητα.

Η πληρότητα όμως δεν διατηρείται κάτω από ισοδύναμες μετρικές.

Δηλαδή μπορεί να έχουμε δύο μετρικές d και ρ σε ένα $X \neq \emptyset$

$d \sim \rho$, ο (X, d) να είναι πλήρης αλλά ο (X, ρ) να μην είναι πλήρης.

Παράδειγμα: $X = \{ 2^{-n} \mid n \in \mathbb{N} \}$

$$\rho(x,y) = |x-y|$$

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

O (X, ρ) δεν είναι πλήρης,

Παίρνουμε $x_n = 2^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$.

O (X, d) είναι πλήρης.

(Κάθε ακολουθία Cauchy ως προς τη διακριτή μετρική είναι τελικά σταθερή και επομένως συγκλίνουσα).

Ισχύει επίσης ότι $\rho \sim d$.

Γιατί: $x_n \xrightarrow{\rho} x \iff x_n \xrightarrow{d} x$

$x = 2^{-n_0}$

Προκύπτει ότι η πληρότητα δεν διατηρείται κάτω από τοπολογικούς ισομορφισμούς.

Επίσης προκύπτει ότι η πληρότητα είναι μια έννοια που δεν επεκτείνεται σε τοπολογικούς χώρους.

Συγκεκριμένα δεν υπάρχει ιδιότητα P τοπολογικών χώρων έτσι ώστε για κάθε μετρική d, αν η τ είναι μετρικοποιήσιμη από την d τότε:

ο (X,τ) έχει την P $\iff$ ο (X,d) είναι πλήρης.

Κατασκευές καινούργιων χώρων:

1) Πεπερασμένο γινόμενο

Δίνονται μετρικοί χώροι

$(X_1, d_1), \ldots, (X_n, d_n)$. $\left(\begin{smallmatrix} n \in \mathbb{N} \\ n \geq 1 \end{smallmatrix}\right)$

Ορίζουμε $X = X_1 \times \cdots \times X_n$

$= \{ (x_1, \ldots, x_n) \mid \forall i = 1, \ldots, n \;\; x_i \in X_i \}$

και $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = d_1(x_1, y_1) + \cdots + d_n(x_n, y_n)$$

$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$

$\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$

Παρατήρηση:

$$\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \left(\sum_{k=1}^{n} d_k(x_k, y_k)^2 \right)^{1/2}$$

Ισχύει $d \sim \rho$

Παίρνουμε λοιπόν τον μετρικό χώρο (X, d). Αυτός ~~θα~~ λέγεται το καρτεσιανό γινόμενο των $(X_1, d_1), \ldots, (X_n, d_n)$.

Εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά, όταν έχουμε το καρτεσιανό γινόμενο μιας πεπερασμένης συλλογής μετρικών χώρων, τότε θα θεωρούμε αυτό το γινόμενο με τη μετρική d.

Αυτή η κατασκευή επεκτείνεται και στους τοπολογικούς χώρους ως εξής:

Θεωρούμε τοπολογικούς χώρους $(X_1, \tau_1), \ldots, (X_n, \tau_n)$ και ορίζουμε:

α) $X = X_1 \times \dots \times X_n$

β) $\mathcal{V}_X = \{ V_1 \times \dots \times V_n \mid \forall i = 1, \dots, n \quad V_i \in \mathcal{T}_i \}$

και $\mathcal{T}_X$ = η οικογένεια όλων των ενώσεων από τη $\mathcal{V}_X$.

Τότε η $\mathcal{T}_X$ είναι τοπολογία στο X και η $\mathcal{V}_X$ είναι βάση της $\mathcal{T}_X$.

Ο τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T}_X)$ λέγεται το **καρτεσιανό γινόμενο** των τοπολογικών χώρων $(X_1, \mathcal{T}_1), \dots, (X_n, \mathcal{T}_n)$.

Το καρτεσιανό γινόμενο μιας πεπερασμένης συλλογής τοπολογικών χώρων σέβεται τη μετρικοποιησιμότητα.

Δηλαδή αν οι τοπολογικοί χώροι (X_i, τ_i), $i = 1, 2, \dots, n$ μετρικοποιούνται από τις μετρικές d_i, και πάρουμε το καρτεσιανό γινόμενο των αντίστοιχων μετρικών χώρων (X_i, d_i), τότε η τοπολογία του καρτεσιανού μετρικού χώρου είναι η τοπολογία τ_X.

<u>Σχήμα (για δύο χώρους):</u>

άθροισμα

$$
\begin{tikzcd}
(X, d_X), (Y, d_Y) \arrow[r, "\text{γινόμενο μετρικών χώρων}"'] \arrow[d, "\text{τοπολογικός χώρος που παράγεται}"'] & (X \times Y, d_{X \times Y}) \arrow[d, "\text{τοπολογικός χώρος που παράγεται}"] \\
(X, \tau_X), (Y, \tau_Y) \arrow[r, "\text{γινόμενο τοπολογικών χώρων}"'] & (X \times Y, \tau_{X \times Y})
\end{tikzcd}
$$

Ισχύουν επίσης τα εξής:

A) Αν οι (X_i, d_i) είναι διαχωρίσιμοι μετρικοί χώροι, όπου $i=1,\dots,n$ τότε το καρτεσιανό γινόμενό τους είναι επίσης διαχωρίσιμος μετρικός χώρος.

B) Το ίδιο με το 1) για πλήρεις μετρικούς χώρους.

2) <u>Άπειρο αριθμήσιμο γινόμενο:</u>

Δίνονται μετρικοί χώροι (X_n, d_n), $n\in\mathbb{N}$.

Ορίζουμε $X = \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n \equiv X_0 \times X_1 \times \dots \times X_n \times \dots$

και τη συνάρτηση $d: X\times X \to \mathbb{R}$:

αν $x = (x(n))_{n\in\mathbb{N}}$, $y = (y(n))_{n\in\mathbb{N}} \in X$

τότε:

$$d(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cdot \min\{d_n(x(n), y(n)), 1\}$$

Αποδεικνύεται ότι αυτή είναι μετρική στο X.

Ο χώρος (X, d) λέγεται το <u>καρτεσιανό</u> γινόμενο των (X_n, d_n), $n \in \mathbb{N}$.

Όμοια με πριν:

(A) Αν οι (X_n, d_n) είναι διαχωρίσιμοι μετρικοί χώροι, τότε και το καρτεσιανό γινόμενό τους είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος.

(B) Το ίδιο με το (A) για πλήρεις μετρικούς μετρικούς χώρους.

Ισχύει επίσης το εξής:

αν $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία

στο $X = \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$,

$x_i = (x_i(n))_{n\in\mathbb{N}}$ και αν

$x = (x(n))_{n\in\mathbb{N}} \in X$, τότε

$$x_i \xrightarrow{i\to+\infty} x \iff \forall n \quad x_i(n) \xrightarrow{i\to+\infty} x(n)$$

στον (X_n, d_n).

Δηλαδή η σύγκλιση στο καρτεσιανό γινόμενο είναι η σύγκλιση κατά συντεταγμένες.
Ισχύει το ίδιο και για το πεπερασμένο καρτεσιανό γινόμενο.

Αυτή η κατασκευή μεταφέρεται και στους τοπολογικούς χώρους:

αν έχουμε τοπολογικούς χώρους (X_n, τ_n), $n \in \mathbb{N}$, ορίζουμε

$$X = \prod_n X_n ,$$

$$\gamma_X = \{ V_0 \times \dots \times V_n \times X_{n+1} \times X_{n+2} \times \dots \mid V_i \in \tau_i, \ i = 0, \dots, n, \ n \in \mathbb{N} \}$$

τ_X = η οικογένεια όλων των ενώσεων από τη γ_X.

Τότε ο (X, τ_X) είναι τοπολογικός χώρος και η γ_X είναι βάση της τ_X.

Ο (X, τ_X) λέγεται το <u>καρτεσιανό</u>

γινόμενο των (X_n, τ_n), $n \in \mathbb{N}$.

Όπως πριν αυτή η κατασκευή σέβεται τη μετρικοποιησιμότητα.

2ο Κεφάλαιο: Πολωνικοί χώροι

Ορισμός: Ένας τοπολογικός χώρος (X, τ) είναι Πολωνικός χώρος αν υπάρχει μετρική d που παράγει την τ και ο (X, d) να είναι πλήρης και διαχωρίσιμος μετρικός χώρος.

Μια μετρική d όπως πιο πάνω

θα λέγεται καταλληλη ή συμβατή μετρική για τον (X, τ).

Τους Πολωνικούς χώρους θα τους συμβολίζουμε με $X, Y, Z, \ldots$ χωρίς να συμβολίζουμε την τοπολογία, εκτός αν χρειάζεται.

Παραδείγματα:

$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $[0,1]$, $F \subseteq \mathbb{R}$ (F: κλειστό) με τις τοπολογίες που παράγονται από τις συνήθεις μετρικές.

(Κατάλληλες μετρικές είναι οι συνήθεις)

$\mathbb{N}$ με την τοπολογία που προκύπτει από τη συνήθη μετρική.

Το ανοικτό διάστημα $(0,1)$ με τη συνήθη μετρική είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος, αλλά όχι πλήρης.

Θα δούμε όμως ότι το $(0,1)$ με την τοπολογία της συνήθους μετρικής είναι Πολωνικός χώρος.

<u>Πρόταση:</u>

Δίνεται ένας Πολωνικός χώρος X και ένας τοπολογικός χώρος (Y, τ_Y).

Αν οι χώροι X και Y είναι τοπολογικά ισομορφικοί, τότε ο (Y, τ_Y) είναι Πολωνικός χώρος.

<u>Απόδειξη:</u> Θεωρούμε μια συμβατή μετρική d στον X και έναν τοπολογικό ισομορφισμό

$$f : (Y, \tau_Y) \to (X, \tau_d)$$

όπου τ_Y είναι η τοπολογία του Y και τ_d είναι η τοπολογία που παράγει η d, η οποία είναι η τοπολογία του X.

Ορίζουμε $\rho : Y \times Y \to \mathbb{R}$

$$\rho(y_1, y_2) = d(f(y_1), f(y_2)).$$

Η ρ είναι μετρική στο Y και η συνάρτηση

$$f : (Y, \rho) \longrightarrow (X, d) \text{ είναι}$$

ισομετρία και επί.

Αφού ο (X, d) είναι πλήρης και διαχωρίσιμος προκύπτει ότι και ο (Y, ρ) είναι πλήρης και διαχωρίσιμος.

(Άσκηση)

Μένει να δείξουμε ότι η τοπολογία που παράγει η ρ είναι η τ_Y.

Δηλαδή $\forall A \subseteq Y$ ισχύει

$$A : \rho\text{-ανοικτό} \Leftarrow A \in \tau_Y .$$

Έστω $A \subseteq Y$.

($\Leftarrow$) ~~($\Rightarrow$)~~ Υποθέτουμε ότι το A είναι ~~ρ-ανοικτό~~, είναι στοιχείο της τ_Y.

Η $f^{-1} : (X, \tau_d) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ είναι συνεχής, άρα το $(f^{-1})^{-1}[A]$ ανήκει στην τ_d.

Αλλά $(f^{-1})^{-1}[A] = \cancel{A}\ f[A]$

Άρα $f[A] \in \tau_d$ δηλαδή το $f[A]$ είναι d-ανοικτό.

Η $f : (Y, \rho) \longrightarrow (X, d)$ είναι συνεχής ως ισομετρία.

(Αφού το $f[A]$ είναι d-ανοικτό έχουμε ότι το $f^{-1}[f[A]] = A$ είναι ρ-ανοικτό.

($\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι το A είναι ρ-ανοικτό.

Η $f^{-1}: (X, d) \to (Y, \rho)$ είναι συνεχής άρα το $(f^{-1})^{-1}[A] = f[A]$ είναι d-ανοικτό, δηλαδή $f[A] \in \tau_d$.

Η $f: (Y, \tau_Y) \to (X, \tau_d)$ είναι συνεχής, άρα $f^{-1}[f[A]] = A \in \tau_Y$.

<u>Πόρισμα:</u> Κάθε ανοικτό διάστημα (a, b) είναι Πολωνικός χώρος $(a<b)$.

[Στο (a,b) θεωρούμε την τοπολογία που προκύπτει από τη συνήθη μετρική].

Απόδειξη:

Η συνάρτηση $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ είναι τοπολογικός ισομορφισμός.

Ο $\mathbb{R}$ είναι πολωνικός χώρος, επομένως και το $(-\pi/2, \pi/2)$ είναι πολωνικός χώρος. (Προηγούμενη Πρόταση).

Μάλιστα μια κατάλληλη μετρική για το $(-\pi/2, \pi/2)$ είναι η

$$\rho(x,y) = |\tan x - \tan y|, \quad x,y \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Ο ισχυρισμός για αυθαίρετο (a,b), όπου $a<b$ είναι άμεσος από το γεγονός ότι κάθε δύο μη τετριμμένα ανοικτά διαστήματα του $\mathbb{R}$ είναι τοπολογικά ισομορφικά.

Ορισμός: Έστω X τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Το A είναι F_σ υποσύνολο του X αν υπάρχει ακολουθία $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από κλειστά $\subseteq X$ με $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$.

($F \leftrightarrow$ fermet = κλειστά)

Το A είναι G_δ υποσύνολο του X αν υπάρχει ακολουθία $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από ανοικτά $\subseteq X$ με $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$.

($G \leftrightarrow$ geöffnet = ανοικτό)

Παρατήρηση: Ένα $A \subseteq X$ είναι F_σ $\Leftrightarrow$ $X \setminus A$ είναι G_δ:

$$X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X \setminus F_n$$

Επίσης κάθε κλειστό σύνολο $F \subseteq X$

είναι F_σ (παίρνουμε $F_n = F$, $n \in \mathbb{N}$)

και κάθε ανοικτό είναι G_δ.

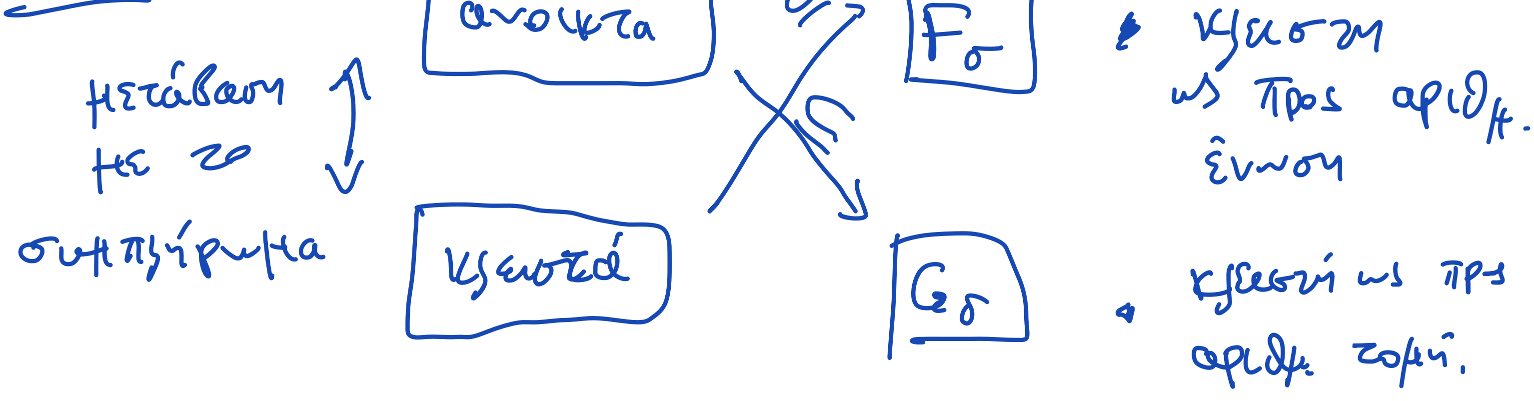
Τέλος η αριθμήσιμη ένωση F_σ συνόλων είναι F_σ:

αν $A_n = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_n^i$, F_n^i: κλειστά

τότε $$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \underbrace{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_n^i}_{\text{αριθμήσιμη ένωση κλειστών}}$$ άρα F_σ

Όμοια η αριθμήσιμη τομή G_δ είναι G_δ.

Σχήμα:



Θα δείξουμε ότι κάθε ανοικτό σύνολο ενός μετρικού χώρου, εκτός από G_δ, είναι και F_σ.

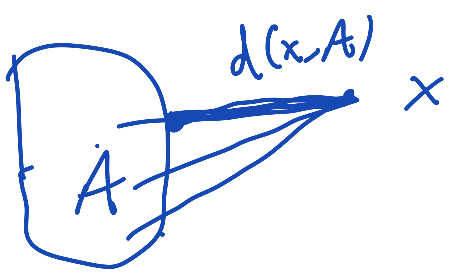
Όμοια κάθε κλειστό, εκτός από F_σ, είναι και G_δ.

<u>Ορισμός:</u> Δίνεται ένας μετρικός χώρος (X, d) και ένα μη κενό $A \subseteq X$.

Τότε ορίζουμε τη <u>συνάρτηση της απόστασης από το A</u>

$$f: X \to [0, +\infty):$$

$$f(x) \equiv d(x, A) = \inf\{d(x, z) \mid z \in A\}.$$



Η πιο πάνω συνάρτηση f είναι συνεχής.

Μάλιστα ισχύει:

$$|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$$

για κάθε $\underline{\underline{x, y \in X}}$.

<u>Πρόταση:</u> Αν ο X είναι μετρικοποιή- σιμος τοπολογικός χώρος, τότε κάθε κλειστό υποσύνολό του ~~είναι~~, εκτός από F_σ, είναι και G_δ.

Επομένως κάθε ανοικτό, εκτός από G_δ, είναι και F_σ.

<u>Απόδειξη:</u> Έστω d κατάλληλη μετρική στον X και $F \subseteq X$ κλειστό.

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$x \in X \longmapsto d(x, F).$$

(Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το F είναι μη κενό γιατί αλλιώς το συμπέρασμα είναι προφανές).

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$U_n = \{ x \in X \mid d(x, F) < 2^{-n} \}$$

Τότε $U_n = f^{-1}[(-\infty, 2^{-n})]$

$$= f^{-1}[(-1, 2^{-n})]$$

όπου $f(x) = d(x, F)$, $x \in X$.

Η f είναι συνεχής και το διάστημα $(-\infty, 2^{-n})$ είναι ανοικτό $\subseteq \mathbb{R}$.

Άρα το U_n είναι ανοικτό $\subseteq X$.

Επίσης αν $x \in F$ τότε $d(x, F) = 0 < 2^{-n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή $x \in U_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Επομένως $F \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$.

Δείχνουμε ότι $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n \subseteq F$.

Έστω $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ $d(x, F) < 2^{-n}$.

Άρα $d(x, F) = 0$.

Επειδή $d(x, F) = \inf\{d(x, z) \mid z \in F\}$ υπάρχει ακολουθία $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο F με $d(x, z_n) \longrightarrow d(x, F) = 0$.

Δηλαδή
$$\left.\begin{array}{l} z_n \longrightarrow x. \\ z_n \in F,\ n \in \mathbb{N} \\ F:\ \text{κλειστό} \end{array}\right\} \Rightarrow x \in F.$$

Σχετικά με τα ανοικτά:

Έστω $G \subseteq X$ ανοικτό. Τότε το $X \setminus G = F$ είναι κλειστό και άρα G_δ με βάση αυτό που αποδείξαμε.

Θεωρούμε μια ακολουθία $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από ανοικτά σύνολα με

$$F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n .$$

~~Τότε~~ $\cancel{X \setminus G = X\setminus\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (X\setminus U_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n}$

~~όπου~~ $\cancel{F_n = X\setminus U_n}$~~, το οποίο είναι κλειστό.~~

Τότε
$$\begin{aligned} G &= X\setminus F \\ &= X\setminus\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n\right) \\ &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (X\setminus U_n) \\ &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \end{aligned}$$

όπου $F_n = X\setminus U_n$: κλειστό για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

$\Rightarrow G : F_\sigma$

Το G είναι G_δ παίρνοντας
$G_n = G$: ανοικτό για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Παραδείγματα:

Θεωρούμε τον χώρο $X = \mathbb{R}$ (με τη συνήθη μετρική).

1) Το $(a, b]$ όπου $a < b$ είναι F_σ και G_δ.

F_σ: $$(a,b] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a + 2^{-n}, b]$$

G_δ: $$(a,b] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (a, b + 2^{-n})$$

2) Όμοια με το 1) το $[a, b)$ όπου $a < b$ είναι F_σ και G_δ.

3) Το σύνολο $\mathbb{Q}$ είναι F_σ υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

<u>Εξήγηση</u>: Το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο σύνολο, αφού είναι άπειρο, υπάρχει $f: \mathbb{N} \twoheadrightarrow \mathbb{Q}$ ένα-προς-ένα και επί. $f(n) \equiv q_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Τότε $\mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{q_n\}$.

Κάθε $\{q_n\}$ είναι κλειστό σύνολο.

(Γενικά τα μονοσύνολα σε μετρικούς χώρους είναι κλειστά).

Επομένως το $\mathbb{Q}$ είναι F_σ.

(Γενικά κάθε αριθμήσιμο υποσύνολο ενός μετρικού χώρου είναι F_σ).

Αποδεικνύεται ότι το $\mathbb{Q}$ δεν είναι G_δ.

Αυτό γίνεται με τη βοήθεια του Θεώρημα Baire (Baire Category Theorem)

4) Οι άρρητοι $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι G_δ και δεν είναι F_σ υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

<u>Ορισμός</u>: (Υπόχωρος)

Αν έχουμε έναν τοπολογικό χώρο $(X, \mathcal{T})$ και G ένα μη κενό $\subseteq X$, μπορούμε να δούμε το G ως τοπολογικό χώρο με τη <u>σχετική τοπολογία του X</u>, δηλαδή με την $\mathcal{T}_G$ που ορίζεται ως εξής:

$$\mathcal{T}_G = \{ G \cap V \mid V \subseteq X, V \in \mathcal{T} \}.$$

Το ζεύγος $(G, \mathcal{T}_G)$ ονομάζεται υπόχωρος του (X, τ).

Αν ο (X, τ) μετρικοποιείται από την d, τότε ο (G, τ_G) μετρικοποιείται από την $d|(G \times G)$.

Θεώρημα:

Έστω X Πολωνικός χώρος και $G \neq \emptyset$, $G \subseteq X$. Τότε το G με τη σχετική τοπολογία είναι Πολωνικός αν και μόνο αν το G είναι G_δ υποσύνολο του X.