ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Πρόχειρες Σημειώσεις για τις ανάγκες του μαθήματος
«Φυσική – Ι (Μηχανική και Εισαγωγή στην Κυματική)»
της Σχολής Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών του ΕΜΠ

Ιωάννη Σ. Ράπτη
Καθηγητή ΣΕΜΦΕ - ΕΜΠ

Αθήνα, 2021

1. **Εισαγωγή – Θεμελιώδη και Παράγωγα Μεγέθη – Μαθηματικά Εργαλεία**
   (ΒΛΕΠΕ: Chapt01)
2. **Νόμοι του Νεύτωνα**
   (ΒΛΕΠΕ: Chapt02)
3. **Μη αδρανειακά συστήματα αναφοράς – Αδρανειακές Δυνάμεις**
   (ΒΛΕΠΕ: Chapt03)

4. Έργο – Ισχύς – Ενέργεια – Διατηρητικές Δυνάμεις

Στο κεφάλαιο αυτό θα ορίσουμε την έννοια του έργου, της ισχύος μίας δύναμης, και την έννοια της κινητικής ενέργειας. Για ένα ορισμένο είδος δυνάμεων, που θα ονομάσουμε διατηρητικές, θα διατυπώσουμε τα κριτήρια διατηρητικότητας, θα ορίσουμε την έννοια της δυναμικής ενέργειας, και θα δείξουμε τη σχέση που την συνδέει με τη δύναμη. Με βάση αυτές τις έννοιες, θα διατυπωθούν νόμοι διατήρησης, με τη βοήθεια των οποίων μπορεί κανείς να μελετήσει την συμπεριφορά μηχανικών συστημάτων, με έναν τρόπο συμπληρωματικό, αλλά ισοδύναμο, από κάποια άποψη, με την μελέτη μέσω των δυναμικών εξισώσεων κίνησης.

4.1 Έργο δύναμης σε μία διάσταση

Ας θεωρήσουμε μία δύναμη $\vec{F}(x)$, της οποίας το σημείο εφαρμογής μετατοπίζεται κατά μήκος του άξονα x, έτσι ώστε η δύναμη να διατηρεί τον προσανατολισμό της, ως προς τον άξονα x, ενώ το μέτρο της μεταβάλλεται συναρτήσει της θέσης σύμφωνα με την σχέση $\left|\vec{F}(x)\right| = f(x)$. Σε αυτή την περίπτωση, αν θ είναι η γωνία ανάμεσα στην δύναμη και στον άξονα x, ορίζουμε ως στοιχειώδες έργο dW της δύναμης, κατά την μετακίνησή της από το σημείο x στο σημείο $x+dx$, την ποσότητα

$$dW = \vec{F}(x)\cdot\left(\hat{x}dx\right) = f(x)\cos(\theta)dx\,.$$

Αντίστοιχα, κατά την μετακίνηση του σημείου εφαρμογής της $\vec{F}(x)$, από το σημείο x_1 μέχρι το σημείο x_2, το συνολικό έργο είναι

$$W = \cos(\theta)\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx\,.$$

Ανάλογα με το πρόσημο των ανωτέρω υπολογισμών, λέμε ότι η δύναμη παράγει έργο, $\left(W > 0\right)$, ή απορροφά έργο, $\left(W < 0\right)$.

Παράδειγμα 4.1.1. Μετακινούμε ένα σώμα μάζας Μ πάνω σε οριζόντιο επίπεδο, του οποίου ο συντελεστής κινητικής τριβής είναι συνάρτηση της θέσης, σύμφωνα με την σχέση $\mu(x) = \dfrac{0.5}{1+(x/a)}$, όπου a μία σταθερά με διαστάσεις μήκους, και $x > 0$. Η μετακίνηση επιτυγχάνεται, εφαρμόζοντας μία οριζόντια δύναμη ίση και αντίθετη με την κινητική τριβή. Να υπολογιστεί το έργο αυτής της δύναμης για μετακίνηση από το σημείο $x_1 = a$ μέχρι το σημείο $x_2 = 2a$.

Απάντηση

Η δύναμη που εφαρμόζουμε για την μετακίνηση είναι $F = \mu F_{\kappa\alpha\theta} = \dfrac{0.5}{1+(x/a)}Mg$, οπότε το αντίστοιχο έργο υπολογίζεται

$$W=\int_a^{2a}\frac{0.5}{1+(x/a)}Mgdx=0.5aMg\int_a^{2a}\frac{d\left(x/a\right)}{1+(x/a)}=0.5aMg\int_a^{2a}\frac{d\left(1+x/a\right)}{1+(x/a)}=0.5Mga\left[\ln 3-\ln 2\right]=0.5Mga\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

Παράδειγμα 4.1.2. Σε ιδανικό ελατήριο, με σταθερά ελατηρίου k, εφαρμόζουμε μία δύναμη F, έτσι ώστε να μεταβάλλουμε το μήκος του, από την τιμή του φυσικού μήκους L, μέχρι την τιμή $L+x$. Να υπολογιστεί το έργο $W(x)$ αυτής της δύναμης και δειχθεί ότι είναι ανεξάρτητο από το πρόσημο του *x*. Δηλαδή, το έργο είναι το ίδιο, τόσο για συσπείρωση όσο και για, ίδιου μέτρου, επιμήκυνση του ελατηρίου.

Απάντηση

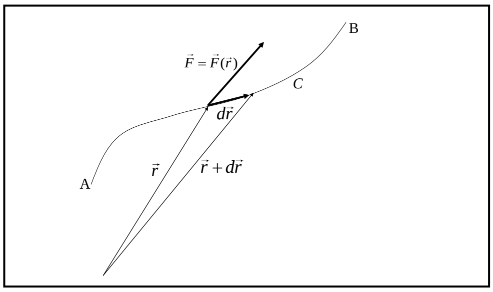
Ας θεωρήσουμε ως θετικές τιμές για το x αυτές που αντιστοιχούν στην επιμήκυνσή του και ως αρνητικές αυτές που αντιστοιχούν στην συσπείρωση, (θα δείξουμε, επίσης, ότι το αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητο και από αυτή την σύμβαση προσήμου).

(α) Έστω ότι έχουμε εφαρμόσει μία δύναμη, έτσι ώστε να επιτύχουμε επιμήκυνση του ελατηρίου κατά x', $\left(x'>0\right)$. Σε αυτή την περίπτωση, η δύναμη που εφαρμόζουμε είναι θετική και έχει τιμή $F(x')=kx'$. Για μία περαιτέρω επιμήκυνση κατά dx', η γωνία θ, ανάμεσα στην δύναμη και στην μετατόπιση είναι $\theta=0$, $\cos(\theta)=1$, οπότε:

$$W(x)=\int_0^x\left(kx'\right)\left(dx'\right)=\frac{1}{2}kx^2.$$

(β) Στην περίπτωση συσπείρωσης του ελατηρίου, η γωνία θ, ανάμεσα στην δύναμη και στην μετατόπιση είναι, επίσης, $\theta=0$, $\cos(\theta)=1$, ενώ αλλάζουν πρόσημο η δύναμη και η στοιχειώδης μετατόπιση, όπως και η τελική μετατόπιση, $x=-\left|x\right|$. Όπως φαίνεται και από το παραπάνω αποτέλεσμα, λόγω της τετραγωνικής εξάρτησης του έργου από την μετατόπιση, το αποτέλεσμα είναι το ίδιο για συσπείρωση και επιμήκυνση του ίδιου μέτρου. Όπως φαίνεται από τον υπολογισμό, το αποτέλεσμα είναι, επίσης, ανεξάρτητο από την σύμβαση προσήμου.

4.2. Έργο δύναμης, κατά την μετακίνηση του σημείου εφαρμογής της



Ας θεωρήσουμε ένα αδρανειακό σύστημα, ως προς το οποίο μία σημειακή μάζα κινείται υπό την επίδραση μίας δύναμη $\vec{F}=\vec{F}(\vec{r})$, διαγράφοντας μία καμπύλη C. Για κάθε διαφορική μετατόπιση επί της καμπύλης, από το σημείο $\vec{r}$ στο σημείο $\vec{r}+d\vec{r}$, ορίζουμε ως στοιχειώδες έργο dW της δύναμης $\vec{F}=\vec{F}(\vec{r})$, το εσωτερικό γινόμενο

$$dW=\vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}. \qquad (4.1)$$

Το συνολικό έργο της δύναμης, κατά την μετακίνηση από το σημείο A στο σημείο B της καμπύλης C, είναι το αντίστοιχο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$W_{\mathrm{AB}}\left(\vec{F}(\vec{r}),C\right)=\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}\vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r},$$

το οποίο υπολογίζεται κατά μήκος της καμπύλης C. (4.2)

Από τη μορφή των σχέσεων (4.1 – 4.2) είναι φανερό ότι το αποτέλεσμα μπορεί να είναι θετικό, αρνητικό, ή μηδέν. Στις περιπτώσεις αυτές λέμε, αντίστοιχα, ότι η δύναμη $\vec{F}=\vec{F}(\vec{r})$, κατά την μετακίνησή της από το σημείο A στο σημείο B, κατά μήκος της καμπύλης C, έχει συνολικά παράγει έργο, έχει απορροφήσει έργο, ή ότι το συνολικό της έργο είναι μηδέν. Επίσης, στη γενικότερη περίπτωση, το έργο μίας δύναμης, κατά την μετατόπιση του σημείου εφαρμογής από ένα σημείο Α σε ένα σημείο Β, εξαρτάται από την καμπύλη C η οποία περιγράφει την διαδρομή αυτή.

Μερικά συμπεράσματα που συνάγονται, με βάση την σχέση (4.2), είναι τα εξής:

(α) Στην περίπτωση σταθερής δύναμης και ευθύγραμμης διαδρομής, το έργο είναι ίσο με το εσωτερικό γινόμενο της δύναμης επί το διάνυσμα της μετατόπισης.

(β) Στην περίπτωση σταθερής δύναμης και καμπυλόγραμμης διαδρομής, το έργο είναι ίσο με το γινόμενο της δύναμης επί την προβολή της μετατόπισης, ως προς τον φορέα της δύναμης.

Μονάδες Έργου

Από τον ορισμό του έργου προκύπτουν, ανάλογα με το σύστημα μονάδων, και οι αντίστοιχες μονάδες έργου, ως εξής:

(SI): 1N·1m = 1J, (Joule, Τζουλ)

(MKSA): 1kgf·1m = 1kgfm (χιλιόγραμμο δύναμης μέτρο)

(CGS): 1dyn·1cm = 1erg (έργιο)

Σχέσεις Μονάδων

1J = 1N·1m = 10^5 dyn · 10^2 cm = 10^7 erg

1kgfm = 1kgf · 1m = 9.81N · 1m = 9.81 J

Παράδειγμα 4.2.1: Να υπολογιστεί το έργο που παράγει η δύναμη $\vec{F} = ay\hat{x} + bx\hat{y}$, κατά την μετακίνηση του σημείου εφαρμογής της από το σημείο $\mathrm{A} = (0,0,0)$ στο σημείο $\mathrm{B} = (R,R,0)$, κατά μήκος των εξής διαδρομών: (α) κατά μήκος της ευθείας γραμμής που ενώνει τα δύο σημεία, (β) κατά μήκος των δύο ευθυγράμμων τμημάτων ΑΔ και ΔΒ, όπου $\Delta = (R,0,0)$, (γ) κατά μήκος του τεταρτοκυκλίου που γράφεται με κέντρο το σημείο $\Gamma = (0,R,0)$ και ακτίνα R και ενώνει τα δύο σημεία

Απάντηση: (α) Η πρώτη διαδρομή περιγράφεται από την καμπύλη $y(x) = x, \quad (0 \le x \le R)$, οπότε έχουμε και $dy = dx$, και το έργο υπολογίζεται, σύμφωνα με τον προηγούμενο ορισμό, ως το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$W_{\mathrm{AB},\alpha}\left(\vec{F}(\vec{r}), C_\alpha\right) = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \left(F_x dx + F_y dy\right) = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} aydx + bxdy = (a+b)\int_0^R xdx = \frac{a+b}{2} R^2$$

(β) Η δεύτερη διαδρομή χαρακτηρίζεται από δύο τμήματα με διαφορετική αναλυτική έκφραση για το καθένα, οπότε

$$W_{\mathrm{AB},\beta}\left(\vec{F}(\vec{r}), C_\beta\right) = \int_{\mathrm{A}}^{\Delta} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \int_{\Delta}^{\mathrm{B}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{\mathrm{A}}^{\Delta} \left(F_x dx + F_y dy\right) + \int_{\Delta}^{\mathrm{B}} \left(F_x dx + F_y dy\right)$$

Στο πρώτο τμήμα (ΑΔ) ισχύει: $y = 0, \quad dy = 0$, ενώ στο δεύτερο τμήμα (ΔΒ) ισχύει: $x = R, \quad dx = 0$, επομένως :

$$W_{\mathrm{AB},\beta}\left(\vec{F}(\vec{r}), C_\beta\right) = \int_{\mathrm{A}}^{\Delta} \left(F_x(y=0)dx\right) + \int_{\Delta}^{\mathrm{B}} \left(F_y(x=R)dy\right) = \int_{(0,0,0)}^{(R,0,0)} 0dx + \int_{(R,0,0)}^{(R,R,0)} bRdy = bR^2$$

[Δείξτε ότι το έργο, για μετακίνηση κατά μήκος της διαδρομής των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΓ και ΓΒ, είναι ίσο με aR^2].

(γ) Η τρίτη διαδρομή είναι τμήμα του κύκλου $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$, όπου $(x_0,y_o)=(0,R)$. Αν λάβουμε υπόψη και τα τερματικά σημεία της καμπύλης, τότε αυτή περιγράφεται από την εξίσωση

$$y=R-\sqrt{R^2-x^2},\quad (0\le x\le R),\ \text{και, επομένως,}\ dy=\frac{xdx}{\sqrt{R^2-x^2}},\quad (0\le x\le R)$$

$$W_{AB,\gamma}\left(\vec{F}(\vec{r}),C_{\geq}\right)=\int_0^R \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}=\int_0^R\left(F_x dx+F_y dy\right)=\int_0^R aydx+bxdy=\int_0^R\left[a\left(R-\sqrt{R^2-x^2}\right)dx+bx\left(\frac{xdx}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)\right]$$

ή, ισοδύναμα
$$W_{AB,\gamma}\left(\vec{F}(\vec{r}),C_{''}\right)=aR\int_0^R dx-a\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\,dx+b\int_0^R\frac{x^2dx}{\sqrt{R^2-x^2}}$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι,
$$\int\sqrt{R^2-x^2}\,dx=\frac{x\sqrt{R^2-x^2}}{2}+\frac{R^2}{2}\arctan\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}+C$$

και,
$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{R^2-x^2}}=-\frac{x\sqrt{R^2-x^2}}{2}+\frac{R^2}{2}\arctan\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}+C\qquad ,$$

παίρνουμε, τελικά:
$$W_{AB,\gamma}\left(\vec{F}(\vec{r}),C_\gamma\right)=R^2\left[a-\frac{(a-b)}{4}\pi\right]$$

Παρατηρούμε ότι το έργο της δύναμης $\vec{F}$, κατά την μετακίνησή της από το σημείο Α στο σημείο Β, εξαρτάται από την διαδρομή η οποία ακολουθείται. Ακόμη και στην περίπτωση δύο διαδρομών ίσου μήκους, [περίπτωση (β) για τις διαδρομές ΑΔΒ και ΑΓΒ], το αποτέλεσμα μπορεί να είναι επίσης διαφορετικό για κάθε διαδρομή. [Τι ισχύει στην περίπτωση *a* = *b* ;]

4.3 Ισχύς παρεχόμενη από μία δύναμη που μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της

Το έργο που παράγεται, ανά μονάδα χρόνου, από μία δύναμη που μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της, ορίζεται ως η ισχύς, P, η παρεχόμενη από την δύναμη. Όταν το χρονικό διάστημα, στο οποίο αναφερόμαστε, είναι πεπερασμένο, τότε το αντίστοιχο πηλίκο μας δίνει την μέση ισχύ. Όταν το χρονικό διάστημα είναι πολύ μικρό, (τείνει στο μηδέν), τότε παίρνουμε την στιγμιαία ισχύ. Με αφετηρία τον παραπάνω ορισμό, μπορούμε να δείξουμε ότι η στιγμιαία ισχύς είναι ίση, κάθε χρονική στιγμή, με το εσωτερικό γινόμενο της δύναμης επί την ταχύτητα, την ίδια χρονική στιγμή.

$$P\equiv\frac{dW}{dt}=\frac{\vec{F}\cdot d\vec{r}}{dt}=\vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\Rightarrow P=\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}$$

Μονάδες Ισχύος

(SI): 1J / 1s = 1 W (Watt, Βατт)
(MKSA): 75 kgfm / 1s = 1hp (horse power, ίππος)
(CGS): 1 erg / 1s = 1 erg/s (έργιο ανά δευτερόλεπτο)

Σχέσεις Μονάδων Ισχύος

1 W = 1 J / 1s = 10^7 erg/s
1 hp = 75 kgfm/s = (75 kgf) (9.81 N/kgf) 1 m / 1s = 736 Nm/s = 736 J/s = 736 W

Παράδειγμα 4.3.1: Η στιγμιαία ισχύς που παρέχεται σε ένα φορτισμένο σωματίδιο, φορτίου q, από την μαγνητική συνιστώσα της δύναμη Lorentz, είναι μηδέν.

Πράγματι, η μαγνητική συνιστώσα της δύναμης Lorentz είναι $\vec{F}_{\mu\alpha\gamma\nu}=q\left(\vec{\upsilon}\times\vec{B}\right)$, οπότε, η αντίστοιχη ισχύς θα είναι $P_{\vec{F}_{\mu\alpha\gamma\nu}}=\vec{F}_{\mu\alpha\gamma\nu}\cdot\vec{\upsilon}=q\left(\vec{\upsilon}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{\upsilon}=0$, αφού $\left(\vec{\upsilon}\times\vec{B}\right)\perp\vec{\upsilon}$.

4.4 Έργο επιταχύνουσας δύναμης και κινητική ενέργεια σημειακής μάζας

Ας θεωρήσουμε την περίπτωση μίας σημειακής μάζας, m, η οποία κινείται υπό την επίδραση μίας συνολικής δύναμης $\vec{F}$ η οποία είναι συνάρτηση της θέσης, $\vec{F}=\vec{F}(\vec{r})$. Αν υποθέσουμε ότι την χρονική στιγμή t_A η σημειακή μάζα βρίσκεται στο σημείο $\vec{r}_A$, με αρχική ταχύτητα υ_A και, υπό την επίδραση της $\vec{F}=\vec{F}(\vec{r})$, την χρονική στιγμή t_B η σημειακή μάζα βρίσκεται στο σημείο $\vec{r}_B$, με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_B$, τότε η διαφορική εξίσωση της κίνησής της είναι η:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\vec{F}(\vec{r}), \qquad \text{ή}, \qquad m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\vec{F}(\vec{r}) \qquad (4.3.\alpha\text{-}\beta)$$

Το έργο που παράγεται από την δύναμη $\vec{F}=\vec{F}(\vec{r})$, κατά την διάρκεια της μετακίνησης της σημειακής μάζας από το σημείο $\vec{r}_A$, στο σημείο $\vec{r}_B$, υπό την επίδραση της δύναμης αυτής, είναι:

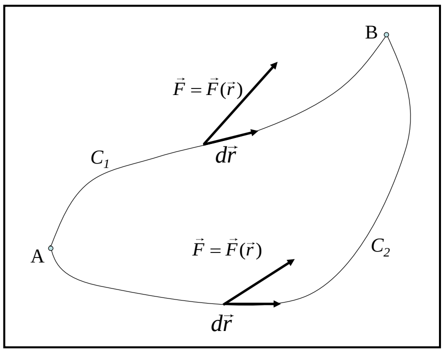
$$W_{\mathrm{AB}}=\int_{r_{\mathrm{A}}}^{r_{\mathrm{B}}}\left[\vec{F}(\vec{r})\right]\cdot\left[d\vec{r}\right]=\int_{t_{\mathrm{A}}}^{t_{\mathrm{B}}}\left[m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\right]\cdot\left[\vec{\upsilon}\,dt\right]=m\int_{t_{\mathrm{A}}}^{t_{\mathrm{B}}}\left[\vec{\upsilon}\right]\cdot\left[\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}dt\right]=m\int_{\upsilon_{\mathrm{A}}}^{\upsilon_{\mathrm{B}}}\vec{\upsilon}\cdot d\vec{\upsilon}=\frac{m}{2}\int_{\upsilon_{\mathrm{A}}}^{\upsilon_{\mathrm{B}}}d\left(\vec{\upsilon}\cdot\vec{\upsilon}\right)$$

και τελικά:
$$W_{\mathrm{AB}}=\int_{r_{\mathrm{A}}}^{r_{\mathrm{B}}}\vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}=\frac{1}{2}m\left(\upsilon_B^2-\upsilon_A^2\right) \qquad (4.4)$$

Για μία σημειακή μάζα m , που κινείται μα ταχύτητα $\vec{\upsilon}$, ορίζουμε την ποσότητα $E_K=\frac{1}{2}m\upsilon^2$ ως την κινητική ενέργεια της μάζας και, με βάση την σχέση (4.4), διατυπώνουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας ως εξής:

Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας: η μεταβολή της κινητικής ενέργειας μίας σημειακής μάζας είναι ίση με το έργο της συνολικής δύναμης, υπό την επίδραση της οποίας κινείται η μάζα αυτή, στο ίδιο χρονικό διάστημα.

4.5 Διατηρητικές Δυνάμεις και η έννοια της Δυναμικής Ενέργειας



Αναφέραμε στην αρχή αυτού του κεφαλαίου ότι, στη γενικότερη περίπτωση, το έργο μίας δύναμης εξαρτάται από την διαδρομή (καμπύλη ολοκλήρωσης), ακόμη και αν παραμένουν ίδια τα δύο τερματικά σημεία (A και B) αυτής της διαδρομής., (Βλέπε και Παράδειγμα 4.1).

<u>Στην ειδικότερη περίπτωση, κατά την οποία το έργο μία δύναμης εξαρτάται από τα δύο τερματικά σημεία μόνο, αλλά είναι ίδιο για όλες τις δυνατές διαδρομές, που μπορούν να ορισθούν ανάμεσα στα ίδια τερματικά σημεία, τότε ονομάζουμε την δύναμη αυτή **διατηρητική ή συντηρητική (Ορισμός Ι)**</u>. Σύμφωνα με αυτό τον ορισμό της διατηρητικής δύναμης, σε αυτή την περίπτωση, για κάθε ζεύγος δυνατών διαδρομών, C_1 και C_2, ανάμεσα στα ίδια τερματικά σημεία A και B, θα ισχύει:

$$W_{\mathrm{AB}}\left(\vec{F}(\vec{r}),C_1\right)=W_{\mathrm{AB}}\left(\vec{F}(\vec{r}),C_2\right) \;\Leftrightarrow\; \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}\vec{F}(\vec{r}[C_1])\cdot d\vec{r}=\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}\vec{F}(\vec{r}[C_2])\cdot d\vec{r} \qquad (4.5)$$

όπου, τα $\vec{r}[C_1],\ \ \vec{r}[C_2]$, δηλώνουν το διάνυσμα $\vec{r}$, καθώς διανύεται η καμπύλη C_1, ή η καμπύλη C_2, αντίστοιχα.

Παράδειγμα 4.5.1: Όλες οι κεντρικές δυνάμεις, δηλ., δυνάμεις της μορφής $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\hat{r}$, (όπου: $\vec{r}$ το διάνυσμα θέσης ως προς το κέντρο έλξης ή άπωσης που ασκεί την κεντρική δύναμη, και $\hat{r}$ το αντίστοιχο μοναδιαίο διάνυσμα), είναι διατηρητικές.

Απόδειξη: Έστω Ο το (ελκτικό ή απωστικό) κέντρο της δύναμης και $\vec{r}_1,\ \ \vec{r}_2$, τα διανύσματα θέσης δύο σημείων Α και Β, ως προς το κέντρο Ο. Ας υποθέσουμε ότι μετακινούμε ένα σωματίδιο από τη θέση Α στη θέση Β, κατά μήκος μίας αυθαίρετης καμπύλης C. Για να υπολογίσουμε το έργο της δύναμης που ασκείται στο σωματίδιο, κατά την μετακίνησή του από το Α στο Β, εξισορροπώντας την κεντρική δύναμη σε κάθε σημείο της διαδρομής, μοιράζουμε την καμπύλη C σε μικρά διανύσματα $d\vec{r}_i$, τέτοια ώστε να εφάπτονται στα διαδοχικά σημεία της C, οπότε το έργο υπολογίζεται ως

$$W = \sum_i \vec{F}(\vec{r}_i)\cdot d\vec{r}_i \ .$$

Κάθε $d\vec{r}_i$ μπορούμε να το αναλύσουμε σε δύο συνιστώσες $d\vec{r}_i = d\vec{r}_{i,\parallel} + d\vec{r}_{i,\perp}$, όπου το $d\vec{r}_{i,\parallel}$ είναι παράλληλο στο τοπικό διάνυσμα της δύναμης $\vec{F}(\vec{r}_i)$ και το $d\vec{r}_{i,\perp} = d\vec{r}_i - d\vec{r}_{i,\parallel}$ είναι η αντίστοιχη προβολή στο επίπεδο το κάθετο στο τοπικό διάνυσμα της δύναμης, οπότε, το έργο υπολογίζεται:

$$W = \sum_i \vec{F}(\vec{r}_i)\cdot d\vec{r}_i = \sum_i \vec{F}(\vec{r}_i)\cdot\left(d\vec{r}_{i,\parallel} + d\vec{r}_{i,\perp}\right) = \sum_i \vec{F}(\vec{r}_i)\cdot d\vec{r}_{i,\parallel} = \sum_i \left(f(r_i)\hat{r}_i\right)\cdot\left(dr_i\hat{r}_i\right) = \sum_i \left(f(r_i)\right)\left(dr_i\right)$$

Στο όριο της λεπτής διαμέρισης, όπου τα μικρά διανύσματα $d\vec{r}_i$, (και οι αντίστοιχες προβολές τους), γίνονται διαφορικές ποσότητες, τότε το άθροισμα τείνει στο αντίστοιχο ολοκλήρωμα

$$W = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} f(r)dr$$

το οποίο δεν εξαρτάται από την διαδρομή, αλλά από τη μορφή της κεντρικής δύναμης $f(r)$ και από τα δύο τερματικά σημεία Α και Β.

Αφού το έργο μίας διατηρητικής δύναμης $\vec{F}$, κατά την μετακίνηση του σημείου εφαρμογής της ανάμεσα σε δύο σημεία, εξαρτάται μόνο από τα δύο αυτά σημεία, χωρίς να έχει καμία επίπτωση στο αποτέλεσμα η συγκεκριμένη διαδρομή που ακολουθείται, τότε μπορούμε, για κάθε σημείο $\vec{r}$ του χώρου, να ορίσουμε μία βαθμωτή συνάρτηση, (με διαστάσεις ενέργειας), που θα την ονομάσουμε **συνάρτηση δυναμικής ενέργειας** (για την αντίστοιχη διατηρητική δύναμη $\vec{F}$), $E_\Delta = E_\Delta(\vec{r})$, τέτοια ώστε η διαφορά της τιμής της ανάμεσα σε δύο σημεία $\vec{r}_{\mathrm{A}}$ και $\vec{r}_{\mathrm{B}}$ να είναι ίση με το έργο της διατηρητικής δύναμης $\vec{F}$, όταν μετακινεί το σημείο εφαρμογής της ανάμεσα στα δύο αυτά σημεία. Συνηθίζεται, ανάλογα με το «υπόστρωμα» που δέχεται την δύναμη, (μάζα, φορτίο, κ.λπ.), να ορίζεται η **συνάρτηση δυναμικού, ή, δυναμικό,** ως το πηλίκο της συνάρτησης δυναμικής ενέργειας, ανά μονάδα υποστρώματος .

Για να καθορίσουμε, με ακριβή τρόπο, τη σχέση που συνδέει την συνάρτηση δυναμικής ενέργειας με την αντίστοιχη δύναμη, εργαζόμαστε ως εξής. Θεωρούμε ότι μία σημειακή μάζα βρίσκεται μέσα σε ένα χώρο όπου δέχεται μία διατηρητική δύναμη η οποία είναι συνάρτηση της θέσης, $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$, (πεδίο δυνάμεων). Ξεκινάμε, με τη σημειακή μάζα να βρίσκεται στο σημείο Α, και θεωρούμε ότι η τιμή της συνάρτησης δυναμικής ενέργειας, σε αυτό το σημείο, είναι γνωστή,

$E_\Delta(\vec{r}_A)=U(A)$, (σημείο αναφοράς). Στη συνέχεια, μετατοπίζουμε την σημειακή μάζα από το σημείο $\vec{r}_A$ σε ένα τυχαίο σημείο $\vec{r}$, φροντίζοντας να μην μεταβάλλεται η κινητική της ενέργεια, ανάμεσα στα δύο σημεία. Αυτό σημαίνει ότι φροντίζουμε να εξισορροπούμε, σε κάθε σημείο, την δύναμη $\vec{F}=\vec{F}(\vec{r})$ που ασκείται από το πεδίο στην σημειακή μάζα, με μία ίση και αντίθετη «εξωτερική» δύναμη $\vec{F}_{\varepsilon\xi}(\vec{r})=-\vec{F}(\vec{r})$. Επομένως, αφού η κινητική ενέργεια του συστήματος παραμένει ίδια κατά την μετακίνηση αυτή, το έργο της «εξωτερικής» δύναμης συνεισφέρει στη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας

$$U(\vec{r})=U(\vec{r}_A)+\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}}\vec{F}_{\varepsilon\xi}\cdot d\vec{r}\Rightarrow U(\vec{r})-U(\vec{r}_A)=-\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}}\vec{F}\cdot d\vec{r} \qquad (4.6)$$

όπου η ολοκλήρωση μπορεί να γίνει κατά μήκος οποιασδήποτε διαδρομής, που συνδέει τα δύο σημεία $\vec{r}_A$ και $\vec{r}$, εφόσον το αποτέλεσμα δεν εξαρτάται από την καμπύλη ολοκλήρωσης, λόγω του διατηρητικού χαρακτήρα της $\vec{F}$. Παρατηρούμε ότι, για να υπολογίσουμε την συνάρτηση δυναμικής ενέργειας μίας διατηρητικής δύναμης, είναι απαραίτητη η γνώση της τιμής της (τιμή αναφοράς, $U(\vec{r}_A)=U(A)$) σε κάποιο συγκεκριμένο σημείο (σημείο αναφοράς, $\vec{r}_A$). Στις περισσότερες πραγματικές περιπτώσεις το σημείο αναφοράς είναι κάποιο σημείο στα άπειρο ($r\to\infty$) και η αντίστοιχη τιμή αναφοράς για την συνάρτηση δυναμικής ενέργειας είναι $U(r\to\infty)=0$. Όταν δεν δίδεται συγκεκριμένο σημείο, (και αντίστοιχη τιμή αναφοράς), τότε λέμε ότι η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας μπορεί να υπολογιστεί με την προσέγγιση μίας προσθετικής σταθεράς.

Όταν τα δύο σημεία $\vec{r}_A$ και $\vec{r}$ απέχουν μία διαφορική απόσταση $d\vec{r}$, έτσι ώστε, $\vec{r}=\vec{r}_A+d\vec{r}$, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του δεύτερου μέλους, στη σχέση (4.6), είναι απλώς ίσο με το εσωτερικό γινόμενο $\vec{F}\cdot d\vec{r}$, ενώ έχουμε, επίσης $U(\vec{r}_A+d\vec{r})-U(\vec{r}_A)=-\vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$. Αναπτύσσοντας, σε πρώτη τάξη ως προς $d\vec{r}=(dx,dy,dz)$, την συνάρτηση δυναμικής ενέργειας U, στην περιοχή του σημείου $\vec{r}_A$, γράφουμε την τελευταία σχέση ως εξής:

$$U(\vec{r}_A+d\vec{r})-U(\vec{r}_A)=-\vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}\Rightarrow\left[U(\vec{r}_A)+\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy+\frac{\partial U}{\partial y}dy\right]-U(\vec{r}_A)=-\vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} \qquad (4.7)$$

Αναπτύσσοντας το εσωτερικό γινόμενο στην τελευταία σχέση, παίρνουμε

$$\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy+\frac{\partial U}{\partial y}dy=-F_x dx-F_y dy-F_z dz \qquad (4.8\alpha)$$

Στη σχέση (4.8α), οι μεταβλητές (x, y, z) είναι ανεξάρτητες και, επομένως, οι διαφορικές μεταβολές μπορεί να είναι οποιεσδήποτε. Για παράδειγμα, αν $\{dx\neq 0, dy=0, dz=0\}$, παίρνουμε $\frac{\partial U}{\partial x}dx=-F_x dx$, που σημαίνει, ισοδύναμα : $F_x=-\frac{\partial U}{\partial x}$. Με ανάλογο τρόπο προκύπτει ότι $F_y=-\frac{\partial U}{\partial y}$ και $F_z=-\frac{\partial U}{\partial z}$. Μπορούμε, επομένως, να γράψουμε συνοπτικά: $\vec{F}=-\left(\frac{\partial U}{\partial x},\frac{\partial U}{\partial y},\frac{\partial U}{\partial y}\right)$.

Αν χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό $\vec{\nabla}\equiv\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial y}\right)\equiv grad$, τότε η σχέση, που συνδέει μία διατηρητική δύναμη με την αντίστοιχη συνάρτηση δυναμικής ενέργειας, είναι :

$$\vec{F}=-\left(\frac{\partial U}{\partial x},\frac{\partial U}{\partial y},\frac{\partial U}{\partial y}\right)=-\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial y}\right)U=-\vec{\nabla}U=-gradU \qquad (4.8\beta)$$

Συμπεραίνουμε, τελικά, ότι σε κάθε διατηρητική δύναμη, αντιστοιχεί μία συνάρτηση δυναμικής ενέργειας τέτοια ώστε η δύναμη να είναι η αρνητική βαθμίδα (–grad) της δυναμικής ενέργειας. Το συμπέρασμα αυτό θα μπορούσε να αποτελέσει ένα ισοδύναμο ορισμό των διατηρητικών δυνάμεων, ως εξής: **Διατηρητική** ονομάζεται κάθε δύναμη $\vec{F}$, η οποία παράγεται ως η αρνητική βαθμίδα μίας κατάλληλης βαθμωτής συνάρτησης U, $\left(\vec{F} = -\vec{\nabla} U\right)$, **(Ορισμός ΙΙ)**.

Επειδή το διάνυσμα $\vec{\nabla} U$ είναι παράλληλο στην κατεύθυνση μέγιστης αύξησης της δυναμικής ενέργειας U, (και το μέτρο του $\left|\vec{\nabla} U\right|$ είναι η μεταβολή δυναμικής ενέργειας ανά μονάδα μήκους, παράλληλα σε αυτήν την κατεύθυνση), το φυσικό νόημα των σχέσεων (4.8β) είναι ότι η δύναμη είναι παράλληλη στην κατεύθυνση μέγιστη μείωσης (λόγω του αρνητικού προσήμου) της δυναμικής ενέργειας. Οι δυνάμεις, εκτός από την διανυσματική τους αναπαράσταση, αναπαριστάνονται και με τη βοήθεια των δυναμικών γραμμών, οι οποίες είναι καμπύλες τέτοιες ώστε, σε κάθε σημείο τους, η δύναμη να είναι εφαπτομενική. Με βάση αυτήν τη χαρακτηριστική ιδιότητα των δυναμικών γραμμών, δηλ., το διάνυσμα $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$, κατά μήκος των δυναμικών γραμμών, να είναι παράλληλο στο τοπικό διάνυσμα της δύναμης $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$, και με τη βοήθεια των όμοιων τριγώνων που σχηματίζονται από τις αντίστοιχες συνιστώσες, γράφουμε την διαφορική μορφή της εξίσωσης των δυναμικών γραμμών ως εξής

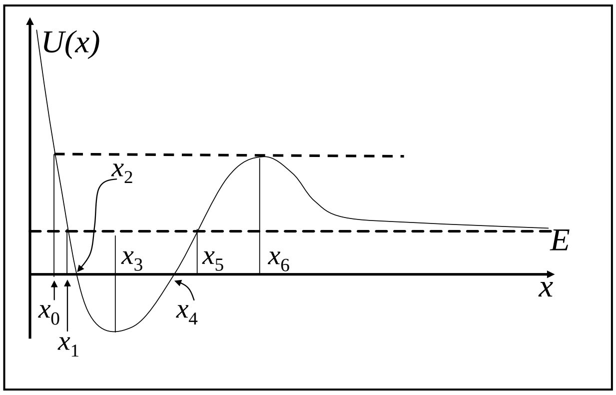
$$\frac{dx}{F_x(x,y,z,)} = \frac{dy}{F_y(x,y,z,)} = \frac{dz}{F_z(x,y,z,)}$$

Η τελευταία σχέση αποτελεί ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης, από την επίλυση του οποίου μπορούν να προκύψουν τόσον οι προβολές των δυναμικών γραμμών στα τρία καρτεσιανά επίπεδα, $x = x_{C_1}(y)$, $y = y_{C_2}(z)$, $z = z_{C_3}(x)$, όσο και η πλήρης έκφρασή τους στο χώρο, $f(x,y,z) = C$. Όλες οι εκφράσεις είναι μονοπαραμετρικές, που σημαίνει ότι, μεταβάλλοντας την τιμή της αντίστοιχης σταθεράς, ($C_{1,2,3}$, ή C), υπολογίζουμε διαφορετική δυναμική γραμμή, κάθε φορά.

Στην περίπτωση των διατηρητικών δυνάμεων, το δυναμικό πεδίο μπορεί να αναπαρασταθεί, επίσης, μέσω των ισοδυναμικών επιφανειών, δηλ., των γεωμετρικών τόπων σταθερού δυναμικού δυναμικού.

Αν σε κάποιο σημείο προσδιορίσουμε το μέγεθος $\vec{\nabla} U \neq 0$, τότε όλες οι μετακινήσεις κατά $d\vec{r} \neq 0$, από το συγκεκριμένο σημείο προς γειτονικά σημεία, τέτοια ώστε $\vec{\nabla} U \cdot d\vec{r} = 0$, οδηγούν σε σημεία σταθερής δυναμικής ενέργειας, δεδομένου ότι $dU = \vec{\nabla} U \cdot d\vec{r} = 0$. Επομένως, οι ισοδυναμικές επιφάνειες είναι κάθετες στις δυναμικές γραμμές του αντίστοιχου δυναμικού πεδίου

Ένα άλλο συμπέρασμα της σχέσης $\vec{F} = -\vec{\nabla} U = -gradU$, που αποτελεί την φυσική της ερμηνεία, είναι το εξής. Επειδή το διάνυσμα της βαθμίδας του δυναμικού, $\vec{\nabla} U = gradU$, είναι παράλληλο στην κατεύθυνση μέγιστης θετικής μεταβολής της δυναμικής ενέργειας U, η δύναμη $\vec{F}$ είναι παράλληλη στην κατεύθυνση μέγιστης αρνητικής μεταβολής της δυναμικής ενέργειας, άρα η δύναμη έλκει το σωματίδιο στο οποίο αναφερόμαστε, προς την κατεύθυνση μείωσης της δυναμικής του ενέργειας. Επομένως, στην περίπτωση των διατηρητικών δυνάμεων, αν αφήσουμε κάπου μία σημειακή μάζα, χωρίς αρχική ταχύτητα, θα έχει την τάση να κινηθεί, (υπό την επίδραση της δύναμης του πεδίου), προς σημεία χαμηλότερης δυναμικής ενέργειας. Η εξέλιξη της κίνησης, βέβαια, εξαρτάται από την πλήρη μορφή του δυναμικού και, στη γενικότερη περίπτωση, από τις αρχικές συνθήκες, (αρχική θέση και αρχική ταχύτητα).



Παράδειγμα 4.5.2: Να μελετηθεί η γενική κίνηση σημειακής μάζας *m* που κινείται, σε μία διάσταση (κατά μήκος του *x*) σε πεδίο διατηρητικής δύναμης, η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας του οποίου δίνεται από την συνεχή καμπύλη του διπλανού σχήματος. Στη συνέχεια να μελετηθεί η κίνηση της ίδιας σημειακής μάζας, αν η συνολική της ενέργεια είναι *E* (εστιγμένη γραμμή).

Απάντηση

Στη γενική περίπτωση, η σημειακή μάζα έχει μηδενική δυναμική ενέργεια στα σημεία x_2 και x_4, όπου η όποια ενέργεια διαθέτει (ανάλογα με τις αρχικές συνθήκες της κίνησής της) είναι κινητική.

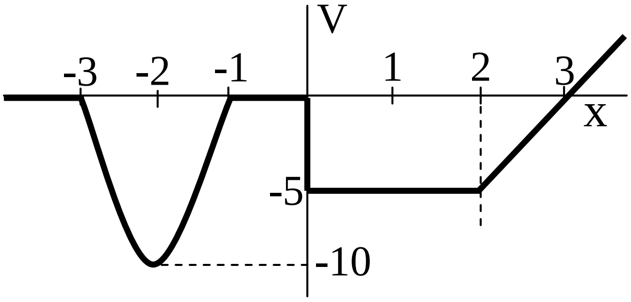
Στα σημεία x_3 και x_6, η μάζα αισθάνεται μηδενική δύναμη, επειδή, στα δύο αυτά σημεία, ισχύει $F = -\dfrac{dU}{dx} = 0$. Επομένως, αν η μάζα αφεθεί με μηδενική ταχύτητα σε καθένα από τα δύο αυτά σημεία, θα ισορροπήσει. Όμως, η ισορροπία στο x_3 είναι ευσταθής ισορροπία, επειδή το σημείο αυτό είναι σημείο ελαχίστου της δυναμικής ενέργειας, ενώ στο x_6 έχουμε ασταθή ισορροπία, επειδή είναι σημείο μεγίστου της δυναμικής ενέργειας.

Αν η σημειακή μάζα αφεθεί σε κάποιο σημείο $x_0 \le x \le x_6$, με συνολική ενέργεια $E \le U(x_6)$, τότε θα εκτελεί περιοδική κίνηση σε περιοχή πεπερασμένης έκτασης. Για παράδειγμα, αν έχει την συνολική ενέργεια E που φαίνεται στο σχήμα, τότε εκτελεί περιοδική κίνηση μεταξύ των σημείων x_1 και x_5, (σημεία αναστροφής).

Αν η συνολική ενέργεια της μάζας είναι $E > U(x_6)$, τότε, αν κατευθύνεται προς το $x \to \infty$, θα συνεχίζει στην ίδια κατεύθυνση και, σε πολύ μεγάλες αποστάσεις θα έχει μη-μηδενική κινητική ενέργεια. Αν κατευθύνεται, αρχικά, προς την αρχή του άξονα x, τότε θα συνεχίσει την κίνησή της μέχρι κάποιο σημείο x, τέτοιο ώστε $U(x) = E$. Εκεί αναστρέφει πορεία και συνεχίζει μέχρι το $x \to \infty$, σύμφωνα με τα ανωτέρω.

Παράδειγμα 4.5.3. Σώμα μάζας m κινείται σε μια διάσταση με δυναμική ενέργεια που δίνεται από τη σχέση (βλ. και σχήμα):

$$-\infty < x < -3, \quad V = 0$$
$$-3 \le x \le -1, \quad V = 10(x^2 + 4x + 3)$$
$$-1 < x < 0, \quad V = 0$$
$$0 \le x \le 2, \quad V = -5$$
$$2 < x < \infty \quad V = 5(x - 3)$$



α.) Το σώμα έχει ολική ενέργεια E=-5 και παρατηρείται στη θέση x=-2,5. Βρείτε τα όρια της κίνησής του. β). Το σώμα έχει ολική ενέργεια E=1 και παρατηρείται στη θέση x=0. Βρείτε τα όρια της κίνησής του. γ). Αν το σώμα ισορροπεί στη θέση x=-2 και του δοθεί ελάχιστο ποσό ενέργειας, περιγράψτε σύντομα γιατί το σώμα θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση και βρείτε τη περίοδο της. δ). Το σώμα έχει E=-3 και παρατηρείται στο x=1, κινούμενο προς τα αριστερά. Μόλις το σώμα φτάσει στη θέση x=0 χάνει το μισό της **κινητικής** ενέργειας. Υπολογίστε, **μετά** τις τρεις πρώτες «κρούσεις» στο x=0, την **ολική** ενέργεια του σώματος. ε) Ποια θα είναι η τελική ολική ενέργεια του σώματος μετά από πολλές κρούσεις;

<u>Απάντηση</u>

Α) $E=V+E_K = -5$

$V(x=-2.5)=-7.5$ Άρα: $E_K = 2.5$

Όρια κίνησης : $E_K = 0 \Rightarrow$ $V = -5 \Rightarrow$ $10(x^2+4x+3) = 5 \Rightarrow x^2+4x+3.5 = 0$

Με ρίζες : $\boxed{x_{1,2} = -2 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}}$

Β) Με Ε=1 στην θέση x = 0 μπορεί να κινηθεί :

i) αριστερά μέχρι το $-\infty$

ii) δεξιά μέχρις ότου $E=V \Rightarrow 5(x-3)=1 \Rightarrow x=16/5$

Άρα : $\boxed{-\infty < x < 16/5}$

Γ) $\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x=-2} = (20x+40)_{x=-2} = -40+40=0:$ ακρότατο, $\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{x=-2} = 20 > 0:$ ελάχιστο,

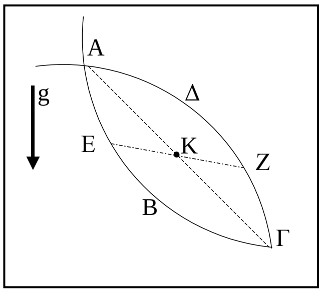
Ισοδύναμη σταθερά ελατηρίου: $k = \left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{x=-2} = 20$

Άρα: συχνότητα ταλάντωσης : $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{20}{m}}}$

Δ) $x=1 \Rightarrow V=-5$ και $E=-3$, Επομένως : $E_K=2$

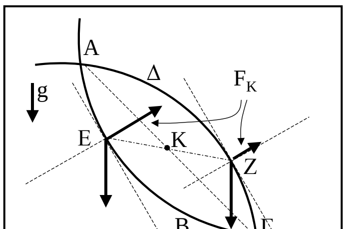
Κατά τις 3 διαδοχικές κρούσεις $(2\to1)$, $(1\to0.5)$, $(0.5\to0.25) \Rightarrow E_{(3)}=V+E_K=-5+0.25=-4.75$

Ε) Μετά από πολλές κρούσεις: $E_K \to 0 \Rightarrow E_{ολ}=V=-5$



Παράδειγμα 4.5.4. Οι τροχιές ΑΒΓ και ΑΔΓ είναι τόξα κύκλων ίδιας ακτίνας, των οποίων τα κέντρα βρίσκονται στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο, μέσα σε πεδίο βαρύτητας g. Οι κλίσεις (d*y*/d*x*) και των δύο τόξων, στα σημεία Α και Γ, και τέτοιες ώστε να ισχύει ($-1 < dy/dx < 0$). Υποθέστε ότι ένα σώμα μάζας m αφήνεται με μηδενική ταχύτητα στο σημείο Α, έτσι ώστε να κινηθεί, με τον ίδιο συντελεστή κινητικής τριβής μ (ανεξάρτητα από την ταχύτητά του), μία φορά κατά μήκος της ΑΒΓ και μία φορά κατά μήκος της ΑΔΓ. **α)** Για ποιά από τις δύο διαδρομές έχει μεγαλύτερη ταχύτητα στο Γ, και γιατί; [Υπόδειξη: Μελετήστε την κίνηση σε δύο σημεία Ε, Ζ, αντιδιαμετρικά ως προς το κέντρο συμμετρίας Κ, του σχήματος, θεωρώντας ότι το κινητό κάνει, στιγμιαία, ομαλή κυκλική κίνηση]

<u>Απάντηση</u>



Για κάθε σημείο Ε της μίας τροχιάς (ΑΒΓ) υπάρχει συμμετρικό (ως προς το κέντρο συμμετρίας Κ) σημείο Ζ στην άλλη τροχιά (ΑΔΓ). Τα δύο σημεία Ε και Ζ χαρακτηρίζονται από το γεγονός ότι έχουν παράλληλες εφαπτόμενες, (άρα, κοινή κλίση ως προς το οριζόντιο, π.χ., επίπεδο, θ)

Επίσης, και στα δύο σημεία εκτελείται κυκλική κίνηση, η κεντρομόλος δύναμη της οποίας εξασφαλίζεται από το συνδυασμό της τοπικής αντίδρασης της τροχιάς (F_K) και της ακτινικής συνιστώσας του βάρους, $mg\cos\theta$.

Οι συνθήκες για την κίνηση στα σημεία Ε και Ζ γράφονται :

$$F_K(E) - mg\cos\theta = m\frac{\upsilon_E^2}{R} \Rightarrow F_K(E) = mg\cos\theta + m\frac{\upsilon_E^2}{R}$$
$$mg\cos\theta - F_K(Z) = m\frac{\upsilon_Z^2}{R} \Rightarrow F_K(Z) = mg\cos\theta - m\frac{\upsilon_Z^2}{R}$$

Επομένως, για όλα τα συζυγή σημεία Ε και Ζ, και ανεξάρτητα από τις τιμές των υ_E^2 και υ_Z^2, ισχύει :

$$F_K(E) > F_K(Z) \Rightarrow \mu F_K(E) > \mu F_K(Z) \Rightarrow T(E) > T(Z)$$

Άρα, κατά μήκος της διαδρομής Α(Ε)ΒΓ έχουμε μεγαλύτερες απώλειες λόγω τριβών, απ' ότι κατά μήκος της διαδρομής ΑΔ(Ζ)Γ. ΑΛΛΑ η μεταβολή δυναμικής ενέργειας είναι ίδια και για τις δύο διαδρομές, ΟΠΟΤΕ, για τις τελικές ταχύτητες, (στο σημείο Γ) έχουμε : $\boxed{\upsilon_{AB\Gamma}^{\tau\varepsilon\lambda} < \upsilon_{A\Delta\Gamma}^{\tau\varepsilon\lambda}}$

Παράδειγμα 4.5.5: Μελέτη της κίνησης σημειακής μάζας m, σε μία διάσταση (x), σε πεδίο με συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $U(x) = -\frac{10}{x^6} + \frac{1}{x^{12}}$, όπου x > 0 η απόσταση από ένα σημείο, που λειτουργεί ως πηγή της αντίστοιχης δύναμης. [Η ανωτέρω μορφή του δυναμικού είναι μία από τις μορφές με της οποίες παρουσιάζεται το δυναμικό που είναι γνωστό ως δυναμικό Lennard – Jones και περιγράφει, π.χ., την αλληλεπίδραση δύο ατόμων σε ένα δι-ατομικό μόριο, σε αυτή την περίπτωση, x: είναι το μέτρο της απόστασης ανάμεσα στα δύο άτομα. Ισοδύναμες μορφές γραφής του δυναμικού Lennard–Jones: $U(x) = \frac{A}{x^{12}} - \frac{B}{x^6}$, $U(x) = \varepsilon\left[\left(\frac{r_m}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{r_m}{r}\right)^6\right]$

Απάντηση

(α) Ας υπολογίσουμε πρώτα το σημείο μηδενισμού (x_1) της συνάρτησης δυναμικής ενέργειας

$$U(x_1) = 0 \Rightarrow -\frac{10}{x_1^6} + \frac{1}{x_1^{12}} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{x_1^6}\left(10 - \frac{1}{x_1^6}\right) = 0$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας μηδενίζεται όταν το $x \to \infty$ καθώς και για την τιμή $x_1 = 1/\sqrt[6]{10}$

Από τη δοσμένη συνάρτηση δυναμικής ενέργειας μπορούμε να υπολογίσουμε την δύναμη

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U(x) = -\hat{x}\frac{d}{dx}\left(-10x^{-6} + x^{-12}\right) = -\hat{x}\left(60x^{-7} - 12x^{-13}\right) = \left(-\hat{x}60x^{-7} + \hat{x}12x^{-13}\right)$$

Παρατηρούμε ότι ο αρνητικός όρος του δυναμικού δίνει μία ελκτική δύναμη (προς το $-\hat{x}$), ενώ ο θετικός όρος δίνει μία απωστική δύναμη (προς το $+\hat{x}$). Η συνολική δύναμη μηδενίζεται εκεί (στο σημείο x_2) όπου η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας παρουσιάζει μηδενισμό της πρώτης παραγώγου

$$\vec{F} = 0 \Rightarrow \left(-\hat{x}60x^{-7} + \hat{x}12x^{-13}\right) = 0 \Rightarrow \frac{12}{x^7}\left(5 - \frac{1}{x^6}\right) = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{\sqrt[6]{5}}$$

Η τιμή της δυναμικής ενέργειας σε αυτό το σημείο είναι

$$U_{\min} = U(x_2) = -\frac{10}{x_2^6} + \frac{1}{x_2^{12}} = -\frac{10}{1/5} + \frac{1}{1/25} = -50 + 25 = -25$$

Το συγκεκριμένο σημείο (x_2), (ως σημείο μηδενισμού της συνολικής δύναμης) είναι σημείο ισορροπίας. Το είδος της ισορροπίας, (ευσταθής, ασταθής, ή αδιάφορος), προκύπτει από την μελέτη της δεύτερης παραγώγου του δυναμικού. Γενικά, και ανεξάρτητα από τη μορφή του συγκεκριμένου δυναμικού κάθε φορά, εργαζόμαστε ως εξής. Πρώτα, προσδιορίζουμε τα σημεία (x_i) που μηδενίζεται η πρώτη παράγωγος του δυναμικού. Στη συνέχεια, στην περιοχή καθενός από τα σημεία μηδενισμού της παραγώγου, αναπτύσσουμε το δυναμικό σε σειρά Taylor, μέχρι όρους δεύτερης τάξης, θεωρώντας ότι η απομακρύνσεις από το σημείο ισορροπίας είναι μικρές και, επομένως, οι ανώτερες τάξεις είναι ασήμαντες.

$$U(x) = U(x_i) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{x_i}(x - x_i) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_{x_i}(x - x_i)^2 + \ldots$$

Επειδή το x_i είναι σημείο ισορροπίας, η πρώτη παράγωγος μηδενίζεται, όπως ήδη είπαμε. Αν ορίσουμε ως νέα μεταβλητή την απομάκρυνση από το σημείο ισορροπίας, $\xi = x - x_i$, έχουμε $d\xi = dx$ και $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \xi}$. Όμοια, $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}$, οπότε το ανάπτυγμα σε σειρά Taylor γράφεται

$$U(x_i + \xi) = U(x_i) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\right)_{x_i}\xi^2 + \ldots$$

Επομένως, για μικρές απομακρύνσεις, από κάθε σημείο ισορροπίας, η δύναμη υπολογίζεται τοπικά ως:

$$F = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial \xi} = -\frac{d}{d\xi}\left[U(x_i) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\right)_{x_i}\xi^2\right] = -\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\right)_{x_i}\xi,$$

δεδομένου ότι οι ποσότητες $U(x_i)$ και $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\right)_{x_i}$ είναι σταθερές . Όπως παρατηρούμε από την παραπάνω σχέση, η δύναμη που δέχεται ένα σώμα, όταν απομακρύνεται λίγο από ένα σημείο ισορροπίας, είναι ανάλογη της απομάκρυνσης και το πρόσημό της εξαρτάται από το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου της συνάρτησης δυναμικής ενέργειας, στο συγκεκριμένο σημείο.

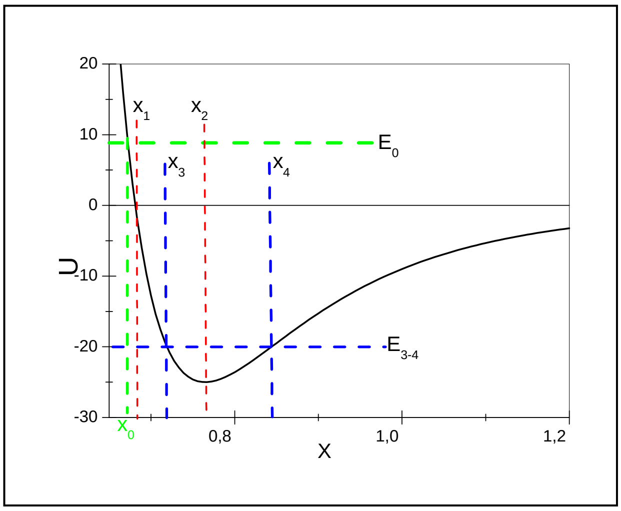
Ειδικότερα, όταν $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\right)_{x_i} > 0$, η δύναμη είναι αντίθετη της απομάκρυνσης, άρα λειτουργεί ως δύναμη επαναφοράς από ελατήριο, και η ισορροπία είναι ευσταθής, αφού η αναπτυσσόμενη δύναμη τείνει να επαναφέρει το σώμα στο σημείο ισορροπίας. Σε αυτή την περίπτωση η σταθερά επαναφοράς, (ή, ισοδύναμη σταθερά ελατηρίου) είναι η ίδια η τιμή της δεύτερης παραγώγου, υπολογισμένη στο σημείο ισορροπίας, $F = -\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\right)_{x_i}\xi = -D\xi$. Χρησιμοποιώντας, μάλιστα, τα αποτελέσματα της μελέτης για την κίνηση σημειακής μάζας m υπό την επίδραση ελατηρίου, συμπεραίνουμε ότι μία σημειακή μάζα m, που απομακρύνεται λίγο από το σημείο ισορροπίας x_2 του συγκεκριμένου δυναμικού, εκτελεί αρμονική ταλάντωση με κυκλική συχνότητα

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{\left(\partial^2 U / \partial \xi^2\right)_{x_2}}{m}}$$

Στην αντίθετη περίπτωση, κατά την οποίαν $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\right)_{x_i} < 0$, η δύναμη είναι ανάλογη και ίδιας κατεύθυνσης με την απομάκρυνση από το σημείο ισορροπίας. Επομένως, η παραμικρή απομάκρυνση από την κατάσταση ισορροπίας, έχει ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη μίας δύναμης προς την κατεύθυνση της απομάκρυνσης, άρα η ισορροπία στο αντίστοιχο σημείο είναι ασταθής.

Στην περίπτωση κατά την οποία $\left(\dfrac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\right)_{x_i} = 0$, το είδος της ισορροπίας εξαρτάται από τις ιδιότητες των ανώτερων παραγώγων.

(β) Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η μορφή της συγκεκριμένης συνάρτησης δυναμικής ενέργειας στην περιοχή όπου έχει μη-μονότονη συμπεριφορά. Φαίνονται επίσης τα πεπερασμένα σημεία όπου μηδενίζεται η δυναμική ενέργεια (x_1) και η δύναμη (x_2). Επομένως το σημείο x_2 είναι σημείο ισορροπίας, με την έννοια ότι αν τοποθετηθεί εκεί μία σημειακή μάζα m με μηδενική ταχύτητα, επειδή δέχεται μηδενική δύναμη, θα συνεχίσει να ακινητεί. Το επόμενο πράγμα που μπορούμε να διαπιστώσουμε είναι ότι αυτό το σημείο αποτελεί ελάχιστο της συνάρτησης δυναμικής ενέργειας. Πράγματι, $\left(\dfrac{d^2 U}{dx^2}\right)_{x_2} > 0$, και επομένως το x_2 είναι σημείο ελαχίστου, Αυτό σημαίνει επίσης ότι αν μία σημειακή μάζα τοποθετηθεί σε μικρή απόσταση από το x_2 ($x = x_2 \pm \varepsilon$), τότε τείνει να επιστρέψει προς το σημείο x_2 όπου ελαχιστοποιείται η δυναμική της ενέργεια.



Από την μορφή που έχει η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας, και από την τιμή της συνολικής ενέργειας. (κινητικής + δυναμικής), μπορεί, επίσης, να εκτιμηθεί κατά πόσον μία σημειακή μάζα m θα κινηθεί σε μία περιοχή με πεπερασμένα όρια, (φραγμένη κίνηση), ή σε μία περιοχή άπειρης έκτασης, (μη-φραγμένη κίνηση). Π.χ., με αναφορά στο παραπάνω σχήμα, αν η συνολική ενέργεια μίας σημειακής μάζας m είναι $E_0 > 0$, αυτό σημαίνει ότι, σε κάθε σημείο του άξονα $-x$, πρέπει: $\frac{1}{2} m\upsilon^2(x) + U(x) = E_0$, όπου $\upsilon(x)$ η ταχύτητα της μάζας στο σημείο x, και $U(x)$ η αντίστοιχη τιμή της δυναμικής ενέργειας. Με βάση τα ανωτέρω, το αριστερό όριο (x_0) της περιοχής, μέσα στην οποία μπορεί να κινηθεί η μάζα m, προσδιορίζεται από την σχέση $U(x_0) = E_0$, αφού σε αυτό το σημείο μηδενίζεται αναγκαστικά η κινητική του ενέργεια. Αν υποθέσουμε, λοιπόν, ότι η μάζα m ευρίσκεται στο σημείο x_0 με μηδενική ταχύτητα. Επειδή, όπως βλέπουμε από το σχήμα, σε αυτό το σημείο ισχύει $\dfrac{dU}{dx} < 0$, η δύναμη που δέχεται η μάζα θα είναι $F = -\dfrac{dU}{dx} > 0$, άρα τείνει να επιταχύνει τη μάζα σε μεγαλύτερες θετικές τιμές του x, (δηλ., τείνει να την κινήσει προς περιοχές χαμηλότερης δυναμικής ενέργειας). Η κίνηση αυτή συνεχίζεται με αυξανόμενη ταχύτητα, μέχρι το σημείο x_2 του ελαχίστου της δυναμικής ενέργειας. Σε αυτό το σημείο η ταχύτητα λαμβάνει την μεγαλύτερη τιμή της, η οποία υπολογίζεται από την διατήρηση της συνολικής ενέργειας, ίση προς $\upsilon(x_2) = \upsilon_{\max} = \sqrt{\dfrac{2\left(E_0 - U(x_2)\right)}{m}}$. Στο σημείο αυτό μηδενίζεται η δύναμη από το διατηρητικό πεδίο, αλλά η μάζα συνεχίζει να κινείται προς την ίδια κατεύθυνση λόγω της κεκτημένης ταχύτητας, που μόλις υπολογίσαμε. Για την περιοχή $x > x_2$, η παράγωγος του συγκεκριμένου δυναμικού είναι θετική, $\left.\dfrac{dU}{dx}\right|_{x>x_2} > 0$, και επομένως η δύναμη είναι αρνητική και τείνει να επιβραδύνει την μάζα. Άρα, για $x > x_2$, η μάζα κινείται επιβραδυνόμενη, επειδή, όμως, για όλη αυτή την περιοχή, η διαφορά $E_0 - U(x)$ είναι πάντοτε θετική, η κινητική ενέργειά της δεν μηδενίζεται ποτέ και, επομένως, δεν αντιστρέφεται η φορά της κίνησής της, παρά την επιβραδύνουσα δύναμη, η οποία όμως μικραίνει συνεχώς, καθώς μειώνεται η τιμή της παραγώγου dU/dx. Καθώς το $x \to \infty$, η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας τείνει στο μηδέν, άρα, $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}m\upsilon^2\right) = E_0 \Rightarrow \upsilon(x\to\infty) = \sqrt{2E_0/m}$.

Μία άλλη περίπτωση με, ποιοτικώς, διαφορετικά χαρακτηριστικά είναι εκείνη κατά την οποία η συνολική ενέργεια, (κινητική + δυναμική), έχει την τιμή E_{3-4} που φαίνεται στο ίδιο σχήμα, (οι τιμές του υποδείκτη θα γίνουν κατανοητές με βάση τους δείκτες των σημείων αναστροφής, x_3 και x_4 που θα συζητηθούν στη συνέχεια). Επειδή η κινητική ενέργεια είναι, πάντοτε, μία θετική ποσότητα, η μάζα μπορεί να κινείται μόνο στην περιοχή στην οποία η διαφορά $E_{3-4} - U(x)$ είναι μη αρνητική, $E_{3-4} - U(x) \geq 0$. Τα όρια, x_3 και x_4, αυτής της περιοχής προσδιορίζονται ως ρίζες της εξίσωσης $E_{3-4} - U(x) = 0$, και ονομάζονται σημεία αναστροφής, επειδή αναστρέφεται η κίνηση της μάζας όταν φτάνει σε αυτά τα σημεία. Στην συγκεκριμένη περίπτωση, αν, π.χ., $E_{3-4} = -20$, θα πρέπει $-\dfrac{10}{x_1^6} + \dfrac{1}{x_1^{12}} = -20 \Rightarrow -10x^6 + 1 = -20x^{12} \Rightarrow 20(x^6)^2 - 10(x^6) + 1 = 0$.

Προσδιορίζουμε τις ρίζες του τριωνύμου, ως προς $y = x^6$,

$$20y^2 - 10y + 1 = 0 \Rightarrow y_{3,4} = \frac{10 \mp \sqrt{100-80}}{40} = \frac{10 \mp 2\sqrt{5}}{40} = \frac{5 \mp \sqrt{5}}{20},$$

επομένως, τα σημεία αναστροφής θα είναι τα : $x_{3,4} = \sqrt[6]{\dfrac{5 \mp \sqrt{5}}{20}}$

(γ) Μία συνολικότερη μελέτη της κίνησης μίας σημειακής μάζας m στο συγκεκριμένο πεδίο δυνάμεων θα μπορούσε να προκύψει από την αρχική σχέση της συνολικής ενέργειας

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2(x) + U(x) = E \Rightarrow \upsilon(x) = \sqrt{\frac{2\left(E - U(x)\right)}{m}} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2\left(E - U(x)\right)}{m}}$$

Η τελευταία σχέση αποτελεί μία διαφορική εξίσωση για την συνάρτηση της θέσης $x = x(t)$, η οποία μπορεί, κατ' αρχήν, να ολοκληρωθεί, αν είναι γνωστή η σταθερή τιμή της συνολικής ενέργειας E, η αναλυτική έκφραση $U = U(x)$, καθώς και κάποιες αρχικές συνθήκες

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2\left(E - U(x)\right)}{m}} \Rightarrow \left[2\left(E - U(x)\right)\right]^{-1/2} dx = m^{-1/2} dt \Rightarrow \int_{x(t=t_0)}^{x} \left[2\left(E - U(x)\right)\right]^{-1/2} dx = m^{-1/2}(t - t_0).$$

Αν υποθέσουμε ότι $x(t = t_0) = x_0$, και το ολοκλήρωμα, ως προς dx, μπορεί να υπολογιστεί, $\int_{x_0}^{x} \left[2\left(E - U(x)\right)\right]^{-1/2} dx = G(x_0, E; x)$, τότε η επίλυση της σχέσης $G(x_0, E; x) = m^{-1/2}\left(t - t_0\right)$, ως προς x, μπορεί να μας δώσει την συνάρτηση της θέσης x συναρτήσει του χρόνου, $x = X(m, x_0, t_0, E; t)$.

Παράδειγμα 4.5.6: Σημειακή μάζα m κινείται σε μία διάσταση (x), υπό την επίδραση διατηρητικής δύναμης με γνωστή συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $U = U(x)$. (α) Αν η μάζα έχει συνολική ενέργεια E και τις χρονικές στιγμές t_1 και t_2 βρίσκεται στα σημεία x_1 και x_2, αντίστοιχα, να υπολογιστεί η χρονική διαφορά $t_2 - t_1$. (β) Αν η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας έχει τη μορφή $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$ και η σημειακή μάζα ξεκινάει από το σημείο x_0 με μηδενική ταχύτητα, να βρεθεί η θέση της σημειακής μάζας ως συνάρτηση του χρόνου, $x = x(t)$.

Απάντηση

(α) Η συνολική ενέργεια της σημειακής μάζας είναι

$$E = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + U(x) \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2 = E - U(x) \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(x)\right)} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(x)\right)}$$

Ολοκληρώνοντας (όπως και στο προηγούμενο Παράδειγμα) παίρνουμε

$$\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(x)\right)}} = dt \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(x)\right)}} \Rightarrow t_2 - t_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(x)\right)}}$$

(β) Για την συγκεκριμένη μορφή δυναμικής ενέργειας (δυναμικό αρμονικού ταλαντωτή), η συνολική ενέργεια της σημειακής μάζας είναι η ίδια σε κάθε θέση, κατά την διάρκειας της κίνησής του, επομένως

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2(x) + \frac{1}{2}kx^2 = 0 + \frac{1}{2}kx_0^2 \Rightarrow \upsilon^2 = \frac{k}{m}\left(x_0^2 - x^2\right) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{k}{m}\left(x_0^2 - x^2\right)},$$

η οποία ολοκληρώνεται, ως εξής:

$$\frac{dx}{\sqrt{\left(x_0^2 - x^2\right)}} = \sqrt{\frac{k}{m}}dt \Rightarrow \sqrt{\frac{k}{m}}\int_{t=0}^{t} dt = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\left(x_0^2 - x^2\right)}}.$$

$$\sqrt{\frac{k}{m}}t = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\left(x_0^2 - x^2\right)}} = \arcsin\left(\frac{x}{x_0}\right)\Bigg|_{x_0}^{x} = \arcsin\left(\frac{x}{x_0}\right) - \arcsin(1) \Rightarrow \sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{\pi}{2} = \arcsin\left(\frac{x}{x_0}\right)$$

Η αντιστροφή της τελευταίας σχέσης μας δίνει

$$\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{\pi}{2} = \arcsin\left(\frac{x}{x_0}\right) \Rightarrow x = x_0 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right),$$

που είναι η αρμονική ταλάντωση με πλάτος απομάκρυνσης x_0 και κυκλική συχνότητα $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Παράδειγμα 4.5.7. Σημειακή μάζα m κινείται κατά μήκος του άξονα x σε περιοχή που χαρακτηρίζεται από συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $U(x)=B(x^2 - a^2)^2$. **α)** Βρείτε τα σημεία ισορροπίας και χαρακτηρίστε τα, ως προς το είδος ισορροπίας (ευσταθής, ασταθής). **β)** Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της $U(x)$. **γ)** Περιγράψτε την κίνηση της μάζας m, αν αφεθεί σε ένα από τα σημεία $x = \pm a$ με ταχύτητα μέτρου ελάχιστα μικρότερη από $\upsilon_0 = a^2\sqrt{2B/m}$. **δ)** Περιγράψτε την κίνηση της μάζας m, αν αφεθεί σε ένα από τα σημεία $x = \pm a$ με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_0 > a^2\sqrt{2B/m}$.
ε) Να δείξετε ότι, αν η μάζα m αφεθεί σε ένα από τα σημεία $x = \pm a$, με ταχύτητα $\upsilon_1 = \lambda a^2\sqrt{2B/m}$,

όπου $\lambda << 1$, θα εκτελέσει αρμονική ταλάντωση, με κυκλική συχνότητα, ω, (ανεξάρτητη του λ), και να την υπολογίσετε, συναρτήσει των *a*, Β και *m*.

Απάντηση

α) Σημεία Ισορροπίας : ακρότατα της συνάρτησης δυναμικής ενέργειας

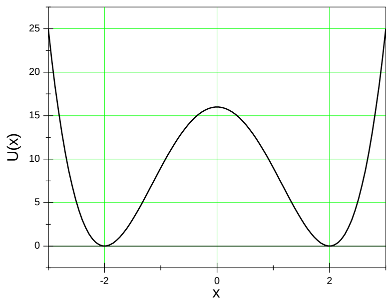
$$U(x) = B(x^2 - a^2)^2 = B(x^4 + a^2 - 2a^2x^2)$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=x_0} = 0 \Rightarrow B(4x^3 - 4a^2x)\big|_{x=x_0} = 0 \Rightarrow 4Bx_0(x_0^2 - a^2) = 0 \Rightarrow x_0 = \{-a, 0, +a\}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = B(12x^2 - 4a^2) = 4B(3x^2 - a^2)$$, οπότε $\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{x=\pm a} = 8Ba^2$ και $\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{x=0} = -4Ba^2$

οπότε στα $x = \pm a$ έχουμε τοπικό ελάχιστο της δυναμικής ενέργειας, άρα ευσταθή ισορροπία, ενώ στο σημείο x=0 έχουμε τοπικό μέγιστο της δυναμικής ενέργειας, άρα ασταθή ισορροπία.

β) Γραφική παράσταση της U(x)



γ) Αν αφεθεί μάζα m, σε ένα από τα σημεία $x = \pm a$ με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_0 = a^2\sqrt{2B/m}$, θα έχει μηδενική δυναμική ενέργεια και κινητική ενέργεια

$$E_K = \frac{1}{2}m\upsilon^2 < \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = \frac{1}{2}m\left(a^2\sqrt{2B/m}\right)^2 = Ba^4 = U(x=0)$$

άρα η συνολική της ενέργεια θα είναι όσο η δυναμική ενέργεια στο x=0, το οποίο, σε αυτή την περίπτωση θα ήταν σημείο (ασταθούς) ισορροπίας. Ενώ αν αφεθεί σε ένα από τα σημεία $x = \pm a$ με ταχύτητα μέτρου ελάχιστα μικρότερη από $\upsilon_0 = a^2\sqrt{2B/m}$, τότε δύο σημεία πολύ κοντά και εκατέρωθεν του *x*=0 θα είναι σημεία αναστροφής, σε συνδυασμό με ένα από τα άλλα σημεία αναστροφής $x = \pm a\sqrt{2}$, ανάλογα με το αν το σημείο εκκίνησης ήταν το +a ή το –a.

δ) Αν η μάζα m αφεθεί σε ένα από τα σημεία $x = \pm a$ με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_0 > a^2\sqrt{2B/m}$, τότε θα υπάρχει αρκετή ενέργεια για να υπερβεί τον ενδιάμεσο φραγμό του δυναμικού στο x=0, οπότε τα νέα σημεία αναστροφής της κίνησης θα εκτείνονται λίγο πέραν των $x = \pm a\sqrt{2}$. Αυτό σημαίνει ότι με μία μικρή αύξηση της ταχύτητας εκκίνησης, στα $x = \pm a$, πέραν της τιμής $\upsilon_0 = a^2\sqrt{2B/m}$ διπλασιάζεται το εύρος της περιοχής στην οποία εκτείνεται η κίνηση της μάζας.

ε) Αν η μάζα m αφεθεί σε ένα από τα σημεία $x = \pm a$, με ταχύτητα $\upsilon_1 = \lambda a^2\sqrt{2B/m}$, όπου $\lambda \ll 1$, η διαθέσιμη ενέργεια θα είναι αρκετή για μικρές μόνο κινήσεις περί αυτά τα σημεία τα οποία είναι σημεία ευσταθούς ισορροπίας (βλ. ερώτημα (α)). Το ανάπτυγμα Taylor της δυναμικής ενέργειας, για μικρές απομακρύνσεις, ξ, περί αυτά τα σημεία, π.χ. x=+a, γράφεται:

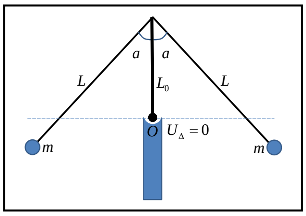
$$U(a+\xi)=U(a)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\bigg|_{x=a}\xi^2=0+\frac{1}{2}\left(8Ba^2\right)\xi^2,$$

δηλαδή το δυναμικό έχει μορφή αρμονικού ταλαντώτή με ισοδύναμη σταθερά ελαστηρίου

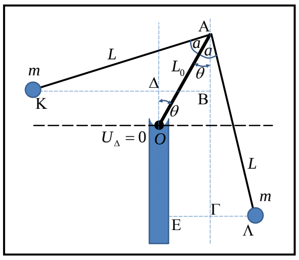
$$k=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\bigg|_{x=a}=8Ba^2,$$

οπότε η κυκλική συχνότητα, ω, της ταλάντωσης είναι

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{\left(\partial^2 U/\partial x^2\right)_{x=a}}{m}}=\sqrt{\frac{8Ba^2}{m}}=2a\sqrt{\frac{2B}{m}}.$$



Παράδειγμα 4.5.8 Το σύστημα που φαίνεται στο σχήμα αποτελείται από ένα ραβδόμορφο φορέα (που είναι κατακόρυφος, σε κατάσταση ισορροπίας), στον οποίον είναι συνδεδεμένοι εκατέρωθεν, σε σταθερή γεωμετρία ίσων γωνιών, δύο ράβδοι που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο με τον κεντρικό φορέα. Το μήκος L_0 του φορέα, τα μήκη L των δύο ράβδων, καθώς και η γωνία a που σχηματίζει ο καθένας με τον φορέα είναι δεδομένα. Στα ελεύθερα άκρα των ράβδων είναι στερεωμένες σημειακές μάζες m, πολύ μεγαλύτερες από τη μάζα των ράβδων και του φορέα (που θεωρείται αμελητέα), και το σύστημα μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές περί άξονα, **<u>κάθετον στο επίπεδο του σχήματος</u>**, που διέρχεται από το κατώτερο σημείο Ο του φορέα. Διαταράσσουμε το σύστημα από την κατάσταση ισοροππίας, εκτρέποντας τον φορέα, κατά γωνία θ, από την κατακόρυφο.

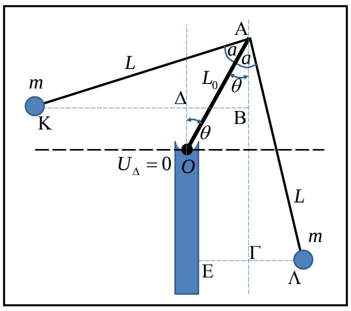


(α) Να βρείτε τη συνθήκη την οποία πρέπει να ικανοποιούν τα μεγέθη $\left(L_0, L, a\right)$ προκειμένου να βρίσκεται το σύστημα σε κατάσταση ευσταθούς ισορροπίας [Υπόδειξη: Εργαστείτε είτε με τις ροπές (περί το Ο), είτε με τη δυναμική ενέργεια (ως προς το οριζόντιο επίπεδο από το Ο)]

(β) Με την προϋπόθεση ότι $L\cos a > L_0$, υπολογίστε τη συχνότητα ταλάντωσης του συστήματος για απόκλιση μικρών γωνιών $\left(\theta : \theta \simeq \sin\theta \simeq \tan\theta\right)$ [Υπόδειξη: Εργαστείτε είτε με τη σχέση $I_O\ddot{\theta}=N_o$, είτε με τη σχέση $\omega_{\sigma\tau\rho}=\sqrt{\left(\partial^2 U/\partial\theta^2\right)_{\theta=0}/I_0}$]

Δίδεται: $\cos\left(a\pm\theta\right)=\left(\cos a\cos\theta\mp\sin a\sin\theta\right)$, $\sin\left(a\pm\theta\right)=\left(\sin a\cos\theta\pm\cos a\sin\theta\right)$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



(α) ΜΕΣΩ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ : Θεωρούμε ως επίπεδο αναφοράς δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που περνάει από το σημείο περιστροφής (κατώτατο σημείο) του φορέα. Από το σχήμα της εκφώνησης υπολογίζουμε τη δυναμική ενέργεια σε κατάσταση ισορροπίας $W_0=2mg\left(L_0-L\cos a\right)$.

Όταν υπάρχει απόκλιση κατά γωνία θ (όπως στο σχήμα), η δυναμική ενέργεια είναι

$$W=W_1+W_2=mg\left[L_0\cos\theta-\text{ΑΓ}\right]+mg\left[L_0\cos\theta-\text{ΑΒ}\right]$$

$$W=W_1+W_2=mg\left[L_0\cos\theta-L\cos\left(a-\theta\right)\right]+mg\left[L_0\cos\theta-L\cos\left(a+\theta\right)\right]$$

Αναπτύσσοντας τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις :

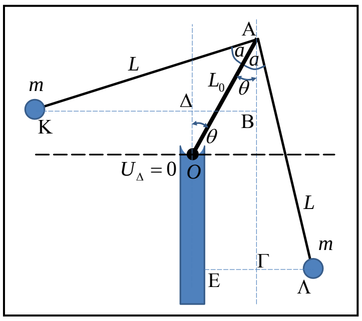
$$W = mg\left[L_0\cos\theta - L\cos(a-\theta)\right] + mg\left[L_0\cos\theta - L\cos(a+\theta)\right]$$
$$= 2mgL_0\cos\theta - mgL\left[(\cos a\cos\theta + \sin a\sin\theta) + (\cos a\cos\theta - \sin a\sin\theta)\right] =$$
$$= 2mgL_0\cos\theta - 2mgL\cos a\cos\theta = 2mg\left(L_0 - L\cos a\right)\cos\theta$$

Συνθήκη ισορροπίας: $\dfrac{dW}{d\theta} = 0 \Rightarrow -2mg\left(L_0 - L\cos a\right)\sin\theta = 0 \Rightarrow \left\{\begin{matrix}\theta = 0\\ \theta = \pi\end{matrix}\right\} \Rightarrow \theta = 0$

Είδος ισορροπίας: $\left(\dfrac{d^2W}{d\theta^2}\right)_{\theta=0} = \left(-2mg\left(L_0 - L\cos a\right)\cos\theta\right)_{\theta=0} = -2mg\left(L_0 - L\cos a\right)$

Άρα το είδος της ισορροπίας εξαρτάται από το πρόσημο του $\left(L_0 - L\cos a\right)$

Η ισορροπία είναι ευσταθής όταν (στην κατακόρυφη θέση) το επίπεδο των μαζών είναι κάτω από το σημείο στήριξης του φορέα $\left[\left(L_0 - L\cos a\right) < 0\right]$



ΜΕΣΩ ΡΟΠΩΝ:

Θεωρώντας ως θετική φορά διαγραφής της θ την δεξιόστροφη, υπολογίζουμε τις ροπές, ως προς Ο, από τα βάρη των δύο μαζών

$$N_0 = mg\left(\Lambda\Gamma + \Gamma\mathrm{E}\right) - mg\left(\mathrm{KB} - \Delta\mathrm{B}\right) =$$
$$= mg\left[L\sin(a-\theta) + L_0\sin\theta - L\sin(a+\theta) + L_0\sin\theta\right] \Rightarrow$$
$$N_0 = mg\left[2L_0\sin\theta + L\sin(a-\theta) - L\sin(a+\theta)\right]$$

Αναπτύσσοντας τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις, παίρνουμε:

$$N_0 = mg\left[2L_0\sin\theta + L(\sin a\cos\theta - \cos a\sin\theta) - L(\sin a\cos\theta + \cos a\sin\theta)\right]$$

Και τελικά: $N_0 = 2mg\left[L_0 - L\cos a\right]\sin\theta$

Η ροπή αυτή: (i) επιτείνει την εκτροπή του συστήματος όταν είναι θετική $\left[L_0 - L\cos a\right] > 0$, (ii) λειτουργεί ως ροπή επαναφοράς όταν είναι αρνητική $\left[L_0 - L\cos a\right] < 0$

Στη δεύτερη περίπτωση, για μικρές γωνίες διαταραχής, έχουμε

$$N_0 = -2mg\left|L_0 - L\cos a\right|\sin\theta \simeq -\left(2mg\left|L_0 - L\cos a\right|\right)\theta,$$

Οπότε, η εξίσωση στροφικής κίνησης γίνεται

$$I_o\ddot{\theta} = N_0 \Rightarrow I_o\ddot{\theta} \simeq -\left(2mg\left|L_0 - L\cos a\right|\right)\theta \Rightarrow I_o\ddot{\theta} + \left(2mg\left|L_0 - L\cos a\right|\right)\theta = 0,$$

Δηλαδή έχουμε στροφική ταλάντωση, με $\omega_0^2 = \left(2mg\left|L_0 - L\cos a\right|\right)/I_o$, όπου I_o η ροπή αδράνειας του συστήματος περί άξονα κάθετο στο σχήμα, που διέρχεται από το Ο (υπολογίστε την).

4.6 Διατηρητικές Δυνάμεις και Αστρόβιλα Πεδία

Η σχέση (4.5), που εκφράζει τον ορισμό (Ι) της διατηρητικής δύναμης, μπορεί να γραφεί και ως εξής :

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{F}(\vec{r}[C_1])\cdot d\vec{r} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{F}(\vec{r}[C_2])\cdot d\vec{r} \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{F}(\vec{r}[C_1])\cdot d\vec{r} - \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{F}(\vec{r}[C_2])\cdot d\vec{r} = 0 \qquad (4.9)$$

Αντιστρέφοντας την φορά ολοκλήρωσης του δεύτερου ολοκληρώματος, με ταυτόχρονη μετατροπή του αρνητικού προσήμου σε θετικό, παίρνουμε

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{F}(\vec{r}[C_1])\cdot d\vec{r} + \int_{B}^{A} \vec{F}(\vec{r}[C_2])\cdot d\vec{r} = 0 \Leftrightarrow \oint_{C=C_1+C_2} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = 0 \qquad (4.10)$$

όπου, ο συμβολισμός: « $\oint\limits_{C=C_1+C_2}$ » σημαίνει κλειστό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα, κατά μήκος της κλειστής καμπύλης C, η οποία αποτελείται από την C_1 (διανυόμενη κατά την φορά $\mathrm{A} \to \mathrm{B}$) και την C_2 (διανυόμενη κατά την φορά $\mathrm{B} \to \mathrm{A}$).

Αν λάβουμε υπόψη μας ότι είχαμε ονομάσει διατηρητική μία δύναμη, όταν το έργο που παράγεται κατά την μετακίνηση του σημείου εφαρμογής, ανάμεσα σε δύο σημεία Α και Β, είναι ίδιο για όλες τις δυνατές διαδρομές, που τερματίζουν σε αυτά τα σημεία, σε συνδυασμό με την σχέση (4.7), διαπιστώνουμε ότι μπορούμε να διατυπώσουμε έναν ισοδύναμο ορισμό, ως εξής.

<u>Ονομάζουμε μία δύναμη **διατηρητική ή συντηρητική** όταν το έργο που παράγεται κατά την μετακίνηση του σημείου εφαρμογής της, κατά μήκος οποιασδήποτε κλειστής διαδρομής, είναι μηδέν (**Ορισμός ΙΙ**)</u>.

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\oint\limits_C \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$ μίας διανυσματικής συνάρτησης, $\vec{F}(\vec{r})$, κατά μήκος μίας κλειστής διαδρομής C, ονομάζεται <u>**κυκλοφορία**</u> της $\vec{F}$ επί της C. Με βάση το μέγεθος της <u>κυκλοφορίας</u>, ορίζεται, ο <u>**στροβιλισμός**</u> (*rot* ή *curl*) της διανυσματικής συνάρτησης, σε κάποιο σημείο $\vec{r}=\vec{r}_0$ του πεδίου ορισμού της, ως το όριο του πηλίκου της κυκλοφορίας της διανυσματικής συνάρτησης σε μία κλειστή καμπύλη *C*, προς το εμβαδόν της επιφάνειας $S(C)$ που περικλείει η καμπύλη *C*, καθώς η καμπύλη συρρικνώνεται περί το σημείο $\vec{r}=\vec{r}_0$ (έτσι ώστε και το εμβαδόν, αλλά και το μήκος της, να τείνουν στο μηδέν)

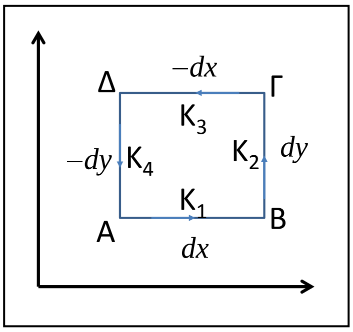
$$rot\vec{F}=\left(curl\vec{F}\right)\equiv\lim_{S(C)\to 0}\frac{\oint\limits_C \vec{F}\cdot d\vec{r}}{S(C)}$$

Επειδή η καμπύλη C μπορεί να είναι μία μη-επίπεδη καμπύλη, (με αποτέλεσμα να μην είναι ορισμένη με μοναδικό τρόπο η επιφάνεια $S(C)$ που περικλείεται από την καμπύλη C), ορίζουμε τις (x,y,z)-συνιστώσες του στροβιλισμού που προκύπτουν όταν η καμπύλη C είναι επίπεδη καμπύλη και το επίπεδό της είναι κάθετο στον (x,y,z)-άξονα, αντίστοιχα.

$$\left(rot\vec{F}\right)_{x,y,z}=\left(curl\vec{F}\right)_{x,y,z}\equiv\lim_{S(C)\to 0}\frac{\oint\limits_{C\perp(x,y,z)} \vec{F}\cdot d\vec{r}}{S(C)} \qquad (4.11)$$

Αποδεικνύεται ότι οι τρείς αυτές συνιστώσες συν-αποτελούν ένα διανυσματικό μέγεθος (δηλ., μετασχηματίζονται με τον αντίστοιχο τρόπο, σε στροφές του συστήματος αναφοράς, όπως ένα διάνυσμα).

Προσδιορισμός της μορφής του στροβιλισμού σε Καρτεσιανές Συντεταγμένες



Για να προσδιορίσουμε τη μορφή του στροβιλισμού, σε καρτεσιανές συντεταγμένες, ενός διανυσματικού πεδίου $\vec{F}=\vec{F}(\vec{r})$, εργαζόμαστε, π.χ., πρώτα με το επίπεδο (x,y). Ορίζουμε ένα σημείο Α που αντιστοιχεί στις συντεταγμένες (x,y), και ορίζουμε και την κλειστή καμπύλη ΑΒΓΔΑ που προκύπτει από μετακινήσεις κατά $(\pm dx, \pm dy)$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Έστω ότι τα μέσα των πλευρών αυτής της ορθογώνιας κλειστής καμπύλης είναι τα $(\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2, \mathrm{K}_3, \mathrm{K}_4)$.

Θα υπολογίσουμε την κυκλοφορία του διανυσματικού πεδίου $\vec{F}=\vec{F}(\vec{r})$ κατά μήκος της καμπύλης ΑΒΓΔΑ, θα διαιρέσουμε με το εμβαδόν $dS=dxdy$ που περικλείει αυτή η καμπύλη και θα υπολογίσουμε το όριο αυτού του πηλίκου, καθώς το εμβαδόν αυτό τείνει στο μηδέν.

Η κυκλοφορία υπολογίζεται: $$\oint_{\text{ΑΒΓΔΑ}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\text{Α}}^{\text{Β}} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\text{Β}}^{\text{Γ}} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\text{Γ}}^{\text{Δ}} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\text{Δ}}^{\text{Α}} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Επειδή ο κάθε κλάδος ολοκλήρωσης έχει διαφορικό μήκος, το αντίστοιχο ολοκλήρωμα είναι ίσο με το γινόμενο του αντίστοιχου διαφορικού μήκους επί την κατάλληλη συνιστώσα του πεδίου (όπως προκύπτει από το εσωτερικό γινόμενο), υπολογισμένη στο μέσο του αντίστοιχου κλάδου.

$$\left(F_x+\frac{\partial F_x}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)(dx)+\left(F_y+\frac{\partial F_y}{\partial x}dx+\frac{\partial F_y}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)(dy)+\left(F_x+\frac{\partial F_x}{\partial x}\frac{dx}{2}+\frac{\partial F_x}{\partial y}dy\right)(-dx)+\left(F_y+\frac{\partial F_y}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)(-dy)$$

Μετά τις πράξεις και τις αναγωγές όμοιων όρων, παίρνουμε: $\oint \vec{F}\cdot d\vec{r}=\left(\frac{\partial F_y}{dx}-\frac{\partial F_x}{dy}\right)(dxdy)$, οπότε,

το όριο του πηλίκου γίνεται: $$\left(rot\vec{F}\right)_z=\frac{\oint \vec{F}\cdot d\vec{r}}{S(C)}=\frac{\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)(dxdy)}{dxdy}=\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

Με παρόμοιο τρόπο υπολογίζουμε τις άλλες δύο προβολές του στροβιλισμού:

$$\left(rot\vec{F}\right)_x=\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right),\qquad \left(rot\vec{F}\right)_y=\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)$$

Τα αποτελέσματα αυτά μπορούν αντιμετωπισθούν και ως αναπτύγματα οριζουσών (2x2):

$$\left(rot\vec{F}\right)_z=\begin{vmatrix}\partial/\partial x & \partial/\partial y\\ F_x & F_y\end{vmatrix},\qquad \left(rot\vec{F}\right)_x=\begin{vmatrix}\partial/\partial y & \partial/\partial z\\ F_y & F_z\end{vmatrix},\qquad \left(rot\vec{F}\right)_y=\begin{vmatrix}\partial/\partial z & \partial/\partial x\\ F_z & F_x\end{vmatrix}$$

Οπότε, σε καρτεσιανές συντεταγμένες, ο στροβιλισμός μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$rot\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}=\vec{\nabla}\times\vec{F}$$

[Για φανατικούς: σε ένα σύστημα (τοπικά) ορθογώνιων καμπυλόγραμμων συντεταγμένων, όπως αυτό παρουσιάστηκε πολύ συνοπτικά στην ενότητα των Μαθηματικών Εργαλείων, ο στροβιλισμός αποδεικνύεται ότι γράφεται με τη μορφή:

$$rot\vec{F}=\vec{\nabla}\times\vec{F}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix}h_1\hat{e}_1 & h_2\hat{e}_2 & h_3\hat{e}_3\\ \partial/\partial u_1 & \partial/\partial u_2 & \partial/\partial u_3\\ h_1F_1 & h_2F_2 & h_3F_3\end{vmatrix},$$

από την οποία μπορεί να αναχθεί στις καρτεσιανές συντεταγμένες, για $(\hat{e}_1=\hat{x},\hat{e}_2=\hat{y},\hat{e}_3=\hat{z})$ και $h_1=h_2=h_3=1$].

Θεώρημα Stokes

Για μία συνάρτηση με καλά ορισμένο στροβιλισμό, ισχύει το θεώρημα του Stokes, σύμφωνα με το οποίο, η κυκλοφορία της διανυσματικής συνάρτησης σε μία κλειστή καμπύλη *C* είναι ίση με το επιφανειακό ολοκλήρωμα του στροβιλισμού της σε κάθε ανοικτή επιφάνεια $S(C)$ που έχει σύνορο την καμπύλη C: $$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\forall S(C)} \left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot d\vec{S} \qquad (4.12)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (4.10), (4.12) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι, για μία διατηρητική δύναμη $\vec{F}$, ισχύει $$\int_{\forall S(C)} \left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0 \qquad (4.13)$$

Το τελευταίο συμπέρασμα είναι ανεξάρτητο από την επιλογή της καμπύλης C και της αντίστοιχης επιφάνειας $S(C)$. Μπορούμε, επομένως, να επιλέγουμε μία επιφάνεια οσοδήποτε μικρή και με οποιοδήποτε προσανατολισμό, οπότε, στο όριο που η επιφάνεια αυτή είναι απλώς το διαφορικό $d\vec{S}$, το επιφανειακό ολοκλήρωμα εκφυλίζεται στο γινόμενο $\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot d\vec{S}$. Ο μηδενισμός αυτού του γινομένου για οποιαδήποτε τιμή του διαφορικού $d\vec{S}$, στην περιοχή ενός σημείου, σημαίνει ότι ο στροβιλισμός της $\vec{F}$ πρέπει να είναι μηδέν. Επομένως, για κάθε διατηρητική δύναμη $\vec{F}$, ισχύει $$\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0 \qquad (4.14\alpha)$$

Η τελευταία σχέση προσφέρει ένα κριτήριο ελέγχου, για το αν μια δύναμη είναι διατηρητική, πολύ απλούστερο από το κριτήριο που εκφράζει η ισοδύναμη σχέση (4.10). Αντί για τον έλεγχο του μηδενισμού όλων των δυνατών επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων σε κάθε κλειστή καμπύλη C, αρκεί να ελέγχεται ο μηδενισμός του στροβιλισμού. Η σχέση (4.14), σε καρτεσιανές συντεταγμένες, γράφεται :

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = 0 \qquad (4.14\beta)$$

Στην σχέση αυτή, κάθε μία από τις συνιστώσες, $\left(F_x, F_y, F_z\right)$, της δύναμης $\vec{F}$, είναι, στη γενικότερη περίπτωση, συναρτήσεις των (x, y, z).

Τα τελευταία συμπεράσματα θα μπορούσαν, επίσης, να αποτελέσουν έναν ισοδύναμο ορισμό των διατηρητικών δυνάμεων, ως εξής: **Διατηρητική** ονομάζεται μία δύναμη όταν το έργο της, σε κάθε κλειστή διαδρομή, είναι μηδέν, ή, ισοδύναμα, όταν ο στροβιλισμός της είναι μηδέν. (**Ορισμός ΙΙΙ**).

Αντίθετα με τις διατηρητικές δυνάμεις, οι μη-διατηρητικές δυνάμεις έχουν μη μηδενικό έργο σε κάποια κλειστή διαδρομή. Το συνηθέστερο παράδειγμα μη-διατηρητικών δυνάμεων είναι εκείνο των δυνάμεων τριβής. Στις περισσότερες περιπτώσεις, οι δυνάμεις τριβής είναι αντίθετες προς την ταχύτητα του σώματος επί του οποίου ασκούνται[1], $\vec{F}_{\text{τριβής}} = -F_{\text{τριβής}}(\vec{r})\hat{\upsilon} = -F_{\text{τριβής}}(\vec{r})\dfrac{\vec{\upsilon}}{\upsilon}$, οπότε το έργο της δύναμης τριβής, κατά μήκος μίας καμπύλης $C(\mathrm{A},\mathrm{B})$, που ενώνει τα σημεία Α και Β, είναι

$$W_{\text{τριβής}}\left(C(\mathrm{A},\mathrm{B})\right) = \int_{C,\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{F}_{\text{τριβής}}\cdot d\vec{r} = -\int_{C,\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \left(F_{\text{τριβής}}(\vec{r})\frac{\vec{\upsilon}}{\upsilon}\right)\cdot\vec{\upsilon}dt = -\int_{C,\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} F_{\text{τριβής}}(\vec{r})\frac{\upsilon^2}{\upsilon}dt = -\int_{C,\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} F_{\text{τριβής}}(\vec{r})\upsilon\, dt < 0$$

.

[1] Αυτό ισχύει όταν το σώμα, το οποίο μελετάμε, κινείται σε επιφάνεια που παρουσιάζει τριβή και η οποία ακινητεί σε σχέση με σύστημα αναφοράς. Η δύναμη της τριβής μπορεί να είναι ομόσημη με την ταχύτητα του σώματος, ως προς αδρανειακό σύστημα αναφοράς, όταν το σώμα αυτό είναι σε επαφή με άλλο σώμα το οποίο κινείται, ως προς το ίδιο αδρανειακό σύστημα, με μεγαλύτερη ταχύτητα ίδιας φοράς.

Κατά την αντίθετη διαδρομή, επί της ίδιας καμπύλης, $C(\mathrm{B},\mathrm{A})$, το έργο της $\vec{F}_{\text{τριβής}}$ είναι:

$$W_{\text{τριβής}}\left(C(\mathrm{B},\mathrm{A})\right)=\int_{C,\mathrm{B}}^{\mathrm{A}}\vec{F}_{\text{τριβής}}\cdot d\vec{r}=-\int_{C,\mathrm{B}}^{\mathrm{A}}\left(F_{\text{τριβής}}(\vec{r})\frac{\vec{\upsilon}}{\upsilon}\right)\cdot\vec{\upsilon}dt=-\int_{C,\mathrm{B}}^{\mathrm{A}}F_{\text{τριβής}}(\vec{r})\frac{\upsilon^2}{\upsilon}dt=-\int_{C,\mathrm{B}}^{\mathrm{A}}F_{\text{τριβής}}(\vec{r})\upsilon\,dt<0$$

Επομένως, το έργο της τριβής στην κλειστή διαδρομή ΑΒΑ είναι διαφορετικό του μηδενός.

Παράδειγμα 4.6.1: Όλες οι κεντρικές δυνάμεις, $\vec{F}(\vec{r})=f(r)\hat{r}$, έχουν μηδενικό στροβιλισμό

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Το συμπέρασμα αυτό θα μπορούσε να προκύψει αυτόματα, δεδομένου ότι σε προηγούμενο Παράδειγμα έχουμε δείξει ότι οι κεντρικές δυνάμεις είναι διατηρητικές και, επομένως, έχουν μηδενικό στροβιλισμό, (είναι αστρόβιλες), σύμφωνα με τα προηγούμενα. Θα προσπαθήσουμε, εντούτοις, να δείξουμε αναλυτικά το ίδιο αποτέλεσμα, με βάση την μορφή που έχει ο διαφορικός τελεστής του στροβιλισμού, στις καρτεσιανές συντεταγμένες.

$$\vec{F}(\vec{r})=f(r)\hat{r}=f(r)\frac{\vec{r}}{r}=\frac{f(r)}{r}\vec{r}=g(r)\vec{r}=g(r)\left(x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z}\right)$$

Ο διαφορικός τελεστής του στροβιλισμού, σε καρτεσιανές συντεταγμένες, έχει τη μορφή:

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}.$$

Θα υπολογίσουμε την $x-$συνιστώσα του στροβιλισμού, και θα χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα, κυκλικά, για τις άλλες δύο συνιστώσες.

$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)_x=\frac{\partial}{\partial y}\left(g(r)z\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(g(r)y\right)$$

Ο πρώτος όρος υπολογίζεται:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(g(r)z\right)=z\frac{\partial g(r)}{\partial y}=z\frac{\partial g}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}=z\frac{dg}{dr}\frac{\partial}{\partial y}\left[x^2+y^2+z^2\right]^{1/2}=z\frac{dg}{dr}\frac{1}{2}\left[x^2+y^2+z^2\right]^{-1/2}2y=\frac{zy}{r}\frac{dg}{dr},$$

και όμοια, $\frac{\partial}{\partial z}\left(g(r)y\right)=\frac{yz}{r}\frac{dg}{dr}$, οπότε: $\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)_x=\frac{\partial}{\partial y}\left(g(r)z\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(g(r)y\right)=\frac{dg}{dr}\frac{zy-yz}{r}=0$

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ο μηδενισμός και των άλλων δύο συνιστωσών του στροβιλισμού, $\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)_y=0$, και $\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)_z=0$, άρα, συνολικά, για κάθε κεντρική δύναμη $\vec{F}$: $\vec{\nabla}\times\vec{F}=0$.

Παράδειγμα 4.6.2: Να δείξετε ότι, για κάθε κεντρική δύναμη της μορφής $\vec{F}(\vec{r})=\frac{k\hat{r}}{r^2}$, όπου $\vec{r}$ το διάνυσμα θέσης ως προς το «κέντρο» της δύναμης, η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας είναι $U(\vec{r})=\frac{k}{|\vec{r}|}$, με σημείο αναφοράς μηδενικής δυναμικής ενέργειας το $|\vec{r}|\to\infty$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Με βάση το προηγούμενο παράδειγμα, κάθε κεντρική δύναμη είναι διατηρητική, επομένως υπάρχει συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $U(\vec{r})$, που μπορεί να υπολογιστεί ολοκληρώνοντας το έργο της διατηρητικής δύναμης, από το σημείο αναφοράς (μηδενικής δυναμικής ενέργειας), που είναι στο

$|\vec{r}| \to \infty$, μέχρι το πεπερασμένο $\vec{r}$. Λόγω της διατηρητικότητας, μπορούμε να επιλέξουμε όποια καμπύλη ολοκλήρωσης είναι περισσότερο βολική. Επιλέγουμε ως καμπύλη ολοκλήρωσης την προέκταση (από $\vec{r}$ έως ∞) της ευθείας που ορίζεται από το κέντρο έλξης $(\vec{r}=0)$ μέχρι το συγκεκριμένο σημείο $\vec{r}$, οπότε, από τις σχέσεις

$$\left.\begin{cases} \vec{F} = -\vec{\nabla}U \\ dU = \vec{\nabla}U \cdot d\vec{r} \end{cases}\right\} \Rightarrow dU = -\vec{F}\cdot d\vec{r} \Rightarrow \int_{\infty}^{\vec{r}} dU = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{r} \Rightarrow U(\vec{r}) - U(\infty) = \int_{\vec{r}}^{\infty} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$U(\vec{r}) - 0 = \int_{\vec{r}}^{\infty} \left(\frac{k\hat{r}}{r^2}\right)\cdot(dr\hat{r}) \Rightarrow U(\vec{r}) = k\int_{\vec{r}}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = k\left.\frac{r^{-2+1}}{-2+1}\right|_r^{\infty} \Rightarrow \boxed{U(\vec{r}) = \frac{k}{|\vec{r}|}}$$

Παράδειγμα 4.6.3: (α) Βρείτε, υπό ποια προϋπόθεση, η δύναμη $\vec{F} = ay\hat{x} + bx\hat{y}$ είναι διατηρητική. (β) Να υπολογίσετε την συνάρτηση δυναμικής ενέργειας U, από την οποία προκύπτει η δύναμη $\vec{F}$, όταν ικανοποιείται η συνθήκη του ερωτήματος (α), θεωρώντας ως σημείο αναφοράς μηδενικής δυναμικής ενέργειας το σημείο $(x,y,z) = (0,0,0)$.

Απάντηση:

(α) Για να είναι διατηρητική η δύναμη $\vec{F} = ay\hat{x} + bx\hat{y}$ πρέπει να έχει μηδενικό στροβιλισμό, αλλά ο στροβιλισμός είναι $\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ ay & bx & 0 \end{vmatrix} = \hat{x}0 - \hat{y}0 + \hat{z}(b-a)$, και για να είναι μηδέν, πρέπει να ισχύει $a=b$ και, επομένως η δύναμη θα έχει τη μορφή $\vec{F} = a(y\hat{x} + x\hat{y})$

(β) Υπό την προϋπόθεση ότι $a=b$, η δύναμη είναι διατηρητική και, επομένως, θα προκύπτει ως βαθμίδα μίας συνάρτησης δυναμικής ενέργειας $U = U(x,y,z)$, τέτοιας ώστε $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$. Παρατηρούμε πρώτα ότι, η έλλειψη z-συνιστώσας στη δύναμη, έχει ως αποτέλεσμα $F_z = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial U}{\partial z} = 0 \Rightarrow U = U(x,y)$. Άρα αναζητούμε μία συνάρτηση δύο μεταβλητών (x,y). Για τον προσδιορισμό αυτής της συνάρτησης μπορούμε να εργαστούμε με δύο τρόπους.

(β_1) *Προσδιορισμός της συνάρτησης δυναμικής ενέργειας μέσω του επικαμπυλίου ολοκληρώματος του εσωτερικού γινομένου της δύναμης επί την μετατόπιση, από το σημείο αναφοράς μέχρι τυχαίο σημείο* (x,y). Για τον υπολογισμό αυτού του ολοκληρώματος πρέπει να οριστεί μία καμπύλη ολοκλήρωσης, επειδή όμως η δύναμη είναι διατηρητική, το τελικό αποτέλεσμα δεν θα εξαρτάται από την συγκεκριμένη καμπύλη. Ας επιλέξουμε να ολοκληρώσουμε από το σημείο $(0,0)$ μέχρι το σημείο $(0,x)$, κατά μήκος του άξονα-x, και στη συνέχεια από το σημείο $(0,x)$ μέχρι το σημείο (x,y), κατά μήκος του άξονα-y, (βλ. και Παράδειγμα 4.1).

$$dU = \vec{\nabla}U\cdot d\vec{r} = -\vec{F}\cdot d\vec{r} \Rightarrow \int_{(0,0)}^{(x,y)} dU = -\int_{(0,0)}^{(x,y)} \vec{F}\cdot d\vec{r} \Rightarrow U(x,y) - U(0,0) = -\int_{(0,0)}^{(x,y)} (F_x dx + F_y dy)$$

Αλλά, $U(0,0) = 0$ και, ακολουθώντας τη διαδρομή που επιλέξαμε, έχουμε

$$U(x,y)=-\int_{(0,0)}^{(x,0)}(F_x dx+F_y dy)-\int_{(x,0)}^{(x,y)}(F_x dx+F_y dy)=-\int_{(0,0)}^{(x,0)}(F_x dx)-\int_{(x,0)}^{(x,y)}(F_y dy),$$

Επειδή στον πρώτο κλάδο έχουμε $dy=0$, ενώ στον δεύτερο $dx=0$. Αντικαθιστώντας και τις συνιστώσες της δύναμης σε κάθε ολοκλήρωμα, παίρνουμε:

$$U(x,y)=-\int_{(0,0)}^{(x,0)}(aydx)-\int_{(x,0)}^{(x,y)}(axdy)=-a\int_{(0,0)}^{(x,0)}0dx-ax\int_{(x,0)}^{(x,y)}dy\Rightarrow U(x,y)=-axy$$

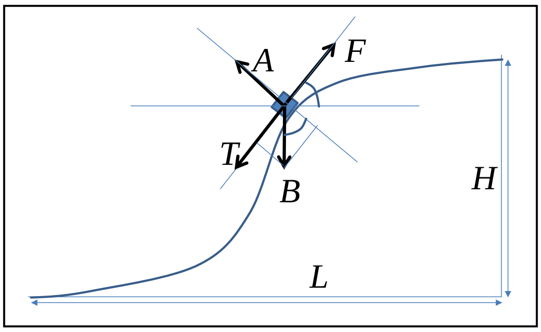
(β_2) *Προσδιορισμός της συνάρτησης δυναμικής ενέργειας, επιλύοντας το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων που προκύπτουν από τις δύο συνιστώσες της δύναμης,*

$$\frac{\partial U}{\partial x}=-F_x\Rightarrow\frac{\partial U}{\partial x}=-ay$$
$$\frac{\partial U}{\partial y}=-F_y\Rightarrow\frac{\partial U}{\partial y}=-ax$$

Η παρουσία των μερικών παραγώγων υπενθυμίζει ότι μόνο η αντίστοιχη μεταβλητή θεωρείται ως πραγματική μεταβλητή, ενώ η συζυγής της θεωρείται, προς στιγμήν, ως μία αυθαίρετη αλλά σταθερή παράμετρος. Με βάση τα προηγούμενα, το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων ολοκληρώνεται ως εξής

$$\frac{\partial U}{\partial x}=-ay\Rightarrow dU=-aydx\Rightarrow U=-axy+C_1(y)$$
$$\frac{\partial U}{\partial y}=-ax\Rightarrow dU=-axdy\Rightarrow U=-axy+C_2(x)$$

Οι σταθερές ολοκλήρωσης $C_1(y)$ και $C_2(x)$ δηλώνουν ότι, το πολύ-πολύ, να εξαρτώνται από την συζυγή, ως προς την μεταβλητή ολοκλήρωσης «παράμετρο», κάθε φορά. Επειδή η συνάρτηση $U=U(x,y)$ είναι ίδια, ανεξάρτητα από την συνιστώσα που ολοκληρώσαμε για τον υπολογισμό της, ο μόνος τρόπος να συναληθεύουν οι δύο τελευταίες σχέσεις είναι να ισχύει $C_1(y)=C_2(x)=C$, οπότε $U(x,y)=-axy+C$. Χρησιμοποιώντας την τιμή αναφοράς $U(0,0)=0\Rightarrow C=0$, άρα $U=-axy$.



Παράδειγμα 4.6.4 Μετακινούμε σημειακή μάζα m σε καμπύλη ανωφέρεια αυθαίρετου σχήματος, με την οποία ο συντελεστής τριβής είναι μ. Η μετακίνηση γίνεται μέσα σε σταθερό κατακόρυφο βαρυτικό πεδίο, και ισοδυναμεί με συνολική οριζόντια μετατόπιση μήκο L, και συνολική κατακόρυφη μετατόπιση ύψους H. Η μετακίνηση γίνεται με τη βοήθεια εξωτερικής δύναμης $\vec{F}$ η οποία εξισορροπεί όλες τις υπόλοιπες δυνάμεις, ώστε το σώμα να μετακινείται με αμελητέα ταχύτητα και να έχει μηδενική αρχική και τελική ταχύτητα. Να υπολογιατεί το συνολικό έργο της εξωτερικής δύναμης $\vec{F}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

<u>Απλή (εύλογη) λύση</u>:

$$dW=\vec{F}\cdot d\vec{r}=\left|\vec{F}\right|\left|d\vec{r}\right|\cos 0=Fds=\left(T+B\sin\theta\right)ds=\left(\mu B\cos\theta+B\sin\theta\right)ds$$

$$dW = \mu B\left(ds\cos\theta\right) + B\left(ds\sin\theta\right) = \mu B dx + B dy \Rightarrow W = \mu B\int_0^L dx + B\int_0^H dy$$

Άρα, τελικά: $\boxed{W = \mu BL + BH}$

Το αποτέλεσμα δηλώνει ότι το έργο είναι ανεξάρτητο της διαδρομής (!) που θα μπορούσε να ερμηνευθεί ως απόδειξη διατηρητικότητας. Αυτό το συμπέρασμα δεν ευσταθεί διοτι (α) αν η διαδρομή διανυθεί και αντίστροφα το συνολικό έργο δεν προκύπτει μηδενικό, (β) η διαδρομή δεν διανύεται μέσα σε ένα δυναμικό πεδίο μόνο αλλά και παρουσία δύναμης επαφής, επομένως μία διαφορετική διαδρομή σημαίνει και διαφορετικό «πεδίο των δυνάμεων τριβής». Επομένως, τα έργα είναι «ανεξάρτητα» της διαδρομής, αλλά κάθε διαδρομή γίνεται σε διαφορετικό «πεδίο δυνάμεων τριβής».

<u>Πιο σύνθετη λύση</u> (<u>που θα μπορούσε, π.χ., να προταθεί από αφηρημένο καθηγητή</u>): ανάλυση σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy$$

$F_x = A\sin\theta + T\cos\theta,\qquad F_y + A\cos\theta = B + T\sin\theta$, όπου $A = B\cos\theta$

Άρα: $F_x = B\cos\theta\sin\theta + \mu B\cos^2\theta,\qquad F_y = B - B\cos^2\theta + \mu B\cos\theta\sin\theta$

$$dW = F_x dx + F_y dy = \left(F_x + F_y\frac{dy}{dx}\right)dx = \left[\left(B\cos\theta\sin\theta + \mu B\cos^2\theta\right) + \left(B\sin^2\theta + \mu B\cos\theta\sin\theta\right)\tan\theta\right]dx$$

$$dW = \left[B\cos\theta\sin\theta + \mu B\cos^2\theta + B\sin^2\theta\tan\theta + \mu B\sin^2\theta\right]dx$$

$$= \left[\mu B + \left(B\cos^2\theta + B\sin^2\theta\right)\tan\theta\right]dx = \left[\mu B + B\frac{dy}{dx}\right]dx$$

$$dW = \left[\mu B dx + B dy\right] \quad\Rightarrow\quad \boxed{W = \mu BL + BH}$$

Παράδειγμα 4.6.5 Αφήνουμε σώμα να γλυστρίσει σε λεία κατωφέρεια αυθαίρετου σχήματος από αρχικό ύψος *H*, σε σχέση με οριζόντιο επίπεδο αναφοράς. Η κατωφέρεια διακόπτεται σε ύψος *h* από το επίπεδο αναφοράς, με μηδενική κλίση, έτσι ώστε το σώμα να εκτελέσει στη συνέχεια οριζόντια βολή. Να υπολογίσετε τη βέλτιση τιμή του h σε σχέση με το Η, έτσι ώστε η βολή να έχει το μέγιστο βεληνεκές και να υπολογιστεί αυτό το βεληνεκές

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Η βολή γίνεται με τις εξής σχέσεις: $\left.\begin{aligned} h &= \frac{1}{2}gt^2 \\ s &= \upsilon_0 t \end{aligned}\right\} \Rightarrow s = \upsilon_0\sqrt{\frac{2h}{g}}$

Διατήρηση ενέργειας: $mg\left(H-h\right) = \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 \quad\Rightarrow\quad \upsilon_0 = \sqrt{2g\left(H-h\right)}$

Επομένως, το βεληνεκές είναι : $s = \sqrt{2g\left(H-h\right)}\sqrt{\frac{2h}{g}} \quad\Rightarrow\quad s = 2\left(Hh - h^2\right)^{1/2}$

Ακρότατο του βεληνεκούς: $\frac{ds}{dh} = 0 \quad\Rightarrow\quad h = \frac{H}{2}$

$\left(\frac{d^2s}{dh^2}\right)_{h=H/2} = -\frac{4}{H} < 0$: άρα είναι σημείο μεγίστου, και $s_{\max} = H$