4

Έργο και Ενέργεια

4.1 Έργο σε μία διάσταση

Το έργο μιας σταθερής δύναμης F_x, η οποία ασκείται σε ένα σώμα που κινείται σε μία διάσταση x, ορίζεται ως

$$W = F_x \Delta x \Leftrightarrow \text{Έργο Δύναμης} = \text{Δύναμη} \times \text{Μετατόπιση}$$

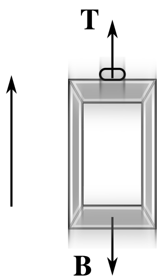
Έχουμε

$$\begin{cases} W > 0, & \text{εάν } F_x,\ \Delta_x \text{ ομόρροπα} \\ W < 0, & \text{εάν } F_x,\ \Delta_x \text{ αντίρροπα} \end{cases}$$

Η μονάδα μέτρησης του έργου είναι:

$$1\,\mathrm{Joule} = 1\,\mathrm{N} \times 1\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{Kg}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$$

Παράδειγμα 1



Ανελκυστήρας με μάζα M ανέρχεται ομαλά.

$$W_B = -Bh, \qquad W_T = Th$$

$$B = T \Rightarrow W_T = -W_B$$

Εάν δεν έχουμε ομαλή κίνηση τότε:

$$T - B = Ma \Rightarrow W_T = Th > |W_B| = Bh$$

Άνθρωπος ακίνητος που κρατάει ένα βάρος δεν παράγει έργο, αν και καταναλώνεται ενέργεια στους μυς για να κρατήσει το βάρος.
Αν ο άνθρωπος είναι μέσα σε ανελκυστήρα που κινείται ομαλά προς τα επάνω, τότε για έναν παρατηρητή εκτός ανελκυστήρα δίνεται έργο στο «βάρος» για να μετακινηθεί προς τα επάνω.

Αν η δύναμη είναι μεταβλητή:

$$F = F(x)$$

τότε χωρίζουμε το διάστημα μετακίνησης $[a, b]$ σε μικρά τμήματα, έστω N, και υποθέτουμε τη δύναμη σταθερή σε αυτά τα μικρά διαστήματα:

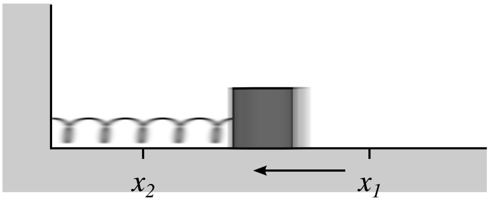
$$W_{\text{ολικό}} = \sum_{k=1}^{N} \Delta W_k = \sum_{k=1}^{N} F(x_k) \Delta x_k$$

και, τέλος, παίρνουμε τη διαμέριση $N \to \infty$, $|\Delta x_k| \to 0$

$$\Rightarrow W_{\text{ολικό}} = \lim_{\substack{N \to \infty \\ \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=1}^{N} F(x_k) \Delta x_k = \int_a^b F(x)\mathrm{d}x$$

Παράδειγμα 2

Ελατήριο ασκεί δύναμη $F(x) = -kx$ σε σωματίδιο που κινείται από τη θέση $x_1 = a$ στη $x_2 = b$. Ποιο είναι το έργο της δύναμης του ελατηρίου που προσφέρεται στο σώμα;

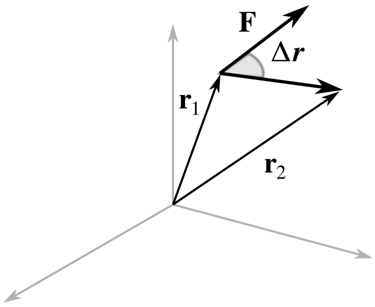


Σχήμα 4.1

$$W_{12} = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\mathrm{d}x = -k\int_{x_1}^{x_2} x\mathrm{d}x = -\frac{k}{2}\left(x_2^2 - x_1^2\right) = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2$$

4.2 Έργο δύναμης στο χώρο

Εάν το σώμα κινηθεί κατά $\Delta\boldsymbol{r}$ υπό την επίδραση της δύναμης $\boldsymbol{F}$, το στοιχειώδες έργο ΔW της δύναμης ορίζεται ως το εσωτερικό γινόμενο της δύναμης επί τη μετατόπιση:



$$\Delta W = \boldsymbol{F}\cdot\Delta\boldsymbol{r} = F\,\Delta r\cos\theta$$

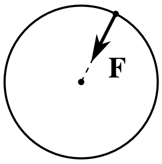
$$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_1 + \Delta\boldsymbol{r}$$

Αναλύοντας σε συνιστώσες έχουμε

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= F_x\hat{\boldsymbol{x}} + F_y\hat{\boldsymbol{y}} + F_z\hat{\boldsymbol{z}}\\ \Delta\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = \Delta x\hat{\boldsymbol{x}} + \Delta y\hat{\boldsymbol{y}} + \Delta z\hat{\boldsymbol{z}}\\ \Rightarrow \Delta W &= \boldsymbol{F}\cdot\Delta\boldsymbol{r} = F_x\Delta x + F_y\Delta y + F_z\Delta z\end{aligned}$$

Εάν $\boldsymbol{F}\perp\Delta\boldsymbol{r} \Rightarrow \Delta W = \boldsymbol{F}\cdot\Delta\boldsymbol{r} = 0$.

Παράδειγμα 3



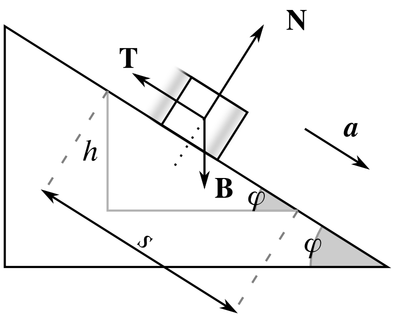
Κυκλική κίνηση, κεντρομόλος Δύναμη $\boldsymbol{F}$

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}_k$$

$$\text{Έργο}_F = 0$$

διότι $\boldsymbol{F}\perp$μετατόπιση.

Παράδειγμα 4



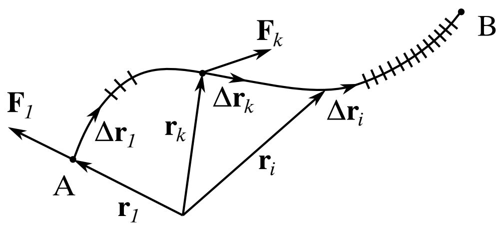
Ολίσθηση σώματος σε κεκλιμένο επίπεδο.
Έργο αντίδρασης $= 0$, δύναμη $\boldsymbol{N}$ κάθετη στη μετατόπιση.

$$W_N = 0, \qquad W_T = -T\cdot s$$

$$W_B = B\sin\phi\cdot s = Bh, \quad W_B > |W_T|$$

Από το νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

$$\begin{cases} B\sin\phi - T & = ma\\ B\cos\phi & = N\\ T = \mu N \end{cases}$$



Σχήμα 4.2

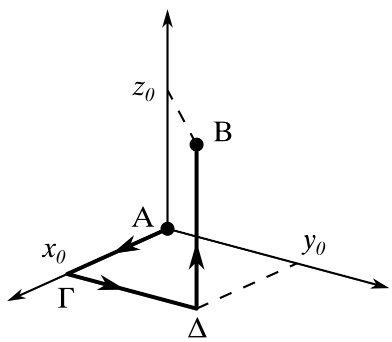
Έργο (μεταβλητής δύναμης) όταν το σώμα κινείται από τη θέση A στη θέση B

Χωρίζουμε το δρόμο $A \to B$ σε μικρά ευθύγραμμα τμήματα $\Delta \boldsymbol{r}_k$ με $k = 1, \ldots, N$. Υπολογίζουμε το έργο της δύναμης χωριστά σε κάθε τέτοιο ευθύγραμμο τμήμα, επομένως $\Delta W_k = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_k) \cdot \Delta \boldsymbol{r}_k$

$$\Rightarrow W_{A\to B} = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_k) \cdot \Delta \boldsymbol{r}_k = \int_A^B \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

$$W_{A\to B} = \int_A^B (F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y + F_z \mathrm{d}z)$$

Παράδειγμα 5



Σχήμα 4.3

$$\boldsymbol{F} = \hat{\boldsymbol{x}} \left[ay\left(y^2 - 3z^2\right)\right] + \hat{\boldsymbol{y}} \left[3ax\left(y^2 - z^2\right)\right] + \hat{\boldsymbol{z}} \left[-6axyz\right]$$

(α) Έργο στη διαδρομή $A \to \Gamma \to \Delta \to B$ (βλ. σχήμα 4.3)

$$W_{A\to B} = 0 + ax_0 y_0^3 - 3ax_0 y_0 z_0^2$$

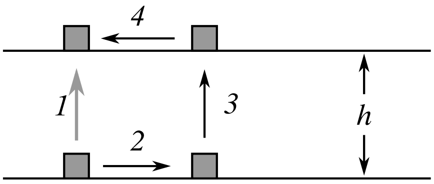
(β) Έργο της $\boldsymbol{F}$ στην ευθύγραμμη διαδρομή $A \to B$

$$\boldsymbol{r}_0 = x_0 \hat{\boldsymbol{x}} + y_0 \hat{\boldsymbol{y}} + z_0 \hat{\boldsymbol{z}}, \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 t \qquad \text{και} \qquad \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 \mathrm{d}t, \quad 0 \le t \le 1$$

$$\Rightarrow W_{A\to B} = \int_0^1 \mathrm{d}t \left(\boldsymbol{F}_0 \cdot \boldsymbol{r}_0\right) t^3$$

όπου $\boldsymbol{F}_0 = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_0)$.

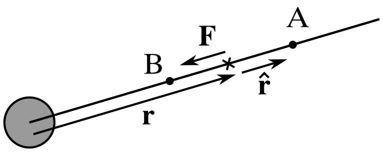
Παράδειγμα 6: Έργο βάρους για σταθερό πεδίο βαρύτητας



$$W_{\text{βάρους}} = -mgh$$
$$\boldsymbol{B} = -mg\hat{\boldsymbol{z}}$$

$W_{\text{βάρους}}$ ανεξάρτητο της διαδρομής που ακολουθούμε. Η διαδρομή **1** και η διαδρομή **2** → **3** → **4** δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα.

Παράδειγμα 7: Πτώση στο πεδίο βαρύτητας μακριά από τη Γη, ακτινική κίνηση ($r_A \to r_B$)



Σχήμα 4.4

Η δύναμη του βάρους είναι $\boldsymbol{F} = -G\dfrac{Mm}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$, και η στοιχειώδης μετατόπιση είναι $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}r\hat{\boldsymbol{r}}$

$$\Rightarrow \mathrm{d}W = \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -G\frac{Mm}{r^2}\mathrm{d}r$$

$$\Rightarrow W_{A\to B} = \int_A^B \mathrm{d}W = \int_{r_A}^{r_B} (-GMm)\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = (-GMm)\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_A}^{r_B}$$

$$W_{A\to B} = \frac{GMm}{r_B} - \frac{GMm}{r_A} > 0$$

επομένως το σύστημα κερδίζει ενέργεια.

4.3 Κινητική Ενέργεια – Έργο Δύναμης

$$\begin{aligned} W &= \int_A^B \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_A^B m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_A^B m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \\ &= \int_A^B m\boldsymbol{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \frac{m}{2}\int_A^B \frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}m\left(v_B^2 - v_A^2\right) = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 \end{aligned}$$

διότι $\boldsymbol{v} = \mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$ και από το νόμο του Νεύτωνα

$$\boldsymbol{F} = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$$

και επίσης

$$\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}) = 2\boldsymbol{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$$

Ορίζουμε την **κινητική ενέργεια** $K = \dfrac{1}{2}mv^2$

$$\Rightarrow \boxed{W_{A\to B} = \Delta K} \qquad \text{όπου} \qquad \boxed{\Delta K = K_B - K_A}$$

Εάν $W_{A\to B} > 0 \Rightarrow \Delta K > 0 \Rightarrow K_B > K_A$.

Η δύναμη παράγει έργο ⇒ άρα αυξάνεται η κινητική ενέργεια του συστήματος.

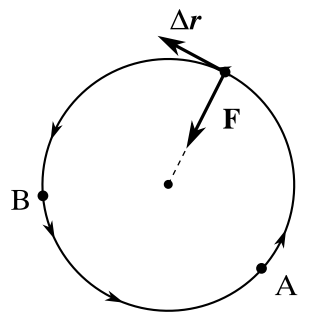
Παράδειγμα 8: Έργο σταθερής δύναμης

$$F = ma \Rightarrow a = \frac{F}{m} \Rightarrow v(t) = at + v_0$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \Rightarrow \Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$$

$$\Rightarrow W^F_{A\to B} = F \cdot \Delta x = ma \cdot \Delta x = \frac{1}{2}ma^2t^2 + \frac{2}{2}mav_0 t \pm \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m\left(at+v_0\right)^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

Παράδειγμα 9: Ομαλή κυκλική κίνηση



Σχήμα 4.5

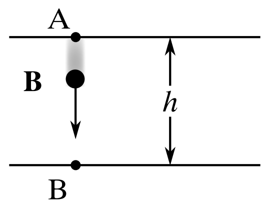
$$\boldsymbol{F} \perp \Delta \boldsymbol{r}$$

$$\Rightarrow W^F_{A\to B} = \int_A^B \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \Delta K = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

αλλά

$$W^F_{A\to B} = 0 \Rightarrow \Delta K = 0 \Rightarrow v_B^2 = v_A^2$$

Παράδειγμα 10: Πτώση κοντά στη Γη



Σχήμα 4.6

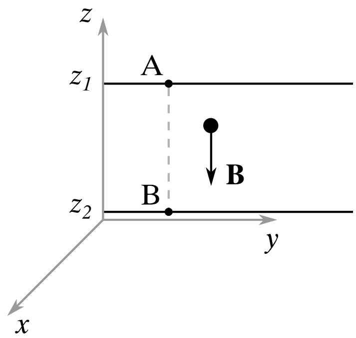
$$\begin{cases} W_{A\to B} & = mgh \\ \Delta K & = \frac{1}{2}mv_B^2 \end{cases} \Rightarrow mgh = \frac{1}{2}mv_B^2$$

Παράδειγμα 11: Δυναμική Ενέργεια Βαρύτητας

$$\begin{aligned} W_{A\to B} &= \int_A^B \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{z_1}^{z_2} (-mg\hat{\boldsymbol{z}}) \cdot (\mathrm{d}z\hat{\boldsymbol{z}}) \\ &= \int_{z_1}^{z_2} (-mg)\,\mathrm{d}z = -mgz\Big|_{z_1}^{z_2} = -mgz_2 + mgz_1 \end{aligned}$$

Όπως και αν κινηθεί το σώμα ανάμεσα στα δύο σημεία A και B, θα έχουμε

$$W_{A\to B} = mgz_1 - mgz_2$$



Σχήμα 4.7

$$\Rightarrow W_{A\to B} = \Delta K$$
$$\Rightarrow mgz_1 - mgz_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$
$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}mv_1^2 + mgz_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgz_2}$$

4.3.1 Θεώρημα Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας

Όπως είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, υπάρχει μια ποσότητα η οποία διατηρείται σταθερή:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgz = \text{ σταθερό}$$

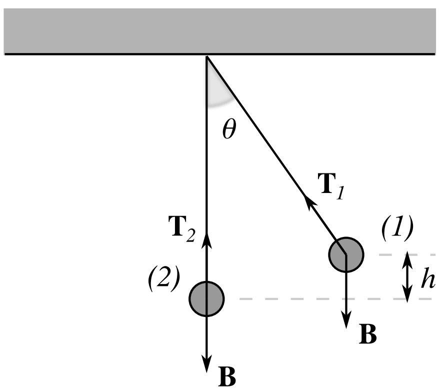
Ορισμός Δυναμικής Ενέργειας

$$U(z) = mgz \quad \text{εάν ορίσουμε } U(z=0) = 0$$

Η ποσότητα E, η οποία είναι το άθροισμα κινητικής ενέργειας και δυναμικής ενέργειας, ονομάζεται μηχανική ενέργεια.

Παράδειγμα 12

Ένα εκκρεμές αποτελείται από μάζα m δεμένη σε νήμα μήκους ℓ. Το εκκρεμές κρατείται αρχικά σε γωνία θ ως προς την κατακόρυφο. Εάν το εκκρεμές αφεθεί ελεύθερο, ποια είναι η τάση του νήματος όταν το εκκρεμές διέρχεται από την κατακόρυφο;



Σχήμα 4.8

$$E_1 = 0 + mgh \qquad \text{θέση (1)}$$
$$E_2 = \frac{1}{2}mv^2 + 0 \qquad \text{θέση (2)}$$

Το έργο της τάσης του νήματος είναι μηδέν.

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}mv^2 = mgh}$$

$$\boxed{h = \ell - \ell\cos\theta = \ell(1-\cos\theta)}$$

Στη θέση (2):

$$\boxed{T_2 - B = m\frac{v^2}{\ell}}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg\ell(1-\cos\theta) \Rightarrow \frac{v^2}{l} = 2g(1-\cos\theta)$$

$$\Rightarrow T_2 - B = 2mg(1-\cos\theta)$$

$$T_2 = mg + 2mg - 2mg\cos\theta \Rightarrow T_2 = mg(3-2\cos\theta)$$

4.4 Διατήρηση της Ενέργειας

4.4.1 Διατηρητικές Δυνάμεις

Για να ορίσουμε τη μηχανική ενέργεια χρειαζόμαστε την έννοια της δυναμικής ενέργειας. Η δυναμική ενέργεια ορίζεται μόνο για τις διατηρητικές δυνάμεις. Πρέπει να ορίσουμε λοιπόν ποιες δυνάμεις είναι διατηρητικές.
Για ένα σωματίδιο που κινείται από τη θέση P_1 στη θέση P_2 υπό την επίδραση μιας δύναμης που δεν εξαρτάται από την ταχύτητα του σώματος ή ρητά από το χρόνο, μπορούμε να ψάξουμε για το εάν η δύναμη είναι διατηρητική ή όχι.
Το έργο της δύναμης είναι

$$W_{1,2} = \int_{P_1}^{P_2} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

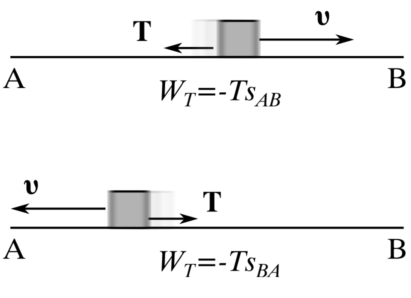
Η δύναμη είναι διατηρητική εάν το $W_{1,2}$ δεν εξαρτάται από τη διαδρομή που ενώνει τα σημεία P_1 και P_2, είναι δηλαδή ίδιο για όλες τις διαδρομές από το P_1 στο P_2. Επειδή $W_{1,2} = -W_{2,1}$, μπορούμε να δείξουμε ότι το έργο σε μια κλειστή διαδρομή από το P_1 στο P_1 είναι μηδέν *για ένα διατηρητικό πεδίο δυνάμεων.*

Παραδείγματα διατηρητικών δυνάμεων

- βαρύτητα κοντά στη Γη
- ελατήριο, και γενικά για κάθε μονοδιάστατη κίνηση υπό την επίδραση δύναμης, η οποία δεν εξαρτάται από την ταχύτητα.

Παραδείγματα μη-διατηρητικών δυνάμεων

- Τριβή σαν μακροσκοπική δύναμη, παράγει αρνητικό έργο, όπως κι αν κινηθεί το σώμα.



Σχήμα 4.9

Μικροσκοπικά πάνω σε έναν κλειστό δρόμο το σύστημα δεν επανέρχεται στην ίδια κατάσταση.

4.4.2 Δυναμική Ενέργεια

Έστω ότι το πεδίο δυνάμεων είναι διατηρητικό, διαλέγουμε ένα σημείο P_0 στο χώρο σαν σημείο αναφοράς (στην αρχή των αξόνων, στο άπειρο, εκεί που οι δυνάμεις μηδενίζονται, κάποιο αυθαίρετο σημείο) και ορίζουμε εκεί ότι η δυναμική ενέργεια $U(P_0) = 0$ (ή κάτι άλλο αυθαίρετα πεπερασμένο):

$$\Rightarrow \boxed{U(P) = -\int_{P_0}^{P} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + U(P_0)}$$

και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα κατά μήκος οποιουδήποτε συγκεκριμένου δρόμου. Κρατώντας το P_0 σταθερό $\Rightarrow U(P)$ είναι συνάρτηση μόνο του άνω ορίου P

$$\begin{aligned}
\Rightarrow U(P_2) - U(P_1) &= -\int_{P_0}^{P_2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{P_0}^{P_1} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int_{P_0}^{P_1} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} - \int_{P_1}^{P_2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{P_0}^{P_1} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \\
&= -\int_{P_1}^{P_2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -W_{P_1 \to P_2} \\
\Rightarrow W^F_{P_1 \to P_2} &= U(P_1) - U(P_2)
\end{aligned}$$

$$\boxed{U(P_1) - U(P_2) = \int_{P_1}^{P_2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}}$$

Από το προηγούμενο κεφάλαιο $W^F_{1\to 2} = \Delta K = K_2 - K_1$

$$\Rightarrow U(P_1) - U(P_2) = K_2 - K_1$$

$$\Rightarrow \boxed{K_1 + U(P_1) = K_2 + U(P_2)}$$

Η μηχανική ενέργεια $E = K + U$ διατηρείται σταθερή.

Παραδείγματα

(Α) Πεδίο βαρύτητας της Γης κοντά στη Γη:

$$P_0 = \text{αρχή των αξόνων} \Rightarrow U(z) = mgz$$

(Β) ελατήριο: $P_0 \equiv (x = 0) \Rightarrow U(x = 0) = 0$

$$\Rightarrow U(x) = -\int_0^x F(x')\mathrm{d}x' = -\int_0^x (-kx')\mathrm{d}x' = \frac{1}{2}kx^2$$

(Γ) Δύναμη $F(x) = -\dfrac{A}{x^2}, \quad P_0 = \infty, \quad U(x = \infty) = 0$

$$U(x) = -\int_\infty^x F(x')\mathrm{d}x' = +\int_\infty^x \left(+\frac{A}{x'^2}\right)\mathrm{d}x' = -\frac{A}{x'}\bigg|_\infty^x = -\frac{A}{x}$$

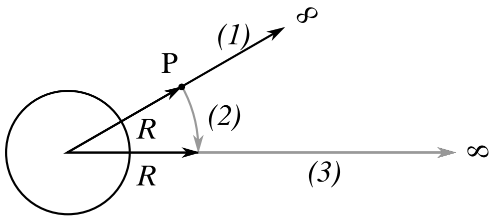
$$\Rightarrow U(x) = -\frac{A}{x}$$

(Δ) Πεδίο βαρύτητας της Γης μακριά από τη Γη

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= -\frac{GMm}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}, && \text{το πεδίο είναι διατηρητικό} \\
P_0 &= \infty, && \text{(η μάζα δεν εκτείνεται μέχρι το άπειρο)}
\end{aligned}$$

$$U(\boldsymbol{r} = \infty) = 0$$

$$U(\boldsymbol{R}) = -\int_\infty^{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int_\infty^{R} \left(-\frac{GMm}{r^2}\right)\mathrm{d}r = -\frac{GMm}{R}$$



Σχήμα 4.10: *Οι διαδρομές (1) και (2)+(3) είναι ισοδύναμες.*

Εάν έχουμε διατηρητικές δυνάμεις $\boldsymbol{F}$ και μη διατηρητικές δυνάμεις $\boldsymbol{T}$, τότε

$$\boxed{W^F_{1\to 2} + W^T_{1\to 2} = \Delta K} \Rightarrow U_{(1)} - U_{(2)} + W^T_{1\to 2} = \Delta K$$

$$\Rightarrow \boxed{W^T_{1\to 2} = \Delta K + \Delta U}$$

όπου $\Delta K = K_2 - K_1,\ \Delta U = U_{(2)} - U_{(1)}$.

Δυναμική Ενέργεια από το πεδίο βαρύτητας κοντά στη Γη

$$U(r) = -\frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{R+h} = -\frac{GMm}{R}\frac{1}{1+h/R} = -\frac{GMm}{R}\left(1 - \frac{h}{R} + \left(\frac{h}{R}\right)^2 + \dots\right)$$
$$= -\frac{GMm}{R} + \frac{GMm}{R^2}h + \dots$$
$$U(h) = \frac{GM}{R^2}mh = mgh, \qquad \text{όπου } g = \frac{GM}{R^2} \text{ και } R \text{ η ακτίνα της Γης.}$$

Μετράμε μόνο μεταβολές της δυναμικής ενέργειας

$$U(R+h) = U(R) + \frac{GMm}{R^2}h$$
$$U(h) = U(R+h) - U(R) = \frac{GM}{R^2}mh$$

4.4.3 Οι κεντρικές δυνάμεις $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = F(r)\hat{\boldsymbol{r}}$ είναι διατηρητικές (π.χ. δύναμη βαρύτητας)

$$W_{C_1} = \int_{C_1} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}, \qquad W_{C_2} = \int_{C_2} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

Χωρίζουμε τους δύο δρόμους C_1 και C_2 σε μικρά κομμάτια παίρνοντας ομόκεντρες σφαίρες ακτίνας $\boldsymbol{r}$ και $\boldsymbol{r} + \mathrm{d}\boldsymbol{r}$:

$$\mathrm{d}W_1 = \boldsymbol{F}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_1 = F(r)\mathrm{d}r_1 \cos\theta_1 = F(r)\mathrm{d}r$$

όπου $\mathrm{d}r_1 \cos\theta_1$ είναι η προβολή του $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1$ στην ακτίνα $= \mathrm{d}r$

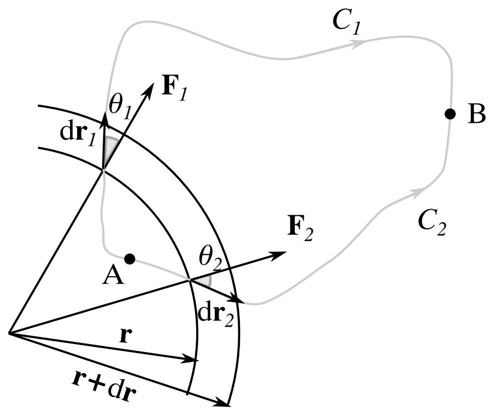
$$\mathrm{d}W_2 = \boldsymbol{F}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_2 = F(r)\mathrm{d}r_2 \cos\theta_2 = F(r)\mathrm{d}r$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}W_1 = \mathrm{d}W_2 \quad \text{για κάθε τέτοια στοιχειώδη διαδρομή}$$

Συνολικά

$$W_{C_1} = \sum \mathrm{d}W = W_{C_2}$$

επομένως, το έργο από το σημείο Α έως το Β είναι το ίδιο για κάθε διαδρομή, και άρα η δύναμη είναι διατηρητική.



Σχήμα 4.11

4.4.4 Υπολογισμός Δύναμης από τη Δυναμική Ενέργεια

Είδαμε ότι

$$\Delta U = U(P_2) - U(P_1) = -\int_{P_1}^{P_2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

για μια απειροστή μετακίνηση $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ μόνο $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{d}U = -\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}} \qquad \text{όπου } \mathrm{d}U = U(\boldsymbol{r} + \mathrm{d}\boldsymbol{r}) - U(\boldsymbol{r})$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{d}U = -F_x \mathrm{d}x - F_y \mathrm{d}y - F_z \mathrm{d}z}$$

Εάν έχουμε μια μονοδιάστατη κίνηση, τότε

$$U = U(x) \Rightarrow \mathrm{d}U = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = -F(x)\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \boxed{F(x) = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}}$$

Για τις τρεις διαστάσεις $U = U(x, y, z)$. Για μια τέτοια συνάρτηση έχουμε τη μερική παράγωγο και το ολικό διαφορικό της U, επομένως

$$\mathrm{d}U = \frac{\partial U}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial U}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial U}{\partial z}\mathrm{d}z$$

$$\Rightarrow F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

Παράδειγμα : Ελατήριο, $U(x) = (1/2)kx^2 \Rightarrow F(x) = -kx$

Παράδειγμα : Πεδίο βαρύτητας

$$U = -\frac{GMm}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Rightarrow \boldsymbol{F} = -\frac{GMm}{(x^2 + y^2 + z^2)}\hat{\boldsymbol{r}}, \quad \text{όπου } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r} \cdot \frac{\partial\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial x} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\frac{x}{r}$$

$$F_y = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\frac{y}{r} \quad \text{και} \quad F_z = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\frac{z}{r}, \qquad \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r} = \frac{gmM}{r^2}$$

$$\boldsymbol{F} = \hat{\boldsymbol{x}}F_x + \hat{\boldsymbol{y}}F_y + \hat{\boldsymbol{z}}F_z = -\frac{GMm}{r^2}\frac{x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}}}{r}$$

$$\boldsymbol{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

Γενικό αποτέλεσμα

Εάν $U = U(r),\ r = |\boldsymbol{r}|$, τότε

$$\boldsymbol{F} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\hat{\boldsymbol{r}}$$

Ορίζουμε

$$\boldsymbol{\nabla} = \hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\boldsymbol{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{F} = -\hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial U}{\partial x} - \hat{\boldsymbol{y}}\frac{\partial U}{\partial y} - \hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial U}{\partial z} = -\boldsymbol{\nabla}U$$

και $\mathrm{d}U = \boldsymbol{\nabla}U \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$.

Τοπικό κριτήριο για τις διατηρητικές δυνάμεις

Έως τώρα το κριτήριο για το εάν μια δύναμη ήταν συντηρητική–διατηρητική ήταν ότι το έργο της δύναμης σε κάθε διαδρομή από το Α στο Β είναι το ίδιο, δηλαδή το έργο από το Α στο Α είναι μηδέν

$$\int_{\substack{A\\C_1}}^{B} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\substack{A\\C_2}}^{B} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} \Rightarrow \oint_{A\to A} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$$

Αυτό το κριτήριο για τον έλεγχο μιας δύναμης δύσκολα εφαρμόζεται.
Υπάρχει ένα ισοδύναμο (τοπικό) κριτήριο που αποτελεί αναγκαία και ικανή συνθήκη για τις διατηρητικές δυνάμεις

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F} = 0 \quad (\text{διαβάζεται } \mathrm{curl}\boldsymbol{F} = 0)$$

για κάθε σημείο στο χώρο.

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{pmatrix} = \hat{\boldsymbol{x}}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \hat{\boldsymbol{y}}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \hat{\boldsymbol{z}}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

Εάν η δύναμη είναι συντηρητική, τότε

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla}U \Rightarrow \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}U = 0$$

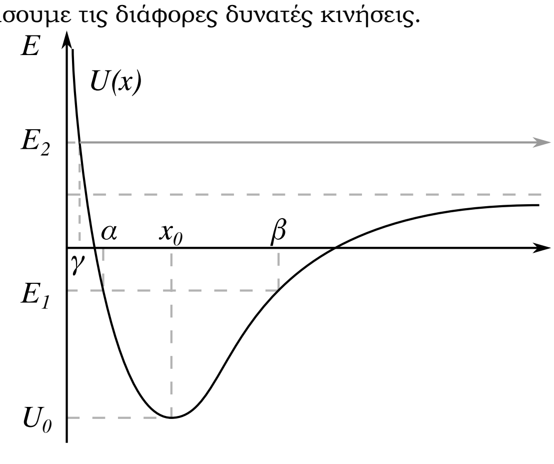
όπως μπορείτε εύκολα να δείτε κάνοντας τις παραγωγίσεις.

4.5 Δυναμική ενέργεια και σημεία αναστροφής, Δέσμιες τροχιές, σημεία ισορροπίας

Θα αναφερθούμε στην περίπτωση της μίας διάστασης.

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(x) = \text{σταθερή}$$

Σχεδιάζουμε πρώτα την καμπύλη της δυναμικής ενέργειας και μετά με βάση τη γραφική παράσταση της δυναμικής ενέργειας θα εξετάσουμε τις διάφορες δυνατές κινήσεις.



Εάν το σώμα έχει ενέργεια E_1, τότε η κίνησή του γίνεται υποχρεωτικά ανάμεσα στα σημεία α και β, που είναι *σημεία αναστροφής* ($v = 0$), $E = U(\alpha) = U(\beta)$ και η *τροχιά* λέγεται *δέσμια*.

Εάν $E = U_0 \Rightarrow v = 0$, άρα το σώμα ακίνητο σε κατάσταση ευσταθούς ισορροπίας (για μικρές αποκλίσεις γύρω από τη θέση ευσταθούς ισορροπίας έχουμε περιοδική κίνηση). Στην θέση ευσταθούς ισορροπίας ισχύει:

$$\left.\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} = 0, \qquad \left.\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_0} > 0$$

Εάν $E = E_2$, τότε το σώμα μπορεί να κινηθεί από τα σημεία γ έως το άπειρο, μη δέσμια τροχιά.
Για κάθε θέση του σώματος έχουμε:

$$v^2 = \frac{2}{m}\left[E - U(x)\right] \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(x)\right]} \Rightarrow t_1 - t_2 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}}$$

Παράδειγμα 1

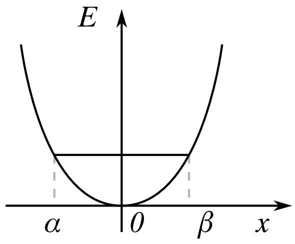
$$U(x) = \frac{b}{x^2} - \frac{2c}{x}, \qquad b > 0, \qquad c > 0$$

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\left(x = x_0 = \frac{b}{c}\right) = 0$$

$$U\left(x_0 = b/c\right) = -\frac{c^2}{b}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}(x_0) = \frac{2c^4}{b^3} > 0, \text{ ελάχιστο, σημείο ευσταθούς ισορροπίας.}$$

Παράδειγμα 2: Ελατήριο



Σχήμα 4.12

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

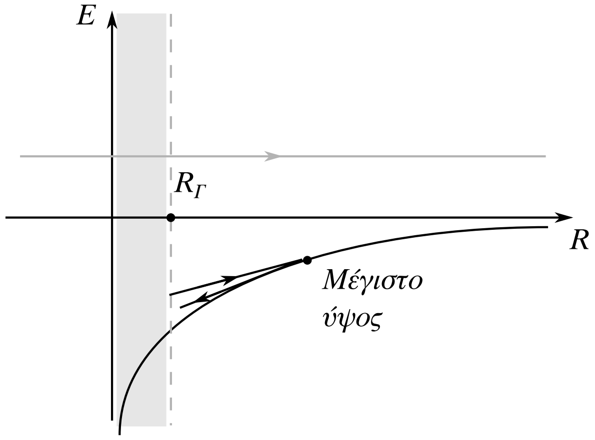
Περιοδική κίνηση ανάμεσα στα σημεία α και β, ταλάντωση

$$v^2 = \frac{2}{m}\left[E - U(x)\right]$$

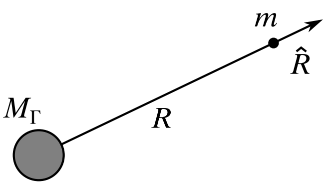
$$E = \frac{1}{2}k\alpha^2 = \frac{1}{2}k\beta^2 \Rightarrow |\alpha| = |\beta|$$

καθώς κινείται από το 0 στο β το σώμα επιβραδύνεται, η ταχύτητα ελαττώνεται, η δυναμική ενέργεια αυξάνεται, καθώς κινείται από το β στο 0 η ταχύτητα αυξάνεται και η δυναμική ενέργεια ελαττώνεται.

Παράδειγμα 3: Πεδίο βαρύτητας της Γης



Σχήμα 4.13



$$\boldsymbol{F} = -\frac{GM_\Gamma m}{R^2}\hat{\boldsymbol{R}}$$
$$U(R) = -\frac{GM_\Gamma m}{R}$$

Διατήρηση Μηχανικής Ενέργειας

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_\Gamma m}{R} = \text{σταθερό} = E$$

Ταχύτητα Διαφυγής

$$E(\text{επιφάνεια της Γης}) = E(\text{σε άπειρη απόσταση})$$

$$\frac{1}{2}mv_\Gamma^2 - \frac{GM_\Gamma m}{R_\Gamma} = \frac{1}{2}mv_\infty^2$$

επομένως, εάν $v_\infty^2 = 0$, τότε

$$\frac{1}{2}mv_\Gamma^2 = G\frac{M_\Gamma m}{R_\Gamma} \Rightarrow \boxed{v_\Gamma^2 = \frac{2GM_\Gamma}{R_\Gamma}}$$

Ενέργεια Σελήνης σε κυκλική κίνηση γύρω από τη Γη

$$\left\{\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}M_\Sigma v^2 - \frac{GM_\Gamma M_\Sigma}{R} \\ \frac{GM_\Gamma M_\Sigma}{R^2} &= M_\Sigma\frac{v^2}{R} \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow E = -\frac{1}{2}G\frac{M_\Gamma M_\Sigma}{R} < 0$$

4.6 Θερμότητα και Ισχύς

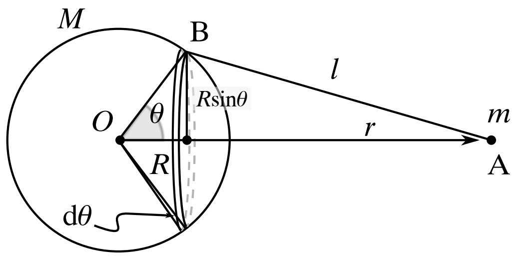
Θερμότητα : Μακροσκοπικά μια άλλη μορφή ενέργειας $\rightarrow$ μη διατηρητικές δυνάμεις $\rightarrow$ μικροσκοπικά έχουμε κινητική και δυναμική ενέργεια των μορίων του σώματος.

Ισχύς Δύναμης :

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$$

Μονάδα Ισχύος: $\quad 1\,\mathrm{Watt} = 1\,\mathrm{J/s}, \qquad 1\,\mathrm{hP} = 745,7\,\mathrm{W}$

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}$$



Σχήμα 4.14

4.7 Πεδίο Βαρύτητας Σφαιρικού Φλοιού

Ολική μάζα σφαιρικού φλοιού ίση με M άρα επιφανειακή πυκνότητα= $M/4\pi R^2$. Χωρίζουμε το σφαιρικό φλοιό σε δακτυλίδια με επίπεδο κάθετο στη γραμμή ΟΑ.

$$\Rightarrow \Delta M(\theta) = \frac{M}{4\pi R^2}(2\pi R\sin\theta)(R\mathrm{d}\theta) = \frac{M}{4\pi R^2}2\pi R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta$$
$$\Rightarrow \mathrm{d}M_{\delta\alpha\kappa\tau} = \frac{M}{2}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

και

$$\mathrm{d}U_{\delta\alpha\kappa\tau} = -G\frac{\mathrm{d}M_{\delta\alpha\kappa\tau}m}{l} = -G\frac{M}{2}m\frac{\sin\theta\mathrm{d}\theta}{l}$$
$$\Rightarrow U = \sum_{\text{δακτυλίδια}}\text{δυναμικών ενεργειών από κάθε δακτυλίδι} = -\frac{GMm}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta\mathrm{d}\theta}{l}$$

$$\text{Τρίγωνο ΟΑΒ} \Rightarrow l^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta \Rightarrow 2l\mathrm{d}l = 2Rr\sin\theta\mathrm{d}\theta$$
$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}l}{Rr} = \frac{\sin\theta\mathrm{d}\theta}{l}$$

Για τα όρια ολοκλήρωσης έχουμε: $\theta = 0 \Rightarrow l = r - R, \quad \theta = \pi \Rightarrow l = r + R$

$$\Rightarrow U = -\frac{GMm}{2}\frac{1}{Rr}\int_{r-R}^{r+R}\mathrm{d}l = -\frac{GMm}{2}\frac{1}{Rr}(r + R - (r - R))$$

$$\Rightarrow \boxed{U = -\frac{GMm}{2}\frac{1}{Rr}2R = -\frac{GMm}{r}} \quad \text{όταν έχουμε } r > R$$

Εάν η μάζα βρίσκεται μέσα στο φλοιό, τότε $\displaystyle\int_{R-r}^{R+r}\mathrm{d}l = 2r$

$$\Rightarrow \boxed{U = -\frac{GMm}{R} = \text{ σταθερή για κάθε } r} \quad \text{όταν έχουμε } r < R$$

επομένως όταν η μάζα είναι μέσα δεν δέχεται καμία δύναμη,

$$F = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r} = 0$$

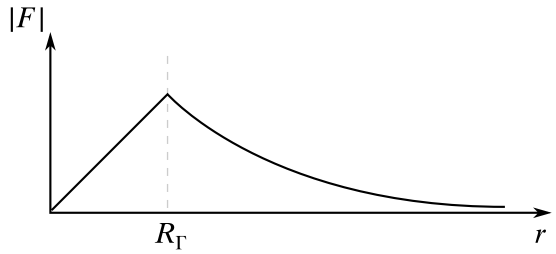
Εάν λοιπόν θέλουμε να υπολογίσουμε τη δύναμη της Γης σε μάζα μέσα στη Γη, τότε χωρίζουμε τη Γη σε δύο συμπαγείς φλοιούς, έναν με ακτίνα $(0, r)$ και έναν με ακτίνα (r, R_Γ). Ο εξωτερικός ασκεί δύναμη μηδέν στη m, ενώ για τον εσωτερικό έχουμε

$$F = -G\frac{M(r)m}{r^2} = -G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma^3}r^3\frac{m}{r^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{F = -\frac{GM_\Gamma m}{R_\Gamma^3}r} \quad \text{για } r < R_\Gamma$$

και

$$F = -\frac{GM_\Gamma m}{r^2} \quad \text{για } r > R_\Gamma.$$



Σχήμα 4.15

$$U(R) = -\int_\infty^R \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int_\infty^{R_\Gamma} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} - \int_{R_\Gamma}^{R} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\frac{GM_\Gamma m}{R_\Gamma} - \int_{R_\Gamma}^{R} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$
$$= -\frac{GM_\Gamma m}{R_\Gamma} - \int_{R_\Gamma}^{R}\left(-\frac{GM_\Gamma m}{R_\Gamma^3} r\right)\mathrm{d}r = \ldots = -\frac{3}{2}\frac{GM_\Gamma m}{R_\Gamma} + \frac{GM_\Gamma m}{R_\Gamma^3}\frac{R^2}{2}$$

όπου R η απόσταση από το κέντρο της Γης, $R < R_\Gamma$.