ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Πρόχειρες Σημειώσεις για τις ανάγκες του μαθήματος
«Φυσική – Ι (Μηχανική και Εισαγωγή στην Κυματική)»
της Σχολής Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών του ΕΜΠ

Ιωάννη Σ. Ράπτη
Καθηγητή ΣΕΜΦΕ - ΕΜΠ

Αθήνα, 2020

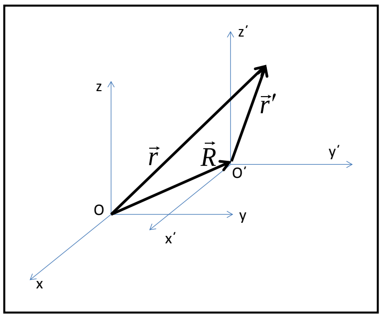
1. **Εισαγωγή – Θεμελιώδη και Παράγωγα Μεγέθη – Μαθηματικά Εργαλεία (ΒΛΕΠΕ: Chapt01)**
2. **Νόμοι του Νεύτωνα (ΒΛΕΠΕ: Chapt02)**

3. Μη αδρανειακά συστήματα αναφοράς – Αδρανειακές Δυνάμεις

Ένα σύστημα αναφοράς λέμε ότι είναι «αδρανειακό» όταν ένα σώμα διατηρεί, ως προς το σύστημα αυτό, την κινητική του κατάσταση $(\vec{\upsilon} = \sigma\tau\alpha\theta.)$ εάν και εφόσον η συνολική (πραγματική[1]) δύναμη που ασκείται πάνω του είναι μηδέν. Τα συστήματα για τα οποία δεν ικανοποιείται η παραπάνω συνθήκη λέμε ότι είναι «μη αδρανειακά» συστήματα. Η γενικότερη περίπτωση ενός μη-αδρανειακού συστήματος είναι η περίπτωση ενός συστήματος αναφοράς το οποίο, ως προς ένα αδρανειακό σύστημα, μεταβάλλει και την θέση[2] του και τον προσανατολισμό του, συναρτήσει του χρόνου.

Προκειμένου να μελετήσουμε τη σχέση των κινητικών και των δυναμικών μεγεθών (ταχύτητα, επιτάχυνση, δύναμη) όπως αυτά γίνονται αντιληπτά από έναν παρατηρητή του αδρανειακού και έναν παρατηρητή του μη-αδρανειακού συστήματος αναφοράς, θα προχωρήσουμε σε δύο στάδια. Με βάση την αρχή της ανεξαρτησίας των κινήσεων, θα εξετάσουμε πρώτα τη μεταβολή θέσης (με σταθερό προσανατολισμό) του μη-αδρανειακού συστήματος, και μετά την μεταβολή προσανατολισμού (για σταθερή θέση) ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

3.1 Ταχύτητα και επιτάχυνση κινητού ως προς μη-περιστρεφόμενο μη-αδρανειακό σύστημα αναφοράς



Στην περίπτωση που τα δύο συστήματα διατηρούν το σχετικό προσανατολισμό τους και το μη-αδρανειακό εκτελεί μία αυθαίρετη μεταφορική κίνηση ως προς το αδρανειακό, η οποία περιγράφεται από τη συνάρτηση $\vec{R} = \vec{R}(t)$, που δίνει την θέση O', του $O'x'y'z'$, ως προς το $Oxyz$, τότε το διανύσματα θέσης $\vec{r}'(t)$ και $\vec{r}(t)$ του ίδιου κινητού, ως προς τα δύο συστήματα αναφοράς συνδέονται με τη σχέση:

$$\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + \vec{r}'(t) \qquad (1)$$

Οπότε, παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο, παίρνουμε

$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{\vec{R}}(t) + \dot{\vec{r}}'(t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\upsilon} = \vec{V} + \vec{\upsilon}'} \qquad (2)$$

Η σχέση αυτή είναι γνωστή και ως <u>μετασχηματισμός του Γαλιλαίου για τη σχέση ταχυτήτων</u>, ανάμεσα στα δύο συστήματα.

Στο δεύτερο στάδιο, παραγωγίζοντας την (2) ως προς το χρόνο και πολλαπλασιάζοντας με την μάζα του κινητού,

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{\vec{R}}(t) + \ddot{\vec{r}}'(t) \quad \Rightarrow \quad m\ddot{\vec{r}}'(t) = m\ddot{\vec{r}}(t) - m\ddot{\vec{R}}(t) \qquad (3\ \alpha,\beta)$$

[1] Δηλαδή, η συνολική δύναμη που ασκείται από άλλα πραγματικά σώματα, ή από πεδία που οφείλονται σε πραγματικά σώματα. Με τον τρόπο αυτό θέλουμε να αντιδιαστείλουμε τις πραγματικές δυνάμεις, από τις αδρανειακές-δυνάμεις ή «ψευδο-δυνάμεις» που θα αναφερθούν στη συνέχεια.

[2] Με μη σταθερό ρυθμό, έτσι δηλαδή ώστε η σχετική ταχύτητα των δύο συστημάτων να είναι $\vec{V} \neq \sigma\tau\alpha\theta.$

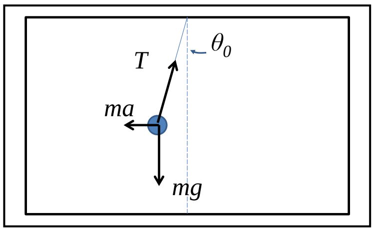
Επειδή, στο αδρανειακό σύστημα, *Oxyz*, ισχύει: $m\ddot{\vec{r}}(t)=\vec{F}_{ολ}$, όπου $\vec{F}_{ολ}$ είναι η συνισταμένη των πραγματικών δυνάμεων που δρουν πάνω στη μάζα m, η σχέση (3) γράφεται:

$$m\ddot{\vec{r}}'(t)=\vec{F}_{ολ}-m\ddot{\vec{R}}(t) \qquad (4)$$

Η τελευταία σχέση λέει ότι η διαφορική εξίσωση κίνησης, ως προς το μη-αδρανειακό σύστημα αναφοράς, απαιτεί έναν όρο «αδρανειακής» ψευδοδύναμης ίσον με $-m\vec{A}$, όπου $\vec{A}=\ddot{\vec{R}}$ είναι η επιτάχυνση του $O'x'y'z'$, ως προς το *Oxyz*.

[Κατά τον υπολογισμό των χρονικών παραγώγων, με τις οποίες μεταβαίνουμε από τη σχέση (1) στη (2) και στην (3α), έχει γίνει χρήση της παραδοχής ότι τα $O'x'y'z'$ και *Oxyz* διατηρούν τον προσανατολισμό τους. Πράγματι, η $\vec{r}(t)=\vec{R}(t)+\vec{r}'(t)$ οδηγεί στην $\dot{\vec{r}}(t)=\dot{\vec{R}}(t)+\dot{\vec{r}}'(t)$, με την προϋπόθεση ότι $\dot{\hat{x}}=\dot{\hat{y}}=\dot{\hat{z}}=0$, και, αντίστοιχα, $\dot{\hat{x}}'=\dot{\hat{y}}'=\dot{\hat{z}}'=0$, πράγμα που ισχύει, επειδή και τα 6 μοναδιαία διανύσματα διατηρούν το μέτρο τους (ως μοναδιαία) αλλά και τον προσανατολισμό τους (λόγω σταθερού προσανατολισμού των $O'x'y'z'$ και *Oxyz*)]

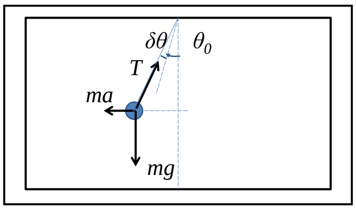
[Επίσης, στις παραγωγίσεις ως προς τον χρόνο, έχει υποτεθεί ότι οι χρόνοι των δύο συστημάτων διαφέρουν κατά, το πολύ, μία προσθετική σταθερά, δηλ., ο χρόνος «ρέει» με τον ίδιο ρυθμό και για τα δύο συστήματα. Η παραδοχή αυτή είναι άμεσα συνυφασμένη με τη σχετικότητα του Γαλιλαίου και ισχύει και στις επόμενες παραγράφους αυτής της ενότητας, όπου αναλύονται τα περιστρεφόμενα Μη-Αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Η παραδοχή αυτή δεν ισχύει, όσον αφορά δύο αδρανειακά συστήματα σε σχετική κίνηση, στην περίπτωση της Ειδικής Σχετικότητας του Einstein, όπου δεν ισχύει, επίσης και ο μετ/μός Γαλιλαίου (2)].



Παράδειγμα 3.1.1 Απλό εκκρεμές είναι αναρτημένο από την οροφή ενός οχήματος, το οποίο κινείται με σταθερή οριζόντια επιτάχυνση μέτρου *a*. Όλο το σύστημα βρίσκεται μέσα σε ομοιόμορφο κατακόρυφο πεδίο βαρύτητας (επιτάχυνση βαρύτητας: *g*)
(α) Αν το εκκρεμές ακινητεί σε σχέση με το όχημα, δείξτε ότι έχει μία σταθερή γωνιακή απόκλιση θ_0 από την κατακόρυφο και υπολογίστε την, όπως και την τάση του νήματος.
(β) Αν προκαλέσουμε μία μικρή γωνιακή διαταραχή κατά $\delta\theta$, ως προς τη γωνία «ηρεμίας» θ_0, του ερωτήματος (α), ($\delta\theta$, τέτοια ώστε $\sin(\delta\theta)\approx\tan(\delta\theta)\approx\delta\theta$ και $\cos(\delta\theta)\approx 1$), τότε δείξτε ότι το εκκρεμές θα εκτελέσει μία αρμονική ταλάντωση, και υπολογίστε την κυκλική συχνότητα αυτής της ταλάντωσης.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
(α) Εργαζόμαστε στο μη-αδρανειακό σύστημα του επιταχυνόμενου οχήματος, ως προς το οποίο έχουμε αδρανειακή δύναμη και συνθήκες ισορροπίας στους δύο άξονες:

$$\left.\begin{array}{ll}(1\alpha) & mg=T_0\cos\theta_0\\ (2\alpha) & ma=T_0\sin\theta_0\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{ll}a\cos\theta_0=g\sin\theta_0 & (1\beta)\\ \tan\theta_0=a/g & (2\beta)\end{array}\quad \text{και}\quad T_0=m\sqrt{\left(g^2+a^2\right)}\quad (3)$$



(β) Συνθήκη στροφικής κίνησης περί το σημείο ανάρτησης:

$$I\ddot{\theta}=\tau_{ολ} \qquad (4)$$

Με σύμβαση θετικού προσήμου κατά την ωρολογιακή φορά για τις γωνίες και τις ροπές των δυνάμεων, έχουμε:

$$\tau_{ολ}=-mgl\sin\theta+mal\cos\theta=-ml\left[g\sin\left(\theta_0+\delta\theta\right)-a\cos\left(\theta_0+\delta\theta\right)\right]$$

$$\tau_{ολ}=-ml\left[g\left(\sin\theta_0\cos\delta\theta+\cos\theta_0\sin\delta\theta\right)-a\left(\cos\theta_0\cos\delta\theta-\sin\theta_0\sin\delta\theta\right)\right]$$

$$\tau_{o\lambda} \approx -ml\Big[g\big((\sin\theta_0)1+(\cos\theta_0)\delta\theta\big)-a\big((\cos\theta_0)1-(\sin\theta_0)\delta\theta\big)\Big]=$$

$$\approx -ml\left[g\sin\theta_0+g\cos\theta_0\delta\theta-a\cos\theta_0+a\sin\theta_0\delta\theta\right]$$

Τελικά: $$\tau_{o\lambda} \approx -ml\left[g\sin\theta_0-a\cos\theta_0+\left(g\cos\theta_0+a\sin\theta_0\right)\delta\theta\right]$$

Αλλά από τη συνθήκη ισορροπίας (1β) παίρνουμε $g\sin\theta_0-a\cos\theta_0=0$, επομένως

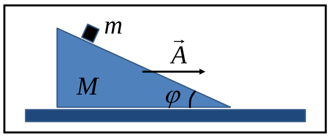
$$\tau_{o\lambda} \approx -ml\left[\left(g\cos\theta_0+a\sin\theta_0\right)\delta\theta\right]=-ml\left(\frac{T_0}{m}\right)\left(\cos^2\theta_0+\sin^2\theta_0\right)\delta\theta=-ml\sqrt{g^2+a^2}\,\delta\theta \quad (5)$$

[Εγινε χρήση των (1α), (2α), (3)]. Αντικαθιστώντας την (5) στην (4) έχουμε:

$$I\frac{d^2}{dt^2}\left(\theta_0+\delta\theta\right)\approx -ml\sqrt{g^2+a^2}\,\delta\theta \quad\Rightarrow\quad ml^2\frac{d^2}{dt^2}\left(\delta\theta\right)+\left(ml\sqrt{g^2+a^2}\right)\delta\theta=0$$

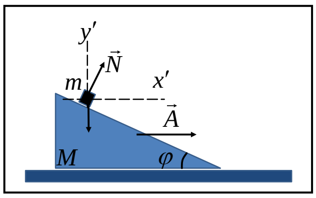
Επομένως, η δθ υπακούει τη διαφορική εξίσωση: $\frac{d^2}{dt^2}\left(\delta\theta\right)+\left(\sqrt{g^2+a^2}/l\right)\delta\theta=0$, η οποία αντιστοιχεί σε απλό αρμονικό ταλαντωτή με συχνότητα: $\boxed{\omega=\left(\sqrt{g^2+a^2}/l\right)^{1/2}}$

Το μη-αδρανειακό σύστημα χαρακτηρίζεται από μία «ενεργό επιτάχυνση βαρύτητας» μέτρου $g'=\sqrt{g^2+a^2}$, που προκύπτει από το διανυσματικό άθροισμα της βαρυτικής και της αδρανειακής δύναμης και παίζει ρόλο τόσο στα στατικά όσο και στα δυναμικά φαινόμενα.



Παράδειγμα 3.1.2 Μία ορθογώνια σφήνα με γωνία βάσης φ κινείται σε οριζόντιο επίπεδο έτσι ώστε να έχει σταθερή οριζόντια επιτάχυνση ίση με Α. Στην επικλινή πλευρά της σφήνας υπάρχει σημειακή μάζα m που μπορεί να γλυστράει χωρίς τριβή. (α) Να υπολογιστεί η τιμή της επιτάχυνσης A_0, έτσι ώστε η m να ακινητεί ως προς τη σφήνα. (β) Για τιμές της επιτάχυνσης $A<A_0$, να υπολογιστεί η επιτάχυνση της μάζας m, ως προς τη σφήνα και ως προς το δάπεδο.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



(α) Όταν η σημειακή μάζα ακινητεί ως προς τη σφήνα, τότε κινείται με οριζόντια επιτάχυνση μέτρου Α ως προς το (αδρανειακό) δάπεδο, και ακινητεί κατακόρυφα.

Αν $\vec{N}$: η αντίδραση της σφήνας, κάθετα στην επικλινή επιφάνεια, τότε οι εξισώσεις κίνησης (οριζόντια) και ακινησίας (κατακόρυφα) για την m γράφονται $\left\{N\sin\varphi=mA_0,\quad N\cos\varphi=mg\right\} \Rightarrow \boxed{A_0=g\tan\varphi}$

(β) Όταν: $A<A_0=g\tan\varphi$ θα έχουμε ολίσθηση της m καθώς κινείται η σφήνα.

Θα μελετήσουμε την κίνηση της m ως προς το μη-αδρανειακό σύστημα $\left(x',y'\right)$ το οποίο κινείται μαζί με τη σφήνα. Ως προς αυτό το μη-αδρανειακό σύστημα η μάζα m υφίσταται και την μη-αδρανειακή ψευδοδύναμη $\vec{F}_{non-inert}=-m\vec{A}=-\hat{x}'mA$.

Αν συμβολίσουμε με $\vec{a}_{m,\Sigma}=\hat{x}'a_{m,\Sigma,x'}+\hat{y}'a_{m,\Sigma,y'}$ την επιτάχυνση της m ως προς τη σφήνα (Σ), τότε οι αντίστοιχες εξισώσεις κίνησης ως προς το μη-αδρανειακό σύστημα $\left(x',y'\right)$ γράφονται

$$ma_{m,\Sigma,x'}=N\sin\varphi-mA$$

$$ma_{m,\Sigma,y'}=N\cos\varphi-mg$$

Το μέτρο της κάθετης επιφανειακής δύναμης N μπορεί να υπολογιστεί από την κλίση της κίνησης ως προς το μη-αδρανειακό σύστημα $\left(x',y'\right)$

$$\frac{mg - N\cos\varphi}{N\sin\varphi - mA} = \tan\varphi \quad \Rightarrow \quad N = m\left(A\sin\varphi + g\cos\varphi\right)$$

Το μέτρο της κατακόρυφης επιτάχυνσης προκύπτει από την εξίσωση κίνησης :

$$ma_{m,\Sigma,y'} = mg - N\cos\varphi = mg - m\left(A\sin\varphi + g\cos\varphi\right)\cos\varphi \Rightarrow \boxed{a_{m,\Sigma,y'} = \left(g\sin\varphi - A\cos\varphi\right)\sin\varphi}$$

Το μέτρο της οριζόντιας επιτάχυνσης προκύπτει από την εξίσωση κίνησης :

$$ma_{m,\Sigma,x'} = N\sin\varphi - mA = m\left(A\sin\varphi + g\cos\varphi\right)\sin\varphi - mA \Rightarrow \boxed{a_{m,\Sigma,x'} = \left(g\sin\varphi - A\cos\varphi\right)\cos\varphi}$$

Ως προς το αδρανειακό σύστημα $\left(x, y\right)$ του Δαπέδου οι αντίστοιχες επιταχύνσεις είναι:

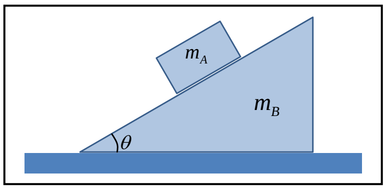
$$\left.\begin{cases} ma_{m,\Delta,x} = N\sin\varphi \\ ma_{m,\Delta,y} = mg - N\cos\varphi \end{cases}\right\} \Rightarrow \frac{a_{m,\Delta,y}}{a_{m,\Delta,x}} = \frac{mg - N\cos\varphi}{N\sin\varphi} = \frac{mg}{N\sin\varphi} - \frac{1}{\tan\varphi} =$$

$$= \frac{mg}{m\left(A\sin\varphi + g\cos\varphi\right)\sin\varphi} - \frac{1}{\tan\varphi} = \frac{g}{\left(A\sin\varphi + g\cos\varphi\right)\sin\varphi} - \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

Η γωνία της τροχιάς της m ως προς το Δάπεδο

$$\boxed{\tan\theta \equiv \frac{a_{m,\Delta,y}}{a_{m,\Delta,x}} = \frac{g\tan\varphi - A}{g + A\tan\varphi}}$$

[Όταν $A > A_0 = g\tan\varphi$ τότε η μάζα m κινείται προς τα πάνω, στην επικλινή πλευρά, και γίνεται αντίστοιχη ανάλυση με αλλαγή προσήμου της a_y]



Παράδειγμα 3.1.3 Σώμα μάζας m_A συγκρατείται στην κεκλιμένη πλευρά σφήνας με μάζα m_B και γωνία *θ*. Η επιφάνεια μεταξύ των δύο σωμάτων είναι ελεύθερη τριβών, όπως και η οριζόντια επιφάνεια στην οποία βρίσκεται η σφήνα. Κάποια στιγμή αφήνουμε και τα δύο σώματα ελεύθερα. Να υπολογιστούν οι επιταχύνσεις τους.

Συμβολίζουμε τις επιταχύνσεις των σωμάτων ως εξής

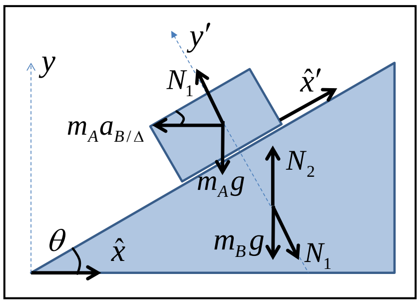
$\vec{a}_{A/B}$: επιτάχυνση του A ως προς το B

$\vec{a}_{A/\Delta}$: επιτάχυνση του A ως προς το Δάπεδο

$\vec{a}_{B/\Delta}$: επιτάχυνση του B ως προς το Δάπεδο

ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΜΗ-ΑΔΡΝΑΝΕΙΑΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΑΝΑΦΟΡΑΣ

Σε αυτή την ανάλυση θα αναλύσουμε την κίνηση της σφήνας ως προ το αδρανειακό σύστημα αναφοράς που είναι προσαρτημένο στο Δάπεδο, αλλά θα αναλύσουμε την κίνηση του σώματος A ως προς το μη-αδρανειακό σύστημα $\left(x', y'\right)$, το οποίο είναι προσαρτημένο στη Σφήνα. Ως προς το μη-αδρανειακό σύστημα $\left(x', y'\right)$, έχουμε το πλεονέκτημα ότι το σώμα A ακινητεί κατά τον y', ενώ επιταχύνεται μόνο κατά τον x' (πράγμα που δεν ισχύει για ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς προσαρτημένο στο Δάπεδο, ακόμη και αν έχει άξονες παράλληλους στο $\left(x', y'\right)$).



Σύμφωνα με τη σχέση (3α) της παραγράφου 3.1, έχουμε :

$$\vec{a}_{A/\Delta} = \vec{a}_{A/B} + \vec{a}_{B/\Delta} \qquad (1)$$

Στο σχήμα φαίνονται οι πραγματικές δυνάμεις για το B, (αφού μας ενδιαφέρει η κίνησή του ως προς το αδρανειακό σύστημα-Δάπεδο) και όλες οι δυνάμεις (πραγματικές και αδρανειακές) για το A, ως προς το Μη-Αδρανειακό σύστημα (x', y'), το οποίο είναι προσαρτημένο στο σώμα Β. Ως προς το (x', y'), το σώμα Α δέχεται τις πραγματικές δυνάμεις του βάρους του και της κάθετης αντίδρασης N_1, και την αδρανειακή ψευδοδύναμη $-\hat{x} m_A a_{B/\Delta}$ λόγω της επιτάχυνσης του Β.

Ως προς αυτό το σύστημα (x', y') το σώμα Α επιταχύνεται κατά μήκος του άξονα x' και ηρεμεί κατά μήκος του άξονα y'. Οπότε, οι αντίστοιχες συνθήκες (για τα μέτρα των επιταχύνσεων) κατά μήκος των δύο αξόνων του μη-αδρανειακού συστήματος, γράφονται:

Επιτάχυνση κατά τον x': $$m_A a_{A/B} = m_A g \sin\theta + m_A a_{B/\Delta} \cos\theta \qquad (2)$$

Ισορροπία κατά τον y': $$N_1 + m_A a_{B/\Delta} \sin\theta = m_A g \cos\theta \qquad (3)$$

Η συνθήκη επιτάχυνσης του σώματος Β ως προς το αδρανειακό σύστημα του Δαπέδου είναι:

$$m_B a_{B/\Delta} = N_1 \sin\theta \qquad (4)$$

$$(3) \times \sin\theta \quad \Rightarrow \quad N_1 \sin\theta + m_A a_{B/\Delta} \sin^2\theta = m_A g \sin\theta \cos\theta \qquad (5)$$

Συνδυάζοντας τις (4) και (5): $m_B a_{B/\Delta} + m_A a_{B/\Delta} \sin^2\theta = m_A g \sin\theta \cos\theta \quad \Rightarrow$

παίρνουμε: $$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{a}_{B/\Delta} = g \frac{\sin\theta \cos\theta}{\lambda + \sin^2\theta} (\hat{x})}, \text{ όπου: } \lambda \equiv m_B / m_A \qquad (6)$$

Ενώ, από (2) και (6): $$\boxed{\vec{a}_{A/B} = g \sin\theta \left[1 + \frac{\cos^2\theta}{\lambda + \sin^2\theta} \right] (-\hat{x}')} \qquad (7)$$

Στις (6), (7), έχει ληφθεί υπόψη ο προσανατολισμός των $\vec{a}_{A/B}$ και $\vec{a}_{B/\Delta}$, οπότε, αντικαθιστώντας στη σχέση (1), παίρνουμε:

$$\vec{a}_{A/\Delta} = g \sin\theta \left[1 + \frac{\cos^2\theta}{\lambda + \sin^2\theta} \right] (-\hat{x}') + g \frac{\sin\theta \cos\theta}{\lambda + \sin^2\theta} (\hat{x})$$

Αλλά το $(\hat{x}')$ διατηρεί τον προσανατολισμό του στα $(\hat{x}, \hat{y})$, οπότε:

$$\vec{a}_{A/\Delta} = -g \sin\theta \left[1 + \frac{\cos^2\theta}{\lambda + \sin^2\theta} \right] (\hat{x} \cos\theta + \hat{y} \sin\theta) + g \frac{\sin\theta \cos\theta}{\lambda + \sin^2\theta} (\hat{x}) \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{a}_{A/\Delta} = -g \sin\theta \left[\left(\frac{\lambda}{\lambda + \sin^2\theta} \cos\theta \right) \hat{x} + \left(\frac{\lambda + 1}{\lambda + \sin^2\theta} \sin\theta \right) \hat{y} \right]}, \qquad (\lambda \equiv m_B / m_A)$$

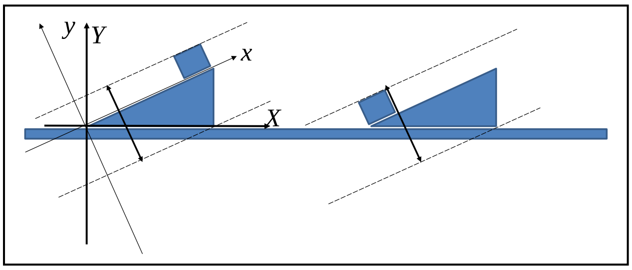
Παρατηρούμε ότι για μεγάλες τιμές της μάζας m_B $(\lambda \to \infty)$ η επιτάχυνση του σώματος Β τείνει στο μηδέν, ενώ $\lim\left[\vec{a}_{A/\Delta} (\lambda \to \infty) \right] = -g \sin\theta \left[(\cos\theta) \hat{x} + (\sin\theta) \hat{y} \right] = -g \sin\theta \hat{x}'$.

ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΕ ΑΔΡΑΝΕΙΑΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ

Για την περιγραφή της κίνησης του σώματος Α υιοθετούμε σύστημα (x, y) με x-παράλληλο και y-κάθετο στο κεκλιμένο επίπεδο της σφήνας, το οποίο όμως ακινητεί ως προς το Δάπεδο, οπότε το σώμα Α επιταχύνεται και ως προς τους δύο άξονες αυτού του συστήματος, και για τα μέτρα των αντίστοιχων προβολών της επιτάχυνσής του ισχύει:

$$m_A a_{A,x} = m_A g \sin\theta \qquad (1\alpha)$$

$$m_A a_{A,y} = m_A g \cos\theta - N_1 \qquad (1\beta)$$



Τα δύο σώματα Α και Β, παρότι μεταβάλλουν τις απόλυτες θέσεις τους, διατηρούν τη σχετική τους απόσταση, κατά τον άξονα-y, όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα.

Δεδομένου ότι ξεκίνησαν και τα δύο με μηδενική ταχύτητα, θα πρέπει να ισχύει

$$a_{A/B,y} = a_{A,y} - a_{B,y} = 0 \Rightarrow \quad a_{A,y} = a_{B,y} \qquad (2)$$

Το σώμα B επιταχύνεται μόνο παράλληλα στο οριζόντιο επίπεδο (άξονας-X), ενώ ακινητεί κατά τον κατακόρυφο άξονα-Y, οπότε, για το μέτρο της επιτάχυνσής του, ισχύει:

$$m_B a_B = N_1 \sin\theta \qquad (3\alpha)$$

$$a_{B,y} = a_B \sin\theta \qquad (3\beta)$$

$$(1\beta)\times \sin\theta \quad \Rightarrow \quad m_A a_{Ay} \sin\theta = m_A g \cos\theta \sin\theta - N_1 \sin\theta \qquad (4)$$

Συνδυάζοντας την (4) με τις (2) και (3α,β), παίρνουμε :

$$m_A a_B \sin^2\theta = m_A g \cos\theta \sin\theta - m_B a_B \quad \Rightarrow \boxed{a_B = \frac{g\cos\theta\sin\theta}{\sin^2\theta + (m_B/m_a)}} \qquad (5)$$

Από την (2) $\qquad a_{A,y} = a_{B,y} = a_B \sin\theta \qquad (6\alpha)$

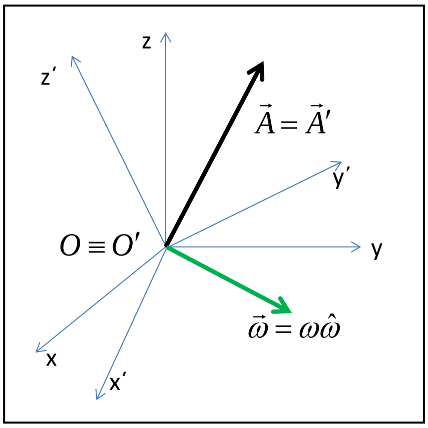
Ενώ, επειδή κατά τον άξονα-x μοναδική επιταχύνουσα δύναμη του A είναι η x-συνιστώσα του βάρους του, έχουμε: $\qquad a_{A,x} = g\sin\theta \qquad (6\beta)$

Στη συνέχεια μπορούμε να προβάλουμε τις x- και y-συνιστώσες της $\vec{a}_A$ στο σύστημα X-Y,

$$a_{A,X} = -a_{A,x}\cos\theta + a_{A,y}\sin\theta = -g\sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta \frac{g\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+\lambda} = -g\sin\theta\cos\theta\frac{\lambda}{\sin^2\theta+\lambda}$$

Όμοια (παραλείπονται ενδιάμεσες πράξεις): $\qquad a_{A,Y} = -g\sin\theta\dfrac{[1+\lambda]\sin\theta}{\sin^2\theta+\lambda}$

3.2 Μη-αδρανειακό σύστημα, περιστρεφόμενο ως προς αδρανειακό σύστημα αναφοράς



Ας θεωρήσουμε δύο συστήματα αναφοράς με κοινή αρχή, $Oxyz$ και $Ox'y'z'$, έτσι ώστε το πρώτο να είναι αδρανειακό, και το δεύτερο να περιστρέφεται ως προς το πρώτο με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega} = \omega\hat{\omega}$, όπου ω το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας και $\hat{\omega}$ το μοναδιαίο διάνυσμα το παράλληλο προς τον άξονα, περί τον οποίον περιστρέφεται το $Ox'y'z'$ ως προς το $Oxyz$. [Στην πραγματικότητα, η υπόθεση της κοινής αρχής δεν είναι απαραίτητη. Οι αρχές των δύο συστημάτων θα μπορούσαν να απέχουν κατά ένα διάνυσμα $\vec{R}$, ή, και να κινούνται με σταθερή σχετική ταχύτητα $\dot{\vec{R}} = \vec{V} = \sigma\tau\alpha\theta$. Θα μπορούσε, ακόμη, το $Ox'y'z'$ να μην γίνεται ποτέ παράλληλο προς το $Oxyz$, καθ' όλη τη διάρκεια της περιστροφής του. Όλες αυτές οι παραλλαγές δεν επηρεάζουν καθόλου τα συμπεράσματα στα οποία θα καταλήξουμε στη συνέχεια, όπως μπορεί να αποδειχθεί αναλυτικά, με λίγο πιο εκτενή διανυσματικό λογισμό, ο οποίος παραλείπεται για λόγους οικονομίας]

Αν $(\hat{x},\hat{y},\hat{z})$ και $(\hat{x}',\hat{y}',\hat{z}')$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα των δύο συστημάτων, τα $(\hat{x},\hat{y},\hat{z})$ είναι ανεξάρτητα του χρόνου, ενώ τα $(\hat{x}',\hat{y}',\hat{z}')$ διατηρούν μεν τον μοναδιαίο χαρακτήρα τους αλλά μεταβάλλουν προσανατολισμό με το χρόνο, έτσι ώστε το καθένα από αυτά να διαγράφει ένα κώνο περί τον άξονα περιστροφής (με διαφορετική γωνία κορυφής, $\varphi_1',\varphi_2',\varphi_3'$, για το καθένα). [Θα μπορούσε να ισχυριστεί κανείς ότι, υιοθετώντας την οπτική του $Ox'y'z'$, τότε τα $(\hat{x}',\hat{y}',\hat{z}')$ διατηρούν τον προσανατολισμό τους, ενώ το

$Oxyz$ περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $-\vec{\omega}=-\omega\hat{\omega}$, οπότε τα μοναδιαία $(\hat{x},\hat{y},\hat{z})$ αλλάζουν προσανατολισμό, διαγράφοντας το καθένα τον δικό του κώνο περί τον άξονα περιστροφής. Σε αυτό το σημείο πρέπει να δηλώσουμε ότι αντιμετωπίζουμε τα δύο συστήματα ως μη-ισοδύναμα, δεδομένου ότι στο $Oxyz$ η στατική αλλά και η δυναμική των σωμάτων εξηγείται με βάση δυνάμεις οι οποίες οφείλονται σε αλληλεπίδραση με άλλα σώματα, ενώ στο $Ox'y'z'$ η αντίστοιχη ανάλυση απαιτεί την παραδοχή επιπλέον δυνάμεων, και επομένως οι ρόλοι των δύο συστημάτων δεν είναι αντιστρέψιμοι.]

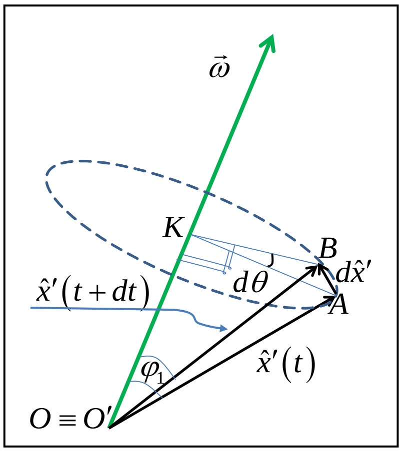
Ένα διανυσματικό μέγεθος $\vec{A}$ θα περιγράφεται με διαφορετικό τρόπο στα δύο συστήματα $$A_1\hat{x}+A_2\hat{y}+A_3\hat{z}=A_1'\hat{x}'+A_2'\hat{y}'+A_3'\hat{z}' \qquad (1)$$
Η ισότητα σημαίνει ότι, αν γραφούν τα $(\hat{x}',\hat{y}',\hat{z}')$ συναρτήσει των $(\hat{x},\hat{y},\hat{z})$, οι συντελεστές των ίδιων μοναδιαίων στα δύο σκέλη της ισότητας, θα είναι ίσοι. Η σχέση αυτή είναι η συνέπεια της σχέσης (1) της παραγράφου 3.1 όταν οι αρχές των δύο συστημάτων συμπίπτουν, δηλ., $\vec{R}(t)=0$). Αν παραγωγίσουμε , ως προς το χρόνο, τη σχέση (1), έχουμε:

$$\frac{d\left(A_1\hat{x}+A_2\hat{y}+A_3\hat{z}\right)}{dt}=\frac{d\left(A_1'\hat{x}'+A_2'\hat{y}'+A_3'\hat{z}'\right)}{dt}\Rightarrow$$

$$\frac{dA_1}{dt}\hat{x}+\frac{dA_2}{dt}\hat{y}+\frac{dA_3}{dt}\hat{z}=\frac{dA_1'}{dt}\hat{x}'+\frac{dA_2'}{dt}\hat{y}'+\frac{dA_3'}{dt}\hat{z}'+A_1'\frac{d\hat{x}'}{dt}+A_2'\frac{d\hat{y}'}{dt}+A_3'\frac{d\hat{z}'}{dt}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_F=\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_R+A_1'\frac{d\hat{x}'}{dt}+A_2'\frac{d\hat{y}'}{dt}+A_3'\frac{d\hat{z}'}{dt} \qquad (5)$$

Όπου, οι δείκτες F και R σημαίνουν ότι οι αντίστοιχες παράγωγοι έχουν υπολογιστεί ως προς το αδρανειακό σύστημα (F=Fixed) και ως προς το περιστρεφόμενο (R=Rotated). Απομένει να δούμε αν υπάρχει συνοπτική γραφή για τους υπόλοιπους όρους $A_1'\frac{d\hat{x}'}{dt}+A_2'\frac{d\hat{y}'}{dt}+A_3'\frac{d\hat{z}'}{dt}$.



Θα μελετήσουμε την παράγωγο $\frac{d\hat{x}'}{dt}$. Σύμφωνα με το διπλανό σχήμα $|d\hat{x}'|=|KA|d\theta$, αλλά $|KA|=|\hat{x}'|\sin\varphi_1=\sin\varphi_1$. Άρα. $d\hat{x}'=\hat{n}|d\hat{x}'|=\hat{n}(\sin\varphi_1)(d\theta)$, όπου $\hat{n}$: το μοναδιαίο διάνυσμα που (στο όριο των μικρών γωνιών $d\theta$) είναι κάθετο στο επίπεδο των δύο διανυσμάτων $(\vec{\omega},\hat{x}')$. Επομένως

$$\frac{d\hat{x}'}{dt}=\hat{n}(\sin\varphi_1)\frac{d\theta}{dt}=\hat{n}(\sin\varphi_1)(\omega)=\hat{n}|\vec{\omega}||\hat{x}'|(\sin\varphi_1)\Rightarrow\boxed{\frac{d\hat{x}'}{dt}=\vec{\omega}\times\hat{x}'}$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι $\frac{d\hat{y}'}{dt}=\vec{\omega}\times\hat{y}'$, $\frac{d\hat{z}'}{dt}=\vec{\omega}\times\hat{z}'$. Άρα;

$$A_1'\frac{d\hat{x}'}{dt}+A_2'\frac{d\hat{y}'}{dt}+A_3'\frac{d\hat{z}'}{dt}=A_1'(\vec{\omega}\times\hat{x}')+A_2'(\vec{\omega}\times\hat{y}')+A_3'(\vec{\omega}\times\hat{z}')=$$

$$(\vec{\omega}\times A_1'\hat{x}')+(\vec{\omega}\times A_2'\hat{y}')+(\vec{\omega}\times A_3'\hat{z}')=\vec{\omega}\times(A_1'\hat{x}'+A_2'\hat{y}'+A_3'\hat{z}')\Rightarrow A_1'\frac{d\hat{x}'}{dt}+A_2'\frac{d\hat{y}'}{dt}+A_3'\frac{d\hat{z}'}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{A}'$$

Αντικαθιστώντας την τελευταία σχέση στη σχέση (5) παίρνουμε:

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_F=\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_R+\vec{\omega}\times\vec{A}_R \qquad (6)$$

3.3 Ταχύτητα και επιτάχυνση κινητού ως προς περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς

Αν στην σχέση (6) εξειδικεύσουμε το διάνυσμα $\vec{A}$ με τα διάνυσμα θέσης $\vec{r}$, τότε παίρνουμε τη σχέση μεταξύ των ταχυτήτων ενός κινητού όπως αυτές φαίνονται σε ένα αδρανειακό (F) και σε ένα περιστρεφόμενο (R) σύστημα αναφοράς με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ ως προς το αδρανειακό $\quad \vec{\upsilon}_F = \vec{\upsilon}_R + \vec{\omega}\times\vec{r}_R \quad$ (7)

Όπου $\left(\vec{\upsilon}\right)_R$, r'_R είναι τα μεγέθη όπως τα μετράει ο μη-αδρανειακός παρατηρητής, και $\vec{\omega}$ είναι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του, όπως του την αναφέρει ο αδρανειακός παρατηρητής.

Για να υπολογίσουμε τι σχέση που υπάρχει ανάμεσα στις επιταχύνσεις, όπως αυτές φαίνονται από τα δύο συστήματα, θα παραγωγίσουμε, ως προς το χρόνο, τη σχέση (7). Σε αυτή την περίπτωση θα πρέπει να γράψουμε $\left(\vec{\upsilon}\right)_R \equiv \vec{\upsilon}' = \upsilon'_1\hat{x}' + \upsilon'_2\hat{y}' + \upsilon'_3\hat{z}'$ και να λάβουμε υπόψη μας τη χρονική μεταβολή των $\left(\hat{x}',\hat{y}',\hat{z}'\right)$ τόσο στο διάνυσμα της ταχύτητας όσο και στο διάνυσμα της θέσης, $\vec{r}_R \equiv \vec{r}' = x'\hat{x}' + y'\hat{y}' + z'\hat{z}'$, οπότε (σύμφωνα με την ανάλυση της § 3.2)

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\upsilon}_F\right) = \frac{d}{dt}\left(\vec{\upsilon}_R + \vec{\omega}\times\vec{r}_R\right) = \frac{d}{dt}\left(\upsilon'_1\hat{x}' + \upsilon'_2\hat{y}' + \upsilon'_3\hat{z}'\right) + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}_R + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}_R}{dt} =$$

$$= \left(\frac{d\upsilon'}{dt}_1\hat{x}' + \frac{d\upsilon'_2}{dt}\hat{y}' + \frac{d\upsilon'}{dt}_3\hat{z}'\right) + \vec{\omega}\times\vec{\upsilon}_R + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}_R + \vec{\omega}\times\frac{d}{dt}\left(x'\hat{x}' + y'_2\hat{y}' + z'_3\hat{z}'\right) \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\upsilon}_F\right) = \left(\vec{a}\right)_R + \vec{\omega}\times\vec{\upsilon}_R + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}_R + \vec{\omega}\times\left[\left(\frac{dx'}{dt}\hat{x}' + \frac{dy'}{dt}_2\hat{y}' + \frac{dz'}{dt}_3\hat{z}'\right) + \vec{\omega}\times\vec{r}_R\right]$$

Η σχέση αυτή μπορεί, μετά τις αναγωγές των όμοιων όρων, να γραφεί συνοπτικά ως εξής:

$$\boxed{\vec{a}_F = \vec{a}_R + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}_R + 2\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}_R + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_R\right)} \qquad (8)$$

Η τελευταία σχέση μπορεί να γραφεί και με τη μορφή

$$m\vec{a}_R = m\vec{a}_F - m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}_R - 2m\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}_R - m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_R\right) ,$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $m\vec{a}_F = \vec{F}_{o\lambda}$, όπου $\vec{F}_{o\lambda}$ η συνισταμένη των **πραγματικών** δυνάμεων βάσει της οποίας γράφεται η διαφορική εξίσωση κίνησης στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς, τελικά αποδεικνύεται ότι η διαφορική εξίσωση κίνησης, στο μη-αδρανειακό σύστημα αναφοράς γράφεται

$$m\vec{a}_R = \vec{F}_{o\lambda} - m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}_R - 2m\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}_R - m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_R\right) \qquad (9)$$

Η σχέση (9) σημαίνει ότι, στο μη-αδρανειακό σύστημα αναφοράς, η διαφορική εξίσωση κίνησης χρειάζεται, πέραν των πραγματικών δυνάμεων, που ασκούνται από άλλα σώματα πάνω στη μάζα m, και την συνδρομή τριών «διορθωτικών» όρων, ο καθένας από τους οποίους αντιστοιχεί σε μία διαφορετική «αδρανειακή ψευδο-δύναμη» η ονομασία και το φυσικό νόημα των οποίων έχει ως εξής:

$-m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}_R$: «*<u>Εγκάρσια δύναμη</u>*», έχει σχέση με την ενδεχόμενη χρονική μεταβολή της γωνιακής ταχύτητας $\left(\dot{\vec{\omega}}\right)$ με την οποία περιστρέφεται το μη-αδρανειακό σύστημα και ονομάζεται έτσι επειδή είναι εγκάρσια στο διάνυσμα θέσης, όπως αυτό περιγράφεται στο μη αδρανειακό σύστημα.

$-2m\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}_R$: «*Δύναμη Coriolis*», παρουσιάζεται όταν υπάρχει κίνηση, ως προς το μη-αδρανειακό σύστημα, με ταχύτητα που δεν είναι παράλληλη προς τον άξονα περιστροφής, και ονομάστηκε έτσι προς τιμήν του Gaspard-Gustave de Coriolis (1792-1843), Γάλου μαθηματικού, μηχανικού και επιστήμονα, στον οποίον οφείλεται η μαθηματική της περιγραφή (1835).

$-m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_R\right)$: «*Φυγόκεντρος δύναμη*», παρουσιάζεται για κάθε σώμα το οποίο βρίσκεται έξω από τον άξονα περιστροφής ενός περιστρεφόμενου συστήματος αναφοράς, είναι ανάλογη του τετραγώνου της γωνιακής ταχύτητας του μη-αδρανειακού συστήματος αναφοράς και της απόστασης του σώματος από τον άξονα περιστροφής και ονομάζεται έτσι διότι είναι αντίθετη από το διάνυσμα που συνδέει το σώμα με τον άξονα περιστροφής

Μαθηματική σημείωση: Η μετάβαση από τη σχέση (6) στη σχέση (8) θα μπορούσε να γίνει αντιμετωπίζοντας την σχέση (6) ως τη σχέση που ορίζει τον συσχετισμό του «τελεστή» της χρονικής παραγώγου στο αδρανειακό σύστημα (F) με τον αντίστοιχο «τελεστή» στο μη αδρανειακό σύστημα (R):

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_F=\left(\frac{d}{dt}+\omega\times\right)_R \qquad (10)$$

Η σχέση (10) σημαίνει ότι αν δράσουν στο ίδιο διάνυσμα τα δύο μέλη της σχέσης θα δώσουν το ίδιο αποτέλεσμα, αρκεί το διάνυσμα να περιγράφεται στο αντίστοιχο σύστημα, κατά περίπτωση. Με την ίδια «τελεστική» λογική, για την δεύτερη χρονική παράγωγο θα είχαμε

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_F\left(\frac{d}{dt}\right)_F=\left(\frac{d}{dt}+\vec{\omega}\times\right)_R\left(\frac{d}{dt}+\vec{\omega}\times\right)_R\Rightarrow$$

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_F^2=\left(\frac{d}{dt}\right)_R^2+\left(\frac{d}{dt}\right)_R(\vec{\omega}\times)_R+(\vec{\omega}\times)_R\left(\frac{d}{dt}\right)_R+\left[\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times)\right]_R\Rightarrow$$

Την τελευταία σχέση την αντιλαμβανόμαστε να λειτουργεί ως «τελεστής» πάνω στο ίδιο διάνυσμα (που, επίσης, περιγράφεται στο αντίστοιχο σύστημα, κατά περίπτωση). Επομένως, όσον αφορά τον δεύτερο και τον τρίτο όρο του δεξιού σκέλους, δεν αλληλοαναιρούνται. Αντίθετα: $-(\vec{\omega}\times)_R\left(\frac{d}{dt}\right)_R\neq\left(\frac{d}{dt}\right)_R(\vec{\omega}\times)_R=\left[\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\right)+\left(\vec{\omega}\times\frac{d}{dt}\right)\right]_R$. Επομένως, έχουμε:

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_F^2=\left(\frac{d}{dt}\right)_R^2+\left[\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\right)+\left(\vec{\omega}\times\frac{d}{dt}\right)\right]_R+(\vec{\omega}\times)_R\left(\frac{d}{dt}\right)_R+\left[\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times)\right]_R\Rightarrow$$

$$\boxed{\left(\frac{d}{dt}\right)_F^2=\left(\frac{d}{dt}\right)_R^2+\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\right)_R+2\left(\vec{\omega}\times\frac{d}{dt}\right)_R+\left[\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times)\right]_R} \qquad (11)$$

Αν η τελευταία σχέση δράσει πάνω στο ίδιο διάνυσμα θέσης $\vec{r}$, όπως αυτό περιγράφεται στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς, για το αριστερό σκέλος της (11), και στο μη-αδρανειακό σύστημα για το δεξιό σκέλος της (11), τότε παίρνουμε ακριβώς τη σχέση (8).

Παράδειγμα 3.1.4 Λεία ράβδος μήκους L περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω, σε οριζόντιο επίπεδο, περί κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το ένα άκρο της. Κατά μήκος της ράβδου γλιστράει, χωρίς τριβή, διάτρητο σφαιρίδιο μάζας m, το οποίο ξεκινάει από το σταθερό άκρο της ράβδου, με αρχική ταχύτητα υ_0. (α) Πως μεταβάλλεται η θέση του σφαιριδίου, κατά μήκος της ράβδου, συναρτήσει του χρόνου και συναρτήσει της γωνίας και πόσο χρόνο χρειάζεται για να φθάσει στο άλλο άκρο; (β) Πως μεταβάλλεται η ακτινική ταχύτητα του σφαιριδίου, συναρτήσει του χρόνου και συναρτήσει της γωνίας; (γ) Πως μεταβάλλεται η αντίδραση της ράβδου πάνω στο σωματίδιο συναρτήσει του χρόνου και συναρτήσει της γωνίας;

Θεωρούμε αδρανειακό σύστημα αναφοράς $Oxyz$ με την αρχή O στο σταθερό άκρο της ράβδου και τον άξονα z κάθετο στο οριζόντιο επίπεδο, και μη-αδρανειακό σύστημα $Ox'y'z'$ με $z'\equiv z$, το οποίο περιστρέφεται περί τον z μαζί με τη ράβδο, έτσι ώστε ο άξονας x' να συμπίπτει με τη ράβδο. Κατά τον άξονα $z'\equiv z$, το σωματίδιο ακινητεί στο $z'\equiv z=0$.

Θα μελετήσουμε την κίνηση του σφαιριδίου κατά μήκος της διαδρομής $\left(x'=0,\quad x'=L\right)$, χωρίς τριβή και με αρχική ταχύτητα υ₀. Θα υποθέσουμε ότι η ταχύτητα του σωματιδίου, ως προς το $Ox'y'z'$, δεν είναι σταθερή και θα γράψουμε τη διαφορική εξίσωση κίνησης στο επίπεδο $\left(x'y'\right)$ (δεδομένου ότι σε αυτό το σύστημα γνωρίζουμε τις αρχικές συνθήκες και τα όρια της κίνησης)

$$m\vec{a}_R = m\vec{a}_F - m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}_R - 2m\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}_R - m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_R\right)$$

όπου

$$m\vec{a}_R = m\ddot{x}'\hat{x}'$$

$$m\vec{a}_F = \vec{F}_{o\lambda,\pi\rho\alpha\gamma\mu} = \vec{F}_{\alpha\nu\tau.\rho\alpha\beta\delta} = A\hat{y}'$$

$$m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}_R = 0$$

$$-2m\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}_R = -2m\left(\omega\hat{z}'\right)\times\left(\upsilon'\hat{x}'\right) = -2m\omega\dot{x}'\hat{y}'$$

$$-m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_R\right) = -m\left(\omega\hat{z}'\right)\times\left[\left(\omega\hat{z}'\right)\times\left(x'\hat{x}'\right)\right] = -m\left(\omega\hat{z}'\right)\times\left[\omega x'\hat{y}'\right] = m\omega^2 x'\hat{x}'$$

Αντικαθιστώντας τους παραπάνω όρους στην αρχική εξίσωση έχουμε:

$$m\ddot{x}'\hat{x}' = A\hat{y}' - 2m\omega\dot{x}'\hat{y}' + m\omega^2 x'\hat{x}',$$

η οποία γράφεται, κατά συνιστώσες,

$$\left\{\begin{matrix} m\ddot{x}'\hat{x}' = m\omega^2 x'\hat{x}' \\ A\hat{y}' = 2m\omega\dot{x}'\hat{y}' \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \ddot{x}' = \omega^2 x' \\ A = 2m\omega\dot{x}' \end{matrix}\right\} \qquad \begin{matrix}(1\alpha)\\(1\beta)\end{matrix}$$

Για την x΄-συνιστώσα της διαφορικής, $\ddot{x}'=\omega^2 x'$, αναζητούμε μία συνάρτηση $x'\left(t\right)$ που η δεύτερη χρονική παράγωγός της είναι ανάλογη της αρχικής συνάρτησης επί μία θετική ποσότητα, άρα θα έχει τη μορφή: $x'\left(t\right)=Ae^{\rho t}\Rightarrow\ddot{x}'\left(t\right)=\rho^2Ae^{\rho t}$, που, αν αντικατασταθούν στην αντίστοιχη διαφορική, δίνουν $\rho^2=\omega^2\Rightarrow\rho=\pm\omega$, που σημαίνει ότι τη διαφορική την ικανοποιούν λύσεις και της μορφής $x'\left(t\right)=ae^{+\omega t}$, και της μορφής $x'\left(t\right)=be^{-\omega t}$. Επομένως, η γενική λύση είναι $x'\left(t\right)=ae^{+\omega t}+be^{-\omega t}$.

Η γωνία της ράβδου, ως προς την αρχική της θέση, είναι $\varphi\left(t\right)=\omega t$

(α) Οι σταθερές ολοκλήρωσης *a, b*, θα υπολογιστούν από τις αρχικές συνθήκες, ως εξής:

$$x'\left(t=0\right)=0\Rightarrow a+b=0\Rightarrow a=-b \quad\Rightarrow\quad x'\left(t\right)=a\left(e^{\omega t}-e^{-\omega t}\right)$$

$$\dot{x}'\left(t=0\right)=\upsilon_0\Rightarrow a\omega\left(e^{\omega t}+e^{-\omega t}\right)\Big|_{t=0}=\upsilon_0\Rightarrow a=\frac{\upsilon_0}{2\omega}\Rightarrow\boxed{x'\left(t\right)=\frac{\upsilon_0}{\omega}\left(\frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2}\right)\equiv\frac{\upsilon_0}{\omega}\sinh\left(\omega t\right)}$$

Επίσης:
$$x'\left(\varphi\right)=\frac{\upsilon_0}{\omega}\left(\frac{e^{\varphi}-e^{-\varphi}}{2}\right)\equiv\frac{\upsilon_0}{\omega}\sinh\left(\varphi\right)$$

Το συνολικό χρονικό διάστημα υπολογίζεται επιλύοντας ως προς $t_{o\lambda}$, την $x'\left(t_{o\lambda}\right)=L$

$$L=\frac{\upsilon_0}{\omega}\sinh\left(\omega t_{o\lambda}\right)\Rightarrow\boxed{t_{o\lambda}=\frac{1}{\omega}\sinh^{-1}\left(L\omega/\upsilon_0\right)},$$

όπου $\sinh^{-1}$: η αντίστροφη συνάρτηση του $\sinh$.

(β) Η ακτινική ταχύτητα, είναι:

$$\upsilon_{x'}=\dot{x}'\left(t\right)=\upsilon_0\left(\frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2}\right)\equiv\upsilon_0\cosh\left(\omega t\right)=\upsilon_0\cosh\left(\varphi\right)$$

(γ) Η αντίδραση της ράβδου πάνω στο σφαιρίδιο υπολογίζεται από την (1 β)

$$A=2m\omega\dot{x}'=2m\omega\upsilon_0\cosh\left(\omega t\right)=2m\omega\upsilon_0\cosh\left(\varphi\right)$$

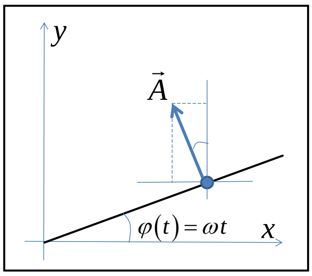
Παρατήρηση – Σχόλιο 1 : Η ανάλυση που προηγείται είναι πρακτικά ισοδύναμη με το να λύσει κανείς το πρόβλημα σε επίπεδες πολικές συντεταγμένες. Χρησιμοποιώντας την έκφραση για την επιτάχυνση, όπως υπολογίστηκε σε επίπεδες πολικές συντεταγμένες, $\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2\right)\hat{\rho} + \left(2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi}\right)\hat{\varphi}$, η διαφορική εξίσωση κίνησης γράφεται

$$m\left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2\right)\hat{\rho} + m\left(2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi}\right)\hat{\varphi} = A\hat{\varphi} \qquad (2)$$

δεδομένου ότι η μόνη δύναμη που ασκείται στο επίπεδο κίνησης είναι η αντίδραση της ράβδου, η οποία (επειδή δεν υπάρχουν τριβές) είναι κάθετη στην ράβδο και παράλληλη με τη φορά κίνησης της ράβδου. Αν ληφθεί υπόψη ότι $\dot{\varphi} = \omega = \sigma\tau\alpha\theta. \;\Rightarrow\; \ddot{\varphi} = 0$, τότε η γωνιακή και η ακτινική συνιστώσα της εξίσωσης (2) γράφονται

$$\left\{\begin{matrix} m\left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2\right)\hat{\rho} = 0 \\ m\left(2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\cancel{\ddot{\varphi}}\right)\hat{\varphi} = A\hat{\varphi} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \ddot{\rho} = \rho\omega^2 \\ A = 2m\dot{\rho}\omega \end{matrix}\right\}$$

Οι οποίες είναι ακριβώς ισοδύναμες με τις (1 α,β) και επιλύονται όπως παραπάνω.



Παρατήρηση – Σχόλιο 2 : Αν επέμενε κάποιος να λύσει το πρόβλημα στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς *Oxyz* και σε καρτεσιανές συντεταγμένες, τότε οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης στους δύο άξονες x και y γράφονται:

$$m\ddot{x} = -A(t)\sin(\omega t), \qquad m\ddot{y} = A(t)\cos(\omega t) \qquad (3\ \alpha,\beta)$$

Σε αυτό το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων, η αντίδραση A της ράβδου, ως άγνωστη συνάρτηση του χρόνου, εισέρχεται και στις δύο εξισώσεις, με αποτέλεσμα να μην είναι άμεσα επιλύσιμο, και η απαλοιφή της $A(t)$ να μην είναι προφανής.

Δείξτε ότι οι λύσεις που προκύπτουν σε αδρανειακές καρτεσιανές συντεταγμένες, από τον μετασχηματισμό των λύσεων που προέκυψαν σε επίπεδες πολικές συντεταγμένες:

$$x(t) = \rho(t)\cos(\omega t) = \frac{\upsilon_0}{\omega}\sinh(\omega t)\cos(\omega t), \quad y(t) = \rho(t)\sin(\omega t) = \frac{\upsilon_0}{\omega}\sinh(\omega t)\sin(\omega t)$$

ικανοποιούν τις διαφορικές εξισώσεις (3 α,β) με συνεπή τρόπο, με την προϋπόθεση ότι η αντίσταση παίρνει την τιμή που υπολογίστηκε στο ερώτημα (γ)

$$A = 2m\omega\upsilon_0\cosh(\omega t) = 2m\omega\upsilon_0\cosh(\varphi)$$

[Χρησιμοποιείστε ως λήμμα, ή, αποδείξτε ότι: $\dfrac{d\sinh u}{du} = \cosh u, \quad \dfrac{d\cosh u}{du} = \sinh u$]

Παρατήρηση – Σχόλιο 3 : Στην περίπτωση που το σφαιρίδιο αφηνόταν ελεύθερο (χωρίς αρχική ταχύτητα), την στιγμή t=0 που φ=0, στο σημείο x_0, τότε: (α) αν $x_0 = 0$, το σφαιρίδιο θα παρέμενε στο ίδιο σημείο (γιατί;), (β) αν $0 < x_0 < L$, το σφαιρίδιο θα άρχιζε να κινείται προς μεγαλύτερες αποστάσεις από το κέντρο περιστροφής. Το πρόβλημα αυτό επιλύεται πάλι με τη βοήθεια του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων (1 α,β) $\ddot{x}' = \omega^2 x', \quad A = 2m\omega\dot{x}'$, με αρχικές συνθήκες $x'(t=0) = x_0, \qquad \dot{x}'(t=0) = 0$. [Βρείτε τις αντίστοιχες λύσεις].