ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

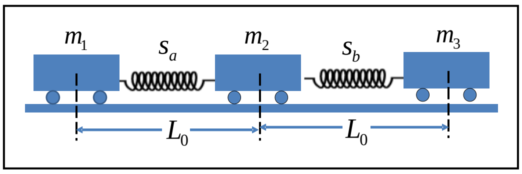
ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Πρόχειρες Σημειώσεις για τις ανάγκες του μαθήματος
«Φυσική – Ι (Μηχανική και Εισαγωγή στην Κυματική)»
της Σχολής Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών του ΕΜΠ

Ιωάννη Σ. Ράπτη
Καθηγητή ΣΕΜΦΕ - ΕΜΠ

Αθήνα, 2021

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΣΥΖΕΥΓΜΕΝΩΝ ΤΑΛΑΝΤΩΤΩΝ



Παράδειγμα. Ελεύθερο σύστημα τριών σωμάτων. Τρία βαγόνια αμαξοστοιχίας, με μάζες m_1, m_2 και m_3, συνδέονται με ελατήρια σταθερών s_a και s_b, όπως στο σχήμα. Το σύστημα ακινητεί, με την απόσταση ανάμεσα στα κέντρα των βαγονιών να είναι ίση με L_0. Κατά τη χρονική στιγμή $t=0$, δίνεται στιγμιαία ώθηση στο βαγόνι 1, η οποία του προσδίδει στιγμιαία ταχύτητα $\upsilon_1(t=0)=\upsilon_{01}$.

(α) Θεωρήστε ένα στιγμιότυπο της κίνησης, κάποια χρονική στιγμή $t>0$, όταν το κέντρο κάθε βαγονιού έχει απομακρυνθεί από την αρχική του θέση κατά $x_1(t)$, $x_2(t)$ και $x_3(t)$, αντίστοιχα, και γράψτε τη διαφορική εξίσωση κίνησης που ικανοποιεί κάθε μία από τις συναρτήσεις $x_1(t), x_2(t)$, $x_3(t)$ θεωρώντας αμελητέες τις τριβές από το δάπεδο.

(β) Αναζητήστε λύσεις με τη μορφή Κανονικών Τρόπων Ταλάντωσης [δηλ. υποθέστε ότι και οι τρείς μάζες κινούνται με κοινή συχνότητα (ω) και φάση (φ), αλλά με διαφορετικά πλάτη Α, Β, Γ] και, αντικαθιστώντας στις εξισώσεις κίνησης του ερωτήματος (α), διατυπώστε τη συνθήκη επιλυσιμότητας του προβλήματος.

(γ) Στο αποτέλεσμα του ερωτήματος (β) υποθέστε ότι $m_1=m_2=m_3=m$ και $s_a=s_b=s$ και προσδιορίστε, συναρτήσει της χαρακτηριστικής συχνότητας $\omega_0=s/m$, τις συχνότητες των ΚΤΤ που προκύπτουν από την επίλυση της συνθήκης του ερωτήματος (β).

(δ) Προσδιορίστε τα πηλίκα των πλατών Β/Α και Γ/Α, για κάθε έναν ΚΤΤ

(ε) Γράψτε τη γενική λύση του προβλήματος ως γραμμικό συνδυασμό ΚΤΤ, αναφέρετε ποιές είναι οι σταθερές ολοκλήρωσης και εξηγήστε από ποιές συνθήκες προσδιορίζονται.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) $m_1\ddot{x}_1(t)=-s_a(x_1-x_2)$

$m_2\ddot{x}_2(t)=-s_a(x_2-x_1)-s_b(x_2-x_3)$

$m_3\ddot{x}_3(t)=-s_b(x_3-x_2)$

(β) $x_1(t)=\mathrm{A}\cos(\omega t+\varphi)$, $x_2(t)=\mathrm{B}\cos(\omega t+\varphi)$, $x_3(t)=\Gamma\cos(\omega t+\varphi)$,

$\ddot{x}_1(t)=-\omega^2\mathrm{A}\cos(\omega t+\varphi)$, $\ddot{x}_2(t)=-\omega^2\mathrm{B}\cos(\omega t+\varphi)$, $\ddot{x}_3(t)=-\omega^2\Gamma\cos(\omega t+\varphi)$,

Αντικαθιστώντας στις εξισώσεις κίνησης του (α) παίρνουμε ένα γραμμικό ομογενές σύστημα (3x3) για τα πλάτη Α, Β, Γ, με συνθήκη επιλυσιμότητας

$$\begin{aligned}&(s_a-\omega^2 m_1)\mathrm{A}-s_a\mathrm{B}+0\Gamma=0\\&-s_a\mathrm{A}+(s_a+s_b-\omega^2 m_2)\mathrm{B}-s_b\Gamma=0\\&0\mathrm{A}-s_b\mathrm{B}+(s_b-\omega^2 m_3)\Gamma=0\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad\begin{vmatrix}\left(s_a/m_1-\omega^2\right) & -s_a/m_1 & 0\\ -s_a/m_2 & \left(\dfrac{s_a+s_b}{m_2}-\omega^2\right) & -s_b/m_2\\ 0 & -s_b/m_3 & \left(s_b/m_3-\omega^2\right)\end{vmatrix}=0$$

(γ) $$\begin{vmatrix}(\omega_0^2-\omega^2) & -\omega_0^2 & 0\\ -\omega_0^2 & (2\omega_0^2-\omega^2) & -\omega_0^2\\ 0 & -\omega_0^2 & (\omega_0^2-\omega^2)\end{vmatrix}=0\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left(\omega_0^2-\omega^2\right)\left[\left(2\omega_0^2-\omega^2\right)\left(\omega_0^2-\omega^2\right)-\omega_0^4\right]+\omega_0^2\left[-\omega_0^2\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\right]=0$$

$$\Rightarrow\ \left(\omega_0^2-\omega^2\right)\left[\left(2\omega_0^2-\omega^2\right)\left(\omega_0^2-\omega^2\right)-\omega_0^4-\omega_0^4\right]=0$$

$$\Rightarrow\ \left(\omega_0^2-\omega^2\right)\left[\left(2\omega_0^2-\omega^2\right)\left(\omega_0^2-\omega^2\right)-\omega_0^4-\omega_0^4\right]=0$$

$$\Rightarrow\ \left(\omega_0^2-\omega^2\right)\left[2\omega_0^4-2\omega_0^2\omega^2-\omega^2\omega_0^2+\omega^4-2\omega_0^4\right]=0$$

$$\Rightarrow\ \left(\omega_0^2-\omega^2\right)\left[\omega^4-3\omega_0^2\omega^2\right]=0\ \Rightarrow\ \boxed{\omega^2\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\left[\omega^2-3\omega_0^2\right]=0}$$

Από τον μηδενισμό του τελευταίου γινομένου, προκύπτουν οι τρεις ρίζες

$$\boxed{\omega_1=0,\quad \omega_2=\omega_0,\quad \omega_3=\omega_0\sqrt{3}}$$

(δ$_1$) Αντικαθιστώντας $\omega=\omega_1=0$, στις εξισώσεις κίνησης των μαζών m_1 και m_3, παίρνουμε:

$$\left\{\begin{array}{l}\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\mathrm{A}_1-\omega_0^2\mathrm{B}_1=0\\ -\omega_0^2\mathrm{B}_1+\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\Gamma_1=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\omega_0^2\mathrm{A}_1-\omega_0^2\mathrm{B}_1=0\\ -\omega_0^2\mathrm{B}_1+\omega_0^2\Gamma_1=0\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{\mathrm{A}_1=\mathrm{B}_1=\Gamma_1}$$

Το φυσικό νόημα τόσο της συχνότητας $\omega_1=0$ όσο και των πλατών $\mathrm{A}_1=\mathrm{B}_1=\Gamma_1$, είναι ότι έχουμε απεριοδική κίνηση του συστήματος ($\omega_1=0 \ \Rightarrow$ περίοδος $T\to\infty$), δηλ., είτε ακινησία είτε μετατόπιση με ίδια σταθερή ταχύτητα όλων των σωμάτων, (Παράλληλη μετατόπιση όλου του συρμού).

(δ$_2$) Αντικαθιστώντας $\omega=\omega_2=\omega_0$, στις εξισώσεις κίνησης των μαζών m_1 και m_3, παίρνουμε:

$$\left\{\begin{array}{l}\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\mathrm{A}_2-\omega_0^2\mathrm{B}_2=0\\ -\omega_0^2\mathrm{B}_2+\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\Gamma_2=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}0\mathrm{A}_2-\omega_0^2\mathrm{B}_2=0\\ -\omega_0^2\mathrm{B}_2+0\Gamma_2=0\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{\mathrm{B}_2=0}$$

Και αντικαθιστωντας $\mathrm{B}_2=0$, στην εξίσωση κίνησης της μάζας m_2, παίρνουμε:

$$-\omega_0^2\mathrm{A}_2+\left(2\omega_0^2-\omega^2\right)\mathrm{B}_2-\omega_0^2\Gamma_2=0\ \Rightarrow\ -\omega_0^2\mathrm{A}_2-\omega_0^2\Gamma_2=0\ \Rightarrow\ \boxed{\mathrm{A}_2=-\Gamma_2}$$

Ακινησία του κεντρικού βαγονιού και συμμετρική ταλάντωση των άλλων δύο (Συμμετρική Ταλάντωση).

(δ$_3$) Αντικαθιστώντας $\omega=\omega_3=\omega_0\sqrt{3}$, στις εξισώσεις κίνησης των μαζών m_1 και m_3, παίρνουμε:

$$\left\{\begin{array}{l}\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\mathrm{A}_3-\omega_0^2\mathrm{B}_3=0\\ -\omega_0^2\mathrm{B}_3+\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\Gamma_3=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}-2\omega_0^2\mathrm{A}_3-\omega_0^2\mathrm{B}_3=0\\ -\omega_0^2\mathrm{B}_3-2\omega_0^2\Gamma_3=0\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{\begin{array}{l}\mathrm{A}_3=-\mathrm{B}_3/2\\ \Gamma_3=-\mathrm{B}_3/2\end{array}}$$

Παράλληλη κίνηση των ακραίων, αντίθετα ως προς το κεντρικό, και με πλάτος ίσο με το μισό από το πλάτος του κεντρικού (Αντι-συμμετρική Ταλάντωση)

(ε)

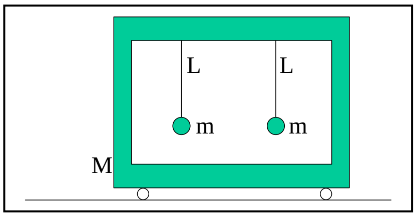
$$x_1(t)=\mathrm{A}_1\cos(\varphi_1)+\mathrm{A}_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2)+\mathrm{A}_3\cos(\omega_3 t+\varphi_3)$$

$$x_2(t)=\mathrm{A}_1\cos(\varphi_1)+0\cdot\cos(\omega_2 t+\varphi_2)-2\mathrm{A}_3\cos(\omega_3 t+\varphi_3)$$

$$x_3(t)=\mathrm{A}_1\cos(\varphi_1)-A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2)+\mathrm{A}_3\cos(\omega_3 t+\varphi_3)$$

Οι σταθερές ολοκλήρωσης είναι τα τρία πλάτη, $\mathrm{A}_{1,2,3}$ και οι τρείς φάσεις $\varphi_{1,2,3}$, και προκύπτουν από τις αρχικές συνθήκες (θέσεις–ταχύτητας)x3. Τα υπόλοιπα πλάτη $\mathrm{B}_{1,2,3}$ και $\Gamma_{1,2,3}$ έχουν προκύψει από το ερώτημα (δ) συναρτήσει των $\mathrm{A}_{1,2,3}$.

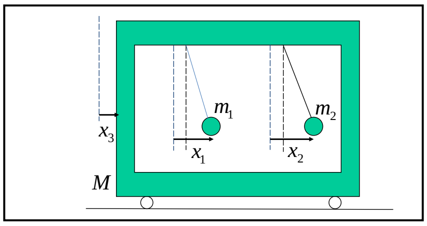
Στα ελεύθερα συστήματα n-σωμάτων, ελαστικά συζευγμένων, έχουμε (n-1) Κανονκούς Τρόπους Ταλάντωση, ενώ ο n-στός τρόπος αντιστοιχεί στην ακινησία ή την ισοταχή κίνηση, με σταθερή ταχύτητα, όλων των σωμάτων του συστήματος.



Παράδειγμα. Αδρανειακή σύζευξη δύο εκκρεμών. Δύο ιδανικά εκκρεμή μάζας m και μήκους L, το καθένα, κρέμονται από δύο διαφορετικά σημεία της οροφής μικρού οχήματος μάζας M, το οποίο μπορεί να κινείται ελεύθερα, χωρίς τριβές, πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Το σύστημα βρίσκεται μέσα σε κατακόρυφο πεδίο βαρύτητας g. Τα δύο εκκρεμή εκτρέπονται κατά μικρές γωνίες από την κατακόρυφο, έτσι ώστε να κάνουν ταλαντώσεις μικρών γωνιών, μένοντας στο κατακόρυφο επίπεδο που περνάει από τα σημεία ανάρτησης. α) Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης για κάθε ένα από τα τρία σώματα (m, m, M). β) Υποθέστε ότι το σύστημα εκτελεί κίνηση σε κανονικό τρόπο ταλάντωσης (ΚΤΤ : κοινή συχνότητα) και διατυπώστε τη συνθήκη υπολογισμού των συχνοτήτων των κανονικών τρόπων ταλάντωσης. γ) Επιλύστε τη χαρακτηριστική εξίσωση, για την περίπτωση m=M, και προσδιορίστε τις συχνότητες και τα σχετικά πλάτη των ΚΤΤ.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Μετρώντας τις απομακρύνσεις από τις αρχικές θέσεις ηρεμίας (αδρανειακά σημεία αναφοράς, εστιγμένες γραμμές στο σχήμα), και στην προσέγγιση των μικρών γωνιών, γράφουμε τις εξισώσεις κίνησης:



$$m_1\ddot{x}_1 = -T_{1x} = -m_1 g\frac{x_1 - x_3}{L}$$

$$m_2\ddot{x}_2 = -T_{2x} = -m_2 g\frac{x_2 - x_3}{L}$$

$$M\ddot{x}_3 = T_{1x} + T_{2x} = m_1 g\frac{x_1 - x_3}{L} + m_1 g\frac{x_2 - x_3}{L}$$

Αναζητώντας λύσεις με τη μορφή κανονικών τρόπων ταλάντωσης

$$x_1 = \mathrm{A}\cos(\omega t + \varphi), \quad x_2 = \mathrm{B}\cos(\omega t + \varphi), \quad x_3 = \Gamma\cos(\omega t + \varphi)$$

και αντικαθιστώντας στις εξισώσεις κίνησης

$$\left(-\omega^2 + g/L\right)\mathrm{A} + 0\cdot\mathrm{B} - (g/L)\Gamma = 0$$

$$0\cdot\mathrm{A} + \left(-\omega^2 + g/L\right)\mathrm{B} - (g/L)\Gamma = 0$$

$$-\frac{m_1}{M}\frac{g}{L}\mathrm{A} - \frac{m_2}{M}\frac{g}{L}\mathrm{B} + \left(-\omega^2\frac{m_1+m_2}{M}\frac{g}{L}\right)\Gamma = 0$$

Συνθήκη επιλυσιμότητας του (3×3) ομογενούς συστήματος, για τα $(\mathrm{A},\mathrm{B},\Gamma)$

$$\begin{vmatrix} \left(-\omega^2 + g/L\right) & 0 & -g/L \\ 0 & \left(-\omega^2 + g/L\right) & -g/L \\ -\frac{m_1}{M}\frac{g}{L} & -\frac{m_2}{M}\frac{g}{L} & \left(-\omega^2\frac{m_1+m_2}{M}\frac{g}{L}\right) \end{vmatrix} = 0$$

(γ) Υποθέτοντας $m_1 = m_1 = M$, $(g/L) = \omega_0^2$, και αναπτύσσοντας την ορίζουσα:

$$\omega^2\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\left(\omega^2 - 3\omega_0^2\right) = 0,$$

Επομένως, οι ιδιοσυχνότητες και οι τα αντίστοιχα ιδιο-διανύσματα είναι

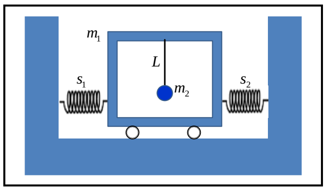
$$\omega_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \{\mathrm{A} = \mathrm{B} = \Gamma\}$$

$$\omega_2 = \omega_0 \quad \Rightarrow \quad \{\mathrm{A} = -\mathrm{B}, \Gamma = 0\}$$

$$\omega_2 = \omega_0\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \{\mathrm{A} = \mathrm{B} = -\Gamma/2\}$$

Σχόλιο: Αν οι μετατοπίσεις x_1, x_2, είχαν μετρηθεί σε σχέση με τις κατακορύφους από τα σημεία ανάρτησης, θα έπρεπε να προστεθούν αδρανειακές δυνάμεις στις αντίστοιχες μάζες, επειδή τα σημεία ανάρτησης είναι μη αδρανειακά σημεία αναφοράς. Αυτοί οι όροι των αδρανειακών δυνάμεων $\left(-m_1\ddot{x}_3, -m_2\ddot{x}_3\right)$ θα έπαιζαν το ρόλο σύζευξης του καθενός εκκρεμούς με το όχημα.

Το ηλεκτρικό ανάλογο του προηγούμενου παραδείγματος είναι η επαγωγική σύζευξη δύο ιδανικών κυκλωμάτων L-C, μέσω της αμοιβαίας επαγωγής τους, η οποία οφείλεται στη χωρική γειτνίαση των δύο πηνίων.



Παράδειγμα. Συνδυασμός ελαστικής και αδρανειακής σύζευξης. Τροχήλατο όχημα, μάζας m_1, το οποίο μπορεί να κινείται χωρίς τριβές σε οριζόντιο επίπεδο, συνδέεται σε ακλόνητα τοιχώματα μέσω δύο ελατηρίων, με σταθερές σκληρότητας s_1 και s_2, αντίστοιχα, όπως στο σχήμα. Από την οροφή του οχήματος κρέμεται σημειακή μάζα m_2, μέσω αβαρούς ράβδου μήκους L. Ενώ το σύστημα συγκρατείται σε κατάσταση ισορροπίας, (έτσι ώστε τα δύο ελατήρια να έχουν το φυσικό τους μήκος), εκτρέπουμε το εκκρεμές (m_2, L) κατά μικρή γωνία $\theta_0\ (\sin\theta_0 \approx \tan\theta_0 \approx \theta_0)$ και αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο. (α) Γράψτε τις διαφορικές εξισώσεις κίνησης των μαζών m_1 (μετατόπιση: x_1) και m_2 (μετατόπιση: x_2), για κινήσεις μικρού πλάτους. (β) Αναζητείστε λύσεις με τη μορφή Κανονικών Τρόπων Ταλάντωσης $x_1(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, $x_2(t) = B\cos(\omega t + \varphi)$ και, αντικαθιστώντας στις διαφορικές εξισώσεις του (α), γράψτε τη σχέση επιλυσημότητας του συστήματος. (γ) Για την περίπτωση που $m_1 = m_2 = m$, $s_1 = s_2 = s$ και $\dfrac{s}{m} = \dfrac{g}{L} = \omega_0$, υπολογίστε τις συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης, συναρτήσει του ω_0, και τις κανονικές συντεταγμένες,

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Εξισώσεις κίνησης

$$\begin{Bmatrix} m_1\ddot{x}_1 = -(s_1 + s_2)x_1 + T\sin\theta \\ m_2\ddot{x}_2 = -T\sin\theta \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} m_1\ddot{x}_1 = -(s_1 + s_2)x_1 + m_2 g\dfrac{x_2 - x_1}{L} \\ m_2\ddot{x}_2 = -m_2 g\dfrac{x_2 - x_1}{L} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} m_1\ddot{x}_1 + (s_1 + s_2)x_1 + m_2 g\dfrac{x_1}{L} - m_2 g\dfrac{x_2}{L} = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + m_2 g\dfrac{x_2}{L} - m_2 g\dfrac{x_1}{L} = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} m_1\ddot{x}_1 + \left(s_1 + s_2 + m_2\dfrac{g}{L}\right)x_1 - m_2 g\dfrac{x_2}{L} = 0 \\ -m_2\dfrac{g}{L}x_1 + m_2\ddot{x}_2 + m_2\dfrac{g}{L}x_2 = 0 \end{Bmatrix}$$

(β) Αντικαθιστώντας τα $x_1(t) = A\cos(\omega t)$ και $x_2(t) = B\cos(\omega t)$, και παραγώγους έχουμε:

$$\begin{Bmatrix} -\omega^2 m_1 A + \left(s_1 + s_2 + m_2 \dfrac{g}{L}\right) A - m_2 \dfrac{g}{L} B = 0 \\ -m_2 \dfrac{g}{L} A - \omega^2 m_2 B + m_2 \dfrac{g}{L} B = 0 \end{Bmatrix}$$

Για την επιλυσιμότητα του συστήματος πρέπει να ισχύει:

$$\begin{vmatrix} \left(s_1 + s_2 + m_2 \dfrac{g}{L}\right) - \omega^2 m_1 & -m_2 \dfrac{g}{L} \\ -m_2 \dfrac{g}{L} & m_2 \dfrac{g}{L} - \omega^2 m_2 \end{vmatrix} = 0$$

(γ) Για την περίπτωση που $m_1 = m_2 = m$, $s_1 = s_2 = s$ και $\dfrac{s}{m} = \dfrac{g}{L} = \omega_0$

$$\begin{vmatrix} \left(2\dfrac{s}{m} + \dfrac{g}{L}\right) - \omega^2 & -\dfrac{g}{L} \\ -\dfrac{g}{L} & \dfrac{g}{L} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3\omega_0^2 - \omega^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & \omega_0^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_{1,2}^2 = \left(2 \pm \sqrt{2}\right) \omega_0^2}$$

ΠΕΡΙΟΔΙΚΕΣ ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ ΣΥΖΕΥΓΜΕΝΩΝ ΤΑΛΑΝΤΩΤΩΝ

Στην ενότητα αυτή μελετώνται συστήματα που αποτελούνται από μεγάλο αριθμό συζευγμένων ταλαντωτών, οι οποίοι όμως βρίσκονται σε μία περιοδική διάταξη. Ένα τέτοιο σύστημα Ν-ταλαντωτών παρουσιάζει ένα πλήθος, Ν-τον-αριθμό, Κανονικών Τρόπων Ταλάντωσης[1], οι οποίοι εκδηλώνονται, όπως αναμένεται, ανεξάρτητα από την περιοδικότητα της διάταξης. Το νέο στοιχείο της περιοδικότητας έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση κάποιας κανονικότητας στη σχέση μεταξύ των διαδοχικών συχνοτήτων των ΚΤΤ και, σε ειδικότερες περιπτώσεις, τον επιμερισμό του πεδίου συχνοτήτων σε περιοχές συχνοτήτων που είναι επιτρεπτές στο σύστημα (ζώνες συχνοτήτων) και σε περιοχές συχνοτήτων που δεν είναι επιτρεπτές στο σύστημα (χάσματα συχνοτήτων). Η συμπεριφορά αυτή προεικάζει, με κάποιο τρόπο, τη συμπεριφορά των ηλεκτρονίων όταν κινούνται, σύμφωνα με τους νόμους της Κβαντομηχανικής, μέσα, π.χ., στο περιοδικό περιβάλλον ενός κρυσταλλικού υλικού, και τη δημουργία των αντίστοιχων ενεργειακών ζωνών, (σθένους, αγωγιμότητας) και των ενεργειακών χασμάτων.

Επιπλέον, η μελέτη αυτών των συστημάτων είναι χρήσιμη διότι με μία κατάλληλ οριακή διαδικασία, π.χ., συνεχή υποδιπλασιασμό των μαζών και συνεχή υποδιπλασιασμό των μεταξύ τους αποστάσεων, μπορεί κανείς να προσεγγίσει τις εξισώσεις που περιγράφουν την κλασική συμπεριφορά του συνεχούς σώματος, όπως είναι οι κυματικές εξισώσεις σε μία ή περισσότερες διαστάσεις.

Παράδειγμα 2-3.1 ***Περιοδική γραμμική διάταξη Ν-σωματιδίων, ίδιας μάζας m, σε ιδανική χορδή αμελητέας μάζας, η οποία τείνεται με τάση Τ.*** Μονοδιάστατο περιοδικό σύστημα αποτελείται από *Ν* σημειακές μάζες m, στερεωμένες σε ίσες αποστάσεις *a*, μεταξύ τους, σε ιδανική μη-εκτατή χορδή μηδενικής μάζας, η οποία τείνεται με τάση *Τ*. Το μήκος της χορδής είναι $L = \left(N+1\right)a$, και τα δύο άκρα της (που απέχουν επίσης απόσταση *a* από τις ακραίες μάζες) είναι στερεωμένα σε ακλόνητα σημεία. Οι μάζες διαταράσσονται ώστε να εκτελούν ταλάντωση εγκάρσια ως προς την χορδή (κινούμενες όλες στο

[1] Αν το σύστημα είναι ελεύθερο, (δηλ., δεν είναι στερεωμένου, μέσω ενός τουλάχιστον ταλαντωτή, σε ακλόνητο σημείο), τότε το κέντρο μάζας του είτε θα ακινητεί είτε θα κινείται ισοταχώς, οπότε αυτή η α-περιοδική κίνηση αντιστοιχεί σε μηδενική συχνότητα, με αποτέλεσμα να μειώνονται κατά μία οι συχνότητες των ΚΤΤ (από Ν, σε Ν-1).

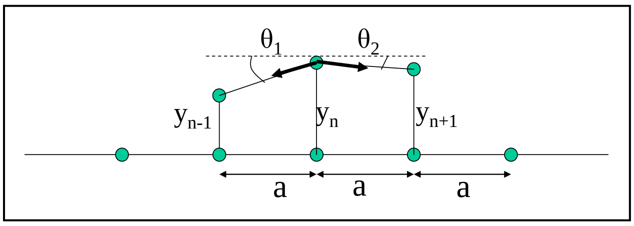
ίδιο οριζόντιο επίπεδο) με μικρά πλάτη (έτσι ώστε για τις γωνίες που σχηματίζει η χορδή, ως προς την αρχική της θέση, να ισχύει η προσέγγιση $\sin\theta \approx \tan\theta \approx \theta$ και, επίσης, η τάση T να διατηρεί το μέτρο της). Θεωρούμε ότι η τάση T της χορδής είναι πολύ μεγαλύτερη από το βάρος των μαζών, έτσι ώστε η επίδραση του βάρους να θεωρείτε αμελητέα στην εξέλιξη της κίνησης. [Ισοδύναμα: θεωρούμε ότι το σύστημα βρίσκεται εκτός πεδίου βαρύτητα και οι βαρυτικές αλληλεπιδράσεις μεταξύ των μαζών είναι αμελητέες σε σχέση με την τάση της χορδής]

(α) Γράψτε τις διαφορικές εξισώσεις κίνησης που ισχύουν για τις απομακρύνσεις y_n από την θέση ισορροπίας τους.

(β) Δείξτε ότι, σε κανονικό τρόπο ταλάντωσης (ΚΤΤ) με συχνότητα ω, τα πλάτη ταλάντωσης τριών διαδοχικών μαζών ικανοποιούν σχέσεις της μορφής $cA_r - A_{r+1} - A_{r-1} = 0$, (εξίσωση διαφορών), και προσδιορίστε την τιμή της σταθεράς c, συναρτήσει των m, ω, a, T.

(γ) Αν τα πλάτη είναι της μορφής $A_n = C\sin(n\delta)$, βρείτε τη σχέση που πρέπει να ικανοποιεί το δ, με βάση τις συνοριακές συνθήκες. Από την σχέση που ικανοποιεί το δ και απαιτώντας να ικανοποιούν τα A_{n-1}, A_n, A_{n+1}, την συνθήκη του ερωτήματος (β), προσδιορίστε τις επιτρεπτές τιμές του ω.

(δ) Για την περίπτωση N=3, σχεδιάστε τους τρεις ΚΤΤ, είτε με βάση τα αποτελέσματα του ερωτήματος (γ), είτε με βάση επιχειρήματα συμμετρίας.



(α) Η διαφορική εξίσωση του n-στού σωματιδίου (βλ. σχήμα), γράφεται

$$m\ddot{y}_n = -T\sin\theta_1 - T\sin\theta_2$$

Με τις προσεγγίσεις $\sin\theta \approx \theta \approx \tan\theta$, έχουμε

$$m\ddot{y}_n = -T\frac{y_n - y_{n-1}}{a} - T\frac{y_n - y_{n+1}}{a} \qquad (1)$$

(β) Για κανονικούς τρόπους ταλάντωσης (ΚΤΤ) έχουμε $y_n = A_n\cos(\omega t)$

και αντίστοιχα: $y_{n-1} = A_{n-1}\cos(\omega t)$, $y_{n+1} = A_{n+1}\cos(\omega t)$

Αντικαθιστώντας στην διαφορική εξίσωση κίνησης, έχουμε

$$-\omega^2 m\frac{a}{T}A_n\cos(\omega t) = (A_{n+1} + A_{n-1} - 2A_n)\cos(\omega t) \quad \Rightarrow \quad -\omega^2 m\frac{a}{T}A_n = (A_{n+1} + A_{n-1} - 2A_n)$$

$2A_n - \omega^2 m\frac{a}{T}A_n - A_{n+1} - A_{n-1} = 0$, ή, ισοδύναμα $\quad cA_n - A_{n+1} - A_{n-1} = 0, \qquad (2)$

όπου $\quad c = 2 - \omega^2 m\frac{a}{T} = 2 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}, \qquad \omega_0^2 = \frac{\mathrm{T}}{ma}$

Με τον τρόπο αυτό, από ένα σύστημα Ν-διαφορικών εξισώσεων ($2^{ης}$ τάξεως, γραμμικών, με σταθερούς συντελεστές, και Ομογενές), μεταβαίνουμε σε ένα N×N Ομογενές γραμμικό σύστημα για τα πλάτη $A_n, \quad n = 1,\ldots,N$, κάθε μία από τις οποίες έχει τη δομή της εξίσωσης $cA_n - A_{n+1} - A_{n-1} = 0$, εκτός από την πρώτη, $cA_1 - A_2 = 0$, και την τελευταία $cA_N - A_{N-1} = 0$, για τις οποίες δεν υπάρχει προηγούμενος και επόμενος όρος, αντίστοιχα (δεδομένου ότι οι θέσεις n=0 και n=N+1 αναφέρονται στα ακλόνητα άκρα της χορδής). Επειδή το σύστημα είναι ομογενές, η συνθήκη επιλυσιμότητάς του διατυπώνεται ως μηδενισμός της ορίζουσας των συντελεστών του

$$\begin{vmatrix} c & -1 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ -1 & c & -1 & 0 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ 0 & -1 & c & -1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & -1 & c & -1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & . & 0 & -1 & c & -1 & 0 \\ 0 & . & . & . & . & 0 & 0 & -1 & c & -1 \\ 0 & . & . & . & . & 0 & 0 & 0 & -1 & c \end{vmatrix} = 0 \qquad (3)$$

Είναι φανερό ότι το ανάπτυγμα αυτής της (N×N)-ορίζουσας θα οδηγήσει σε ένα πολυώνυμο N-τάξης, ως προς c, (δηλ., ως προς ω^2), από την απαίτηση μηδενισμού του οποίου θα προκύψουν N-ρίζες, $\omega_i^2,\ \ i=1,...,N$,οι θετικές ρίζες των οποίων θα αποτελούν τις συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης.

(γ) Αν θέλουμε να λύσουμε το πρόβλημα για ένα γενικό N, αντί να επιλύσουμε τη χαρακτηριστική ορίζουσα, μπορούμε να εκμεταλλευτούμε τα χαρακτηριστικά συμμετρίας του προβλήματος και να δοκιμάσουμε σχηματισμούς των πλατών απομάκρυνσης, $A_n,\ \ n=1,...,N$, που να έχουν τη μορφή «στάσιμων κυμάτων», προκειμένου να ελέγξουμε αν επιλύεται το σύστημα και, σε αυτή την περίπτωση, να υπολογίσουμε τις τιμές χαρακτηριστικών συχνοτήτων που προκύπτουν για τον κάθε Κανονικό Τρόπο Ταλάντωσης.

[Αυτή η αντιμετώπιση του προβλήματος μοιάζει με τον τρόπο που αντιμετωπίζει κανείς το πρόβλημα των δύο όμοιων εκκρεμών, τα οποία συνδέονται με ένα ελατήριο που έχει φυσικό μήκος ίσο με την απόσταση των εκκρεμών σε κατάσταση ισορροπίας. Σε αυτή την περίπτωση, είναι επίσης εύκολο να διαπιστώσει κανείς με ποιοτικά μεν, ακριβή δε, επιχειρήματα συμμετρίας, ότι η συμμετρική και η αντι-συμμετρική παραμόρφωση του συστήματος, έχει ως αποτέλεσμα ταλάντωση με διαφορετική συχνότητα για κάθε περίπτωση, αλλά κοινή και για τα δύο εκκρεμή]

Αν υποθέσουμε, λοιπόν, ότι $A_n = C\sin\left(n\delta+\varphi\right)$, και έχουμε N-σωματίδια,, τότε θα πρέπει να εξασφαλισθεί η ακινησία των άκρων της χορδής, (n=0 και n=N+1).

Οι *συνοριακές συνθήκες* της ακινησίας των άκρων της χορδής, οδηγούν στα εξής συμπεράσματα:

Η πρώτη απαίτηση $\quad A_{n=0}=0 \ \Rightarrow\ \varphi=0 \qquad (4)$

Η δεύτερη απαίτηση

$$A_{n=N+1}=0 \ \Rightarrow\ \sin\left((N+1)\delta\right)=0 \ \Rightarrow\ (N+1)\delta=s\pi,\quad s=1,2,...,N,N+1,...$$

$$\Rightarrow\ \delta_s=\frac{s\pi}{N+1},\quad s=1,2,...,N \qquad (5)$$

(θα δείξουμε ότι οι τιμές $s=N+1,N+2,....$ αντιστοιχούν σε λύσεις φυσικά ισοδύναμες με τις προηγούμενες 1,...,N.

Γράφοντας τις αντίστοιχες εκφράσεις για τις δύο γειτονικές μετατοπίσεις

$$A_{n+1}=C\sin[(n+1)\delta]=C\sin\left[(n+1)\frac{s\pi}{N+1}\right],$$

και $\qquad A_{n-1} = C\sin[(n-1)\delta] = C\sin\left[(n-1)\dfrac{s\pi}{N+1}\right],$

έχουμε $\qquad \dfrac{A_{n-1}+A_{n+1}}{A_n} = \dfrac{C\sin[(n-1)\delta]+C\sin[(n+1)\delta]}{C\sin[n\delta]} = 2\cos(\delta).$

Συνδυάζοντας με το αποτέλεσμα του ερωτήματος (β), $\dfrac{A_{n-1}+A_{n+1}}{A_n} = \dfrac{2\omega_0^2-\omega^2}{\omega_0^2}$, όπου $\omega_0^2 = \dfrac{T}{ma}$,

έχουμε: $\qquad 2\cos(\delta) = \dfrac{2\omega_0^2-\omega^2}{\omega_0^2} \quad \Rightarrow \quad 2\cos\left(\dfrac{s\pi}{N+1}\right) = \dfrac{2\omega_0^2-\omega^2}{\omega_0^2}$

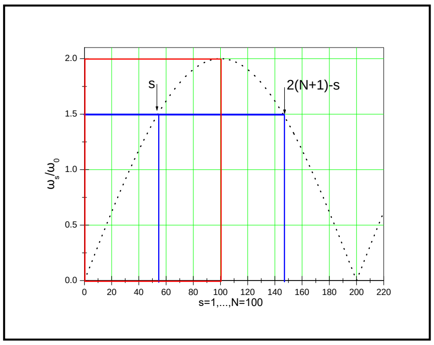
Άρα, οι επιτρεπτές τιμές του ω χαρακτηρίζονται από τον ακέραιο δείκτη s, και είναι:

$$2\cos\left(\frac{s\pi}{N+1}\right) = \frac{2\omega_0^2-\omega_s^2}{\omega_0^2} \quad \Rightarrow \quad \omega_s^2 = 2\omega_0^2\left[1-\cos\frac{s\pi}{N+1}\right], \quad s=1,2,\dots,N$$

και με τη βοήθεια των σχέσεων της μισής γωνίας $\left(\cos\theta_s = 1-2\sin^2\dfrac{\theta_s}{2}\right)$, τελικά έχουμε:

$$\omega_s^2 = 4\omega_0^2\sin^2\frac{s\pi}{2(N+1)} \Rightarrow \boxed{\omega_s = 2\omega_0\left|\sin\frac{s\pi}{2(N+1)}\right|, \quad s=1,2,\dots,N} \qquad (6)$$

Επομένως, με αφετηρία την παραδοχή «στάσιμων κυμάτων» $\left(A_n = C\sin(n\delta+\varphi)\right)$ για τον τρόπο διαταραχής, καταλήξαμε ότι αυτή η παραδοχή είναι συμβιβαστή με το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (και των εξισώσεων διαφορών για τα διαδοχικά πλάτη), και οδηγεί σε ένα συγκεκριμένο φάσμα ιδιοσυχνοτήτων, το οποίο χαρακτηρίζεται από ένα άνω όριο συχνοτήτων $\left(\omega_s < 2\omega_o\right)$



Επίσης είναι φανερό, από την εξάρτηση των ιδιοσυχνοτήτων ω_s ως προς τον δείκτη τάξης-s, ότι οι τάξεις s και $2(N+1)$-s, δίνουν την ίδια ιδιοσυχνότητα $\left(\omega_s = \omega_{2(N+1)-s}\right)$, όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα. Όσον αφορά στη σχέση των πλάτων των δύο αυτών κανονικών τρόπων ταλάντωσης $\left(\omega_s = \omega_{2(N+1)-s}\right)$ για την ίδια θέση n, ισχύει:

$$A_n^{[2(N+1)-s]} = C\sin\left[n\frac{2(N+1)-s}{N+1}\pi\right] = C\sin\left[2n\pi - n\frac{s\pi}{N+1}\right] = -C\sin\left[n\frac{s\pi}{N+1}\right] = -A_n^s$$

[Ο κάτω-δείκτης είναι ο δείκτης-θέσης και ο άνω-δείκτης είναι ο δείκτης-ΚΤΤ].
Άρα, πράγματι, οι λύσεις των ΚΤΤ που είναι διαφορετικές μεταξύ τους είναι οι πρώτες Ν-ως-προς-την-τάξη (όπως ισχυρισθήκαμε παραπάνω, μετά την εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών), ενώ από την τάξη Ν+1 και μετά, παίρνουμε φυσικώς ισοδύναμα αποτελέσματα.

Μετά την ανάδειξη των συχνοτήτων των Ν-ΚΤΤ (Ν κανονικών τρόπων ταλάντωσης), ξαναγυρνώντας στο αρχικό πρόβλημα, του υπολογισμού των συναρτήσεων $y_n(t)$, μπορούμε να γράψουμε τη γενική λύση της κίνησης, για κάθε θέση n, (n=1,...,N), ως γραμμικό συνδυασμό των των κανονικών τρόπων ταλάντωσης s (s=1,…,N), με πλάτη ταλάντωσης $A_n^s = C_s\sin(n\delta_s)$, $\delta_s = \dfrac{s\pi}{N+1}$ και συχνότητες

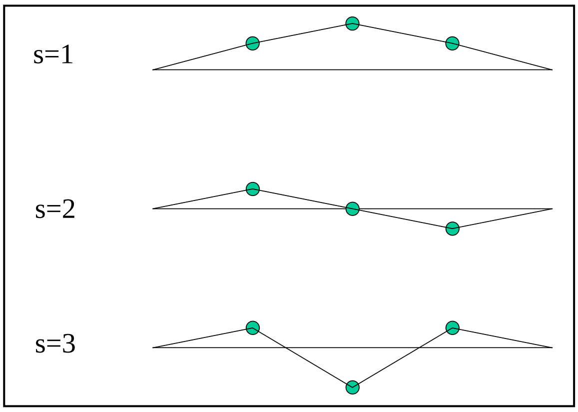
$\omega_s = 2\omega_0\left|\sin\dfrac{s\pi}{2(N+1)}\right|, \quad s=1,\dots,N$, δηλαδή:

$$y_n(t) = \sum_s A_n^s\cos(\omega_s t+\varphi_s) = \sum_s C_s\sin\left(n\frac{s\pi}{N+1}\right)\cos(\omega_s t+\varphi_s),$$

Όπου τα αυθαίρετα πλάτη C_s και οι αυθαίρετες φάσεις φ_s, s=1,…,N, αποτελούν τις 2N σταθερές ολοκλήρωσης του προβλήματος, και προκύπτουν από τις 2N αρχικές συνθήκες

$$\left[y_n(t=0), \dot{y}_n(t=0)\right], \quad n=1,...,N$$

Περισσότερο όμως ενδιαφέρον, από τις γενικές λύσεις του προβλήματος, έχει ίσως ο προσδιορισμός του φάσματος συχνοτήτων των ΚΤΤ, η μορφή του οποίου είναι ένα πρώτο παράδειγμα αυτού που θα συναντήσουμε στην κυματική των συνεχών συστημάτων ως «σχέση διασποράς», και μας επιτρέπει να πούμε ότι αυτή η συστοιχία των περιοδικώς διατεταγμένων N-σωμάτων, που αλληλεπιδρούν με τον ίδιο τρόπο μέσω των άμεσων γειτόνων της διάταξης, λειτουργεί ως ένα φίλτρο αποκοπής υψηλών συχνοτήτων $(\omega \geq 2\omega_0)$, δεδομένου ότι, οι συχνότητες των ΚΤΤ περιορίζονται στο διάστημα $(0 \leq \omega \leq 2\omega_0)$, όπως είδαμε προηγουμένως.



(δ) Εφαρμογή, για N=3:

για s=1, $A_n = C\sin[n\delta] = C\sin\left[n\dfrac{\pi}{4}\right]$, $A_1 = C\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $A_2 = C$, $A_3 = C\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

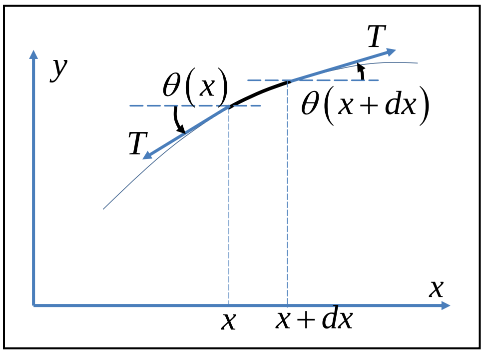
s=2, $A_n = C\sin[n\delta] = C\sin\left[n\dfrac{2\pi}{4}\right]$, $A_1 = C$, $A_2 = 0$, $A_3 = -C$

s=3, $A_n = C\sin[n\delta] = C\sin\left[n\dfrac{3\pi}{4}\right]$, $A_1 = C\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $A_2 = -C$, $A_3 = C\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Μία συμπληρωματική μελέτη της συμπεριφοράς ενός τέτοιου περιοδικού συστήματος ως φίλτρου διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων, παρουσιάζεται στο επόμενο Παράδειγμα 10.3.2, όπου, μελετάται η συμπεριφορά του ως προ την απόκριση σε εξωτερική διέγερση

Παραγωγή της κυματικής εξίσωσης για 1-διάστατο συνεχές ελαστικό μέσο

Θεωρούμε ένα ιδανικό μονοδιάστατο συνεχές ελαστικό μέσο, π.χ., μία ιδανική χορδή αμελητέας διατομής σε σχέση με το μήκος της, η οποία διαθέτει ομοιογενή γραμμική πυκνότητα μάζας, $\rho \equiv (dm/dx) = \sigma\tau\alpha\theta.$, και η οποία, όταν δεν τείνεται με μία εξωτερική τάση, μπορεί να πάρει οποιοδήποτε σχήμα (δηλ., δεν διαθέτει εσωτερική τάση). Τείνουμε αυτή τη χορδή με ίσες και αντίθετες τάσεις T και στα δύο άκρα της, οπότε αποκτά ευθύγραμμο σχήμα, και ορίζουμε ως άξονα-x τον άξονα κατά τον οποίο εκτείνεται η χορδή. Ενώ η χορδή βρίσκεται υπό τάση, προκαλούμε, τη χρονική στιγμή $t=0$, μία αρχική διαταραχή της χορδής, κατά τον άξονα-y $(y \perp x)$, (π.χ., στιγμιαία παραμόρφωση $y = f(x)$, ή στιγμιαία κατανομή ταχυτήτων $\dot{y} = \upsilon(x)$, ή συνδυασμό και των δύο). Το αποτέλεσμα αυτής της αρχικής διαταραχής είναι ότι, για $t>0$, όλα τα σημεία-x της χορδής κινούνται έτσι ώστε η απομάκρυνση από την κατάσταση ισορροπίας να είναι συνάρτηση της θέσης και του χρόνου, $y = y(x,t)$, όπου τα x και t είναι ανεξάρτητες μεταβλητές του προβλήματος. Ο στόχος είναι να βρεθεί μία κατάλληλη διαφορική εξίσωση, η οποία να διέπει την κίνηση αυτής της χορδής, έτσι ώστε η λύση της να είναι η $y=y(x,t)$, όπου οι μεταβλητές (x,t) είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, με την έννοια ότι η απομάκρυνση $y=y(x,t)$ της χορδής από την θέση ισορροπίας της μπορεί να αναζητηθεί για οποιαδήποτε θέση x και για οποιαδήποτε χρονική στιγμή t,



Η παραγωγή αυτής της διαφορικής εξίσωσης θα γίνει με βάση τον 2^{ο} Νόμο του Νεύτωνα για την επιτάχυνση ενός διαφορικού τμήματος αυτής της χορδής που βρίσκεται μεταξύ των σημείων x και x+dx και έχει μάζα $dm=\rho dx$. Η ανάλυση που ακολουθεί στηρίζεται στην προσέγγιση των μικρών γωνιών, δηλ., στην παραδοχή ότι η διαταραχή της χορδής είναι τέτοια ώστε η γωνία που σχηματίζει οποιοδήποτε διαφορικό τμήμα της χορδής με τον άξονα-x είναι αρκετά μικρή, ώστε να ισχύει με καλή προσέγγιση ότι $\theta \approx \sin\theta \approx \tan\theta = (dy/dx)$, όπου επίσης η θ είναι συνάρτηση της θέσης και του χρόνου. Η μεταβολή της θ με τη θέση είναι αυτή που εξασφαλίζει τη μεταβλητή καμπυλότητα της χορδής και έχει ως αποτέλεσμα, παρά την διατήρηση του μέτρου της τάσης σε όλη την έκταση της χορδής, να υπάρχει στα άκρα ενός διαφορικού τμήματος dm, γενικά, μη-μηδενική προβολή τάσης κατά μήκος του άξονα-y η οποία και αποτελεί την αντίστοιχη επιταχύνουσα δύναμη, δηλ.,

$$(dm)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=F_{y,o\lambda}$$

Η σχέση αυτή, στο πλαίσιο της προσέγγισης των μικρών γωνιών, μπορεί να γραφεί

$$(\rho dx)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=T\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+dx}-\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x}\right]=T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx \Rightarrow \boxed{\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} \quad (1)$$

Η κυματική εξίσωση που περιγράφει η σχέση (1) παρουσιάζεται και με τη μορφή $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, όπου το μέγεθος $c=\sqrt{T/\rho}$ έχει διαστάσεις ταχύτητας, και θα αποδειχθεί στη συνέχεια ότι είναι η ταχύτητα διάδοσης του κύματος κατά μήκος της χορδής.

Λύσεις της κυματικής εξίσωσης (σε 1-διάσταση)

(α) Λύσεις με τη μορφή στάσιμου κύματος (Κανονικών Τρόπων Ταλάντωσης)

Με βάση την εμπειρία απο τους συζευγμένους ταλαντωτές, θα μπορούσαμε να αναζητήσουμε λύσεις της κυματικής εξίσωσης που είναι συνυφασμένη με αρμονική κίνηση όλων των σημείων της χορδής με την ίδια συχνότητα ω, αλλά με διαφορετικό πλάτος το οποίο εξαρτάται από τη θέση $y(x,t)=f(x)\cos(\omega t+\varphi)$.

[Αυτή η υπόθεση εργασίας ισοδυναμεί με επίλυση της κυματικής εξίσωσης με τη μέθοδο των χωριζόμενων μεταβλητών $y(x,t)=X(x)T(t)$].

Αντικαθιστώντας την $y(x,t)=f(x)\cos(\omega t)$ στην κυματική εξίσωση, προκύπτει:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Rightarrow -\frac{\omega^2}{c^2}f(x)\cos(\omega t+\varphi)=f''(x)\cos(\omega t+\varphi)\Rightarrow \boxed{f''+\frac{\omega^2}{c^2}f(x)=0}$$

Άρα η συνάρτηση πλάτους $f(x)$ έχει επίσης αρμονική συμπεριφορά, ως προς *x*, με “χωρική συχνοτητα” $k=\omega/c$, δηλ., $f(x)=A\cos(kx+\theta)$. Άρα, οι **Κανονικοί Τρόποι Ταλάντωσης** μπορεί να είναι επίσης λύσεις της κυματικής εξίσωσης, με τη μορφή **στάσιμων κυμάτων**:

$$\boxed{y(x,t) = \mathrm{A}\cos(kx+\theta)\cos(\omega t+\varphi)}$$

Όπως θα δούμε σε συγκεκριμμένα παραδείγματα, οι τιμές των (k,θ) θα προσδιοριστούν από τις συνοριακές συνθήκες που επικρατούν στα άκρα («σύνορα») του ελαστικού μέσου, ενώ οι σταθερές (A,φ) μπορούν να προσδιοριστούν από τις αρχικές συνθήκες (την μετατόπιση και την ταχύτητα όλων των σημείων του ελαστικού μέσου σε μία χρονική στιγμή (π.χ., t=0). Οι δε τιμές της συχνότητας συνδέονται με τα, ως ανωτέρω, υπολογιζόμενα *k*, μέσω της σχέσης $k=\omega/c$.

α) Λύσεις με τη μορφή οδεύοντος κύματος

Από τη συνήθη μορφή της εξίσωσης κύματος : $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, μπορούμε να αναζητήσουμε λύσεις $y=y(x,t)$, μετασχηματίζοντας την εξίσωση κύματος ως εξής:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Rightarrow\frac{\partial^2 y}{\partial(ct)^2}=\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Rightarrow\frac{\partial^2 y}{\partial(\pm ct)^2}=\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Από την τελευταία έκφραση προκύπτει ότι, στην $y=y(x,t)$, οι μεταβλητές $(x,+ct)$ ή/και $(x,-ct)$ πρέπει να παρουσιάζονται με “ισοδύναμο” τρόπο. Αυτή η παρατήρηση οδηγεί στο συμπέρασμα ότι μία $y(x,t)=f_1(x+ct)$ είναι λύση της κυματικής εξίσωσης, όπως μπορεί πράγματι να αποδειχθεί:

$$y(x,t)=f_1(x+ct)\Rightarrow\frac{\partial y}{\partial x}=f'\frac{\partial(x+ct)}{\partial x}=f'\Rightarrow\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=f''\frac{\partial(x+ct)}{\partial x}=f''}\qquad(11\alpha)$$

$$y(x,t)=f_1(x+ct)\Rightarrow\frac{\partial y}{\partial t}=f'\frac{\partial(x+ct)}{\partial t}=cf'\Rightarrow\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=cf''\frac{\partial(x+ct)}{\partial t}=c^2 f''}\qquad(11\beta)$$

Από το συνδυασμό (11α)+c^2×(11b) προκύπτει $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}$.

Όμοια για την $y(x,t)=f_2(x-ct)$, προκύπτει $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}$

Επειδή η διαφορική εξίσωση κύματος είναι γραμμική, προκύπτει ότι και κάθε γραμμικός συνδυασμός των δύο αυτών λυσεων: $\boxed{y(x,t)=C_1 f_1(x+ct)+C_2 f_2(x-ct)}$, είναι λύση της κυματικής εξίσωσης και, μάλιστα, έχει το σωστό αριθμό “σταθερών ολοκλήρωσης”, δηλ., δύο σταθερές ολοκλήρωσης, (C_1,C_2), αφού είναι 2^{ης} τάξης διαφορική εξίσωση. Όπως προκύπτει από το συνδυασμό των δύο ανεξάρτητων μεταβλητών (x,t) στις λύσεις, $[f_1(x+ct), f_2(x-ct)]$, οποιαδήποτε και αν είναι η αναλυτική μορφή των $[f_1(\eta), f_2(\xi)]$, η $f_2(x-ct)$ παρουσιάζει μία «κυματομορφή» που **οδεύει προς τα δεξιά**, με ταχύτητα c, ενώ η $f_1(x+ct)$ παρουσιάζει μία «κυματομορφή» που **οδεύει προς τα αριστερά**, με ταχύτητα c. Όταν η κυματομορφή είναι αρμονική, συνήθως αποδίδεται από τις συναρτήσεις $f_1=A\cos(kx\pm\omega t)$, ή $f_1=A\sin(kx\pm\omega t)$, ή με τη μιγαδική έκφραση $f_1=Ae^{i(kx\pm\omega t)}$, όπου $k=2\pi/\lambda$: ο κυματαριθμός, $\omega=2\pi f$: η κυκλική συχνότητα, (f,λ): συχνότητα και μήκος κύματος, και $c=f\lambda=\omega/k$.

Κανονικοί Τρόποι Ταλάντωσης – Στάσιμα Κύματα

Ως κανονικοί τρόποι ταλάντωσης μίας χορδής με πεπερασμένο μήκος *L*, (και με γραμμική πυκνότητα μάζας και τάση, *ρ* και *T*, αντίστοιχα), ορίζονται εκείνοι οι τρόποι κίνησης, όπου (κατ' αναλογία των ΚΤΤ των συζευγμένων ταλαντωτών) όλα τα σημεία της χορδής ταλαντώνονται αρμονικά, με την ίδια συχνότητα ω, αλλά με διαφορετικό πλάτος, το οποίο εξαρτάται από τη θέση-x κατά μήκος της χορδής: $y(x,t) = f(x)\cos(\omega t)$.

Αντικαθιστώντας αυτή την παραδοχή στην κυματική εξίσωση της ιδανικής χορδής προκύπτει :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x)\cos(\omega t+\varphi) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(x)\cos(\omega t+\varphi) \Rightarrow \cos(\omega t+\varphi)\frac{d^2 f}{dx^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} f(x)\cos(\omega t+\varphi),$$

άρα : $$\frac{d^2 f}{dx^2} + k^2 f(x) = 0, \quad \text{όπου} \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}.$$

Επομένως, η $f(x)$ είναι της μορφής $f(x) = A\sin(kx+\theta)$, και η συνολική έκφραση του Κανονικού Τρόπου Ταλάντωσης γράφεται: $y(x,t) = A\sin(kx+\theta)\cos(\omega t+\varphi)$.

Δηλαδή, ο ΚΤΤ ενός συνεχούς μέσου (χορδή) είναι αυτό που περιγράφεται, επίσης, ως Στάσιμο Κύμα, δεδομένου ότι τα σημεία μηδενισμού (δεσμοί) και μεγίστου-ελαχίστου (κοιλίες) εξαρτώνται, μέσω του $\sin(kx+\theta)$, από τη θέση-*x*, άρα είναι στάσιμα, και δεν «οδεύουν» καθώς περνάει ο χρόνος. Οι τιμές του k και του θ πρέπει να είναι τέτοιες ώστε να ικανοποιούνται, για κάθε χρονική στιγμή, οι συνοριακές συνθήκες που επιβάλλονται στα άκρα της χορδής, *x*=0 και *x*=*L*.

Οι συνοριακές συνθήκες μπορεί να αφορούν :

(α) ακλόνητα σημεία, $x = x_0$, οπότε η ταλάντωση σε αυτά τα σημεία πρέπει να μηδενίζεται για κάθε χρονική στιγμή, $y(x_o,t) = 0$.

(β) κινούμενα σημεία, $x = x_0$, στα οποία μπορεί να είναι συνδεδεμένα σημειακά στοιχεία αδράνειας (σημειακή μάζα, m_0), ελαστικότητας (ελατήριο, $F = -sy(x_0)$), ιξώδους τριβής (έμβολο σε ρευστό, $F = -b\dot{y}(x_0)$), οπότε η κίνησή τους διέπεται από την αντίστοιχη εξίσωση του Νεύτωνα, $m_0\ddot{y}(x_0) = -sy(x_0) - b\dot{y}(x_0) + T\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x_0^+} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x_0^-}\right]$. Η τελευταία συνοριακή συνθήκη μπορεί να αφορά και σημείο ασυνέχειας μεταξύ δύο διαφορετικών χορδών, (για αυτό το λόγο και περιλαμβάνει κλίσεις της χορδής εκατέρωθεν του σημείου $x = x_0$. Από την εξίσωση αυτή προκύπτει ότι, για ένα άκρο το οποίο μπορεί να κινείται ελεύθερα, κατά μήκος της διεύθυνσης *y*, χωρίς εξωτερικές επιδράσεις, $(m_0 = 0, s = 0, b = 0)$, οι κλίσεις της χορδής εκατέρωθεν του σημείου $x = x_0$ θα πρέπει να ικανοποιούν τη σχέση $T\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x_0^+} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x_0^-}\right] = 0$. Αν το ελαστικό μέσο (χορδή) εκτείνεται μόνο από την μία πλευρά του σημείο $x = x_0$, τότε έχουμε ένα <u>ελεύθερο συνοριακό σημείο</u>, στο οποίο η <u>συνοριακή συνθήκη ελεύθερου άκρου</u> είναι: $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x_0} = 0$.

Παραδείγματα διαφορετικών συνοριακών συνθηκών θα παρουσιαστούν στη συνέχεια, σε συνδυασμό με συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες για την κατανομή απομακρύνσεων και ταχυτήτων της συνολικής χορδής.

Σχόλια:

(1) Οι λύσεις των στάσιμων κυμάτων και οι λύσεις των οδευόντων κυμάτων είναι μαθηματικά ισοδύναμες, αφού οι μεν μπορούν να εκφραστούν ως γραμμικός συνδυασμός των δε, και αντίστροφα.

(2) Η κάθε μορφή των λύσεων «ταιριάζει» σε διαφορετικές οικογένειες προβλημάτων, με την έννοια ότι προσφέρει λογιστική ευκολία, αντίστοιχα. Συγκεκριμένα, τα μεν οδεύοντα κύματα είναι προσφορότερα για την ανάλυση φαινομένων ανάκλασης-διέλευσης σε ασυνέχειες οι οποίες υπάρχουν σε ελαστικά μέσα άπειρης έκτασης, τα δε στάσιμα κύματα προσφέρουν λογιστική ευκολία για την ανάλυση της κίνησης ελαστικών μέσων πεπερασμένης έκτασης (που ενδεχομένως, παρουσιάζουν και ασυνέχειες).