Περιγραφική Θεωρία Συνόλων

→ Μελέτη υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ και γενικότερα συνόλων σε Πλήρεις και διαχωρίσιμους μετρικούς χώρους.

→ **Κίνητρο:** 1) Μελέτη συναρτήσεων με βάση τον «γενικό» ορισμό του Riemann.

2) Ύπαρξη συνόλων με ιδιότητες που θεωρήθηκαν «περίεργες».

Παράδοξο Banach-Tarski

Λέμε ότι μια συνάρτηση $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ **διατηρεί τον όγκο** αν για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^3$, που έχει όγκο, το $T(A)$ είναι σύνολο που έχει όγκο και ισχύει

$$V(A) = V(T(A))$$ $T[A]$

$V(\cdot)$ = ο όγκος του συνόλου

<u>Θεώρημα</u> (Banach-Tarski):

Θεωρούμε τη μοναδιαία μπάλα B του $\mathbb{R}^3$.
Τότε υπάρχει μια διαμέριση $A_1, \dots, A_n$, του B και μετασχηματισμοί

$T_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $i=1,\dots,n$ που διατηρούν τον όγκο έτσι ώστε τα $T_1(A_1), \dots, T_n(A_n)$ να αποτελούν τη διαμέριση δύο μπαλών, η κάθε μία από τις οποίες έχει όγκο όσο και η B.

<u>Παράδοξο</u>: Μοιάζει να διπλασιάσαμε τον όγκο της B με μετασχηματισμούς που διατηρούν τον όγκο.

Εξήγηση: Τα A_i, $i=1,\dots,n$ δεν έχουν όγκο!

$$V(B) = V(A_1 \cup \dots \cup A_n)$$

$$= V(A_1) + \dots + V(A_n)$$

$$= V(T_1(A_1)) + \dots + V(T_n(A_n))$$

$$= V(B) + V(B)$$

$$= 2V(B) \quad \text{Άτοπο.}$$

Η περιγραφική θεωρία συνόλων ασχολείται με την ταξινόμηση και τις ιδιότητες των συνόλων (και κατ' επέκταση των συναρτήσεων) που ορίζονται με «φυσιολογικό» τρόπο,

Ιστορικά στοιχεία

1900 – 1910 : Lebesgue, Baire, Borel
(1905)

Αρχική θεμελίωση

Borel σύνολα

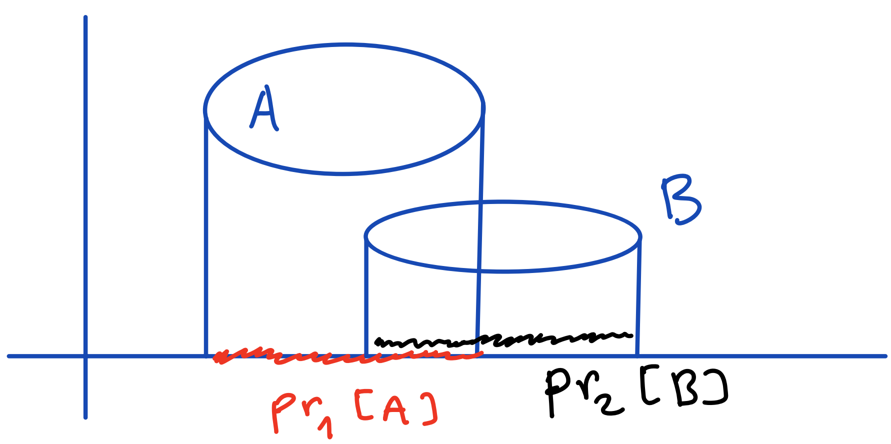
Λανθασμένος ισχυρισμός Lebesgue :

« Οι συνεχείς εικόνες Borel συνόλων είναι Borel σύνολα. »

Το λάθος στην απόδειξη:

« Αν $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ τότε

$$pr_1[A \cap B] = pr_1[A] \cap pr_2[B] \text{ »}$$



$$pr_1[A] \cap pr_1[B] \neq \emptyset$$

$$pr_1[A \cap B] = pr_1[\emptyset] = \emptyset$$

1910 – 1940: Suslin, Lusin, Sierpinski

Αναλυτικά σύνολα

(συνεχείς εικόνες Borel)

και πιο σύνθετα σύνολα.