ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Πρόχειρες Σημειώσεις για τις ανάγκες του μαθήματος
«Φυσική – Ι (Μηχανική και Εισαγωγή στην Κυματική)»
της Σχολής Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών του ΕΜΠ

Ιωάννη Σ. Ράπτη
Καθηγητή ΣΕΜΦΕ - ΕΜΠ

Αθήνα, 2020

1. **Εισαγωγή – Θεμελιώδη και Παράγωγα Μεγέθη – Μαθηματικά Εργαλεία (ΒΛΕΠΕ: ΕΝΟΤΗΤΑ_01)**

2. **Νόμοι του Νεύτωνα**

2.1 Διατύπωση των νόμων του Νεύτωνα και γενικά σχόλια (Chapt02-1)
2.2 Επίλυση της εξίσωσης κίνησης του Νεύτωνα (Chapt02-2)

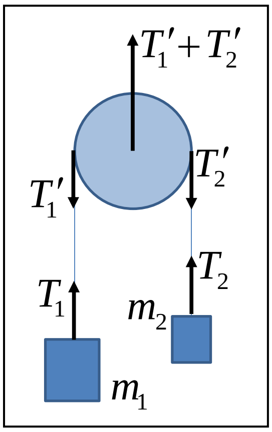
2.3 Ώθηση δύναμης και μεταβολή ορμής

Από τον 3^{o} Νόμο του Νεύτωνα προκύπτει ότι

$$d\vec{p}=\vec{F}dt \quad \Rightarrow \quad \int_{\vec{p}_i}^{\vec{p}_f} d\vec{p}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_f-\vec{p}_i=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt$$

Ονομάζουμε την ποσότητα $\vec{F}dt$ διαφορική ώθηση της δύναμης $\vec{F}$ για το χρονικό διάστημα dt, οπότε η προηγούμενη σχέση: $\vec{p}_f-\vec{p}_i=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt$, είναι ισοδύναμη με την διαπίστωση ότι η μεταβολή ορμής ενός σωματιδίου είναι ίση με το ολοκλήρωμα της ώθησης της συνολικής δύναμης που ασκείται πάνω στο σωματίδιο. Η έννοια της ώθησης είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στην περίπτωση χρονο-μεταβαλλόμενης δύναμης $\vec{F}=\vec{F}(t)$, η οποία μπορεί να μετατοπίζει ελάχιστα ή και καθόλου το σημείο εφαρμογής της, αλλά το μέτρο της μεταβάλλεται με ένα «παλμικό» τρόπο μέσα σε ένα χρονικό διάστημα Δt, ξεκινώντας από μηδενική τιμή και καταλήγοντας πάλι σε μηδενική τιμή, (όπως συμβαίνει, π.χ., στην περίπτωση κρούσης), οπότε η συνολική μεταβολή ορμής μπορεί να υπολογιστεί ως ολοκλήρωμα της ώθησης

$$\Delta\vec{p}=\int_{0}^{\infty}\vec{F}(t)\,dt$$



Παράδειγμα 2.3.1 (α) Μελετήστε την ιδανική μηχανή του Atwood (μη εκτατά νήματα και αμελητέα μάζα νημάτων και τροχαλίας), αναλύοντας την κίνηση των επιμέρους μαζών. (β) Αντιμετωπίστε την μηχανή ως ένα κλειστό σύστημα στο οποίο ασκούνται οι εξωτερικές δυνάμεις (i) της βαρύτητας και (ii) του σημείου ανάρτησης της τροχαλίας, και δείξτε ότι το αποτέλεσμα του (β) είναι συνεπές με τα αποτελέσματα του (α). [Υποθέστε $m_1>m_2$

(α) Νήματα μή-εκτατά και αμελητέας μάζας, άρα: $T_1'=T_1, \quad T_2'=T_2$

Τροχαλία αμελητέας μάζας: $T_1'=T_1=T_2'=T_2=T$

Μηδενική μεταφορική κίνηση της τροχαλίας: $T_1'+T_2'=2T$.

Νήματα μη-εκτατά: Επιταχύνσεις ίδιου μέτρου για τις m_1, m_2, $|\ddot{z}_1|=|-\ddot{z}_2|=|\ddot{z}|$

Εξισώσεις κίνησης για τις δύο μάζες (σύμβαση προσήμων: Θετικές μετατοπίσεις προς τα κάτω:θετικά $z(t)=z_1(t)=-z_2(t)\Rightarrow \ddot{z}_1=-\ddot{z}_2=\ddot{z}\equiv a$) :

$$m_1\ddot{z}=m_1g-T \quad (1), \quad -m_2\ddot{z}=-T+m_2g \quad (2)$$

Αφαιρώντας: $(m_1+m_2)a=(m_1-m_2)g \quad \Rightarrow \quad \boxed{a=\dfrac{(m_1-m_2)}{(m_1+m_2)}g}$

Αντικαθιστώντας στην (1):

$$m_1 a = m_1 g - T \Rightarrow m_1 \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} g = m_1 g - T \Rightarrow T = m_1 g - m_1 \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} g$$

Άρα: $$T = \left[m_1 \frac{(m_1 + m_2)}{(m_1 + m_2)} - m_1 \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} \right] g \Rightarrow \boxed{T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g}$$

(β) Αντιμετωπίζοντας τη μηχανή Atwood ως κλειστό σύστημα, το οποίο δέχεται εξωτερικές δυνάμεις (i) από τη βαρύτητα και (ii) από το σημείο ανάρτησης της τροχαλίας, έχουμε

$$\frac{d\vec{P}_{ολ}}{dt} = \vec{F}_{ολ,εξ} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2\right) = \left[(m_1 + m_2) g - 2T\right]\hat{z} \quad (3)$$

Αλλά, $\frac{d}{dt}\left(m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2\right) = (m_1 - m_2) a\hat{z}$ (4)

(3), (4) : $(m_1 - m_2) a = (m_1 + m_2) g - 2T$, η οποία είναι σε συνέπεια με τις (1) και (2), αφού προκύπτει από την πρόσθεση (1)+(2).

2.4. Συστήματα μεταβλητής μάζας

Στη γενική περίπτωση κατά την οποία μεταβάλλεται η μάζα κάποιου συστήματος, με την προσθήκη ή την αφαίρεση μάζας, η μελέτη της κίνησης του συστήματος γίνεται μέσω της γενικής διατύπωσης του 2^{ου} νόμου του Νεύτωνα, που θα μπορούσε να γραφεί με τη μορφή

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad \Rightarrow \frac{d(m\vec{\upsilon})}{dt} = \vec{F} \quad \Rightarrow \quad m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} + \frac{dm}{dt}\vec{\upsilon} = \vec{F} \qquad (1)$$

Κατά την εφαρμογή αυτής της σχέσης χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή για τον καθορισμό των μεγεθών που εμπλέκονται, καθώς και των προσήμων τους. Στην αποφυγή λαθών βοηθά η εφαρμογή της αρχικής σχέσης με τη μορφή

$$d\vec{p} = \vec{F}_{εξ} dt \quad \Rightarrow \quad (\vec{p})_{t+dt} - (\vec{p})_t = \vec{F}_{εξ} dt \qquad (2)$$

Στη σχέση (2), η τιμή της ορμής κατά τις χρονικές στιγμές t και $t + dt$ πρέπει να <u>υπολογίζεται επί της συνολικής μάζας (συμπεριλαμβάνοντας και την προστιθέμενη ή αφαιρούμενη μάζα), ενώ πρέπει να λαμβάνεται πρόνοια ώστε όλες οι ταχύτητες να αναφέρονται στο ίδιο (συνήθως το εργαστηριακό) σύστημα αναφοράς</u>, (ενώ, π.χ., για πρακτικούς λόγους, η ταχύτητα της αφαιρούμενης ή προστιθέμενης μάζας δίδεται, σε αρκετές περιπτώσεις, σε σχέση με την «κυρίως» μάζα του συστήματος).

Για να διευκρινιστούν οι παραπάνω επισημάνσεις, ακολουθούν συγκεκριμένες εφαρμογές.

Παράδειγμα 2.4.1 Πύραυλος εκτοξεύει αέρια με ρυθμό: $\left|(dm/dt)\right| = \mu = σταθ.$, και με σχετική ταχύτητα u, <u>ως προς τον πύραυλο</u>. Να υπολογιστεί η ταχύτητα του πυραύλου στις περιπτώσεις κίνησης (α) εκτός πεδίου βαρύτητας, (β) μέσα σε σταθερό πεδίο βαρύτητας. [Αντιμετωπίστε το ζήτημα, ως πρόβλημα μίας διάστασης, (κατακόρυφη κίνηση)]

Έστω $M(t)$ η συνολική μάζα του συστήματος (όχημα+καύσιμο+οξειδοτικό) κάποια χρονική στιγμή t, κατά την οποία ο πύραυλος έχει ταχύτητα υ. Κατά τη χρονική στιγμή $t + \Delta t$, το σύστημα έχει μάζα $M(t+\Delta t) = M(t) - \mu\Delta t$, και κινείται με ταχύτητα $\upsilon + \Delta\upsilon$. Την ίδια χρονική στιγμή, καυσαέρια συνολικής μάζας $\mu\Delta t$, εκτοξεύονται με σχετική ταχύτητα $-u$, ως προς τον πύραυλο, άρα με σχετική ταχύτητα $\upsilon+\Delta\upsilon-u$, ως προς το σύστημα «εργαστηρίου» (την Γη). Με βάση τα προηγούμενα, γράφουμε την ορμή κατά τις δύο χρονικές στιγμές

$$p(t)=M(t)\upsilon(t)=M\upsilon$$

$$p(t+\Delta t)=(M-\mu\Delta t)(\upsilon+\Delta\upsilon)+(\mu\Delta t)(\upsilon+\Delta\upsilon-u)$$

Μετά τα αναπτύγματα των γινομένων και τις αναγωγές ομοίων όρων, η σχέση μεταβολής της ορμής: $p(t+\Delta t)-p(t)=F_{\varepsilon\xi}\Delta t$, (στο όριο $\Delta t\to 0$) γράφεται

$$Md\upsilon-\mu u dt=F_{\varepsilon\xi}dt \qquad (1)$$

(α) Εκτός πεδίου βαρύτητας, $F_{\varepsilon\xi}=0$, οπότε η (1) γίνεται

$$Md\upsilon=\mu u dt \;\Rightarrow\; (M_0-\mu t)d\upsilon=\mu u dt \;\Rightarrow\; d\upsilon=\frac{\mu u dt}{(M_0-\mu t)}=-u\frac{d(M_0-\mu t)}{(M_0-\mu t)}$$

Ολοκληρώνοντας: $\displaystyle\int_0^{\upsilon}d\upsilon=-u\int_{t=0}^{t}\frac{d(M_0-\mu t)}{(M_0-\mu t)} \;\Rightarrow\; \boxed{\upsilon(t)=u\ln\frac{M_0}{M_0-\mu t}}$

Ας υποθέσουμε ότι m_0 είναι η συνολική μάζα των υλικών «Καύσιμο+Οξειδοτικό» και m_Π είναι η καθαρή μάζα του πυραύλου, τότε $M_0=m_0+m_\Pi$. Κατά τη χρονική στιγμή εξάντλησης των υλικών «Καύσιμο+Οξειδοτικό», $t=t_0=m_0/\mu$, η τελική ταχύτητα του πυραύλου θα είναι $\upsilon_{\max}=u\ln\dfrac{M_0}{M_0-m_0}=u\ln\dfrac{m_0+m_\Pi}{m_\Pi}\Rightarrow\boxed{\upsilon_{\max}=u\ln\left(1+\dfrac{m_0}{m_\Pi}\right)}$. Δηλ., η μέγιστη ταχύτητα του πυραύλου εξαρτάται μόνο από το πηλίκο των μαζών «Καύσιμα»/«Όχημα», και από την ταχύτητα εκτόξευσης u των καυσαερίων, ως προς τον πύραυλο, και είναι ανεξάρτητη από τον ρυθμό μ και, επομένως, και από τον ολικό χρόνο λειτουργίας. Όπως μπορεί να διαπιστώσει κάποιος, στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε επίσης όταν η εκτόξευση καυσαερίων γίνεται με ενδιάμεσες διακοπές λειτουργίας του κινητήρα[1].

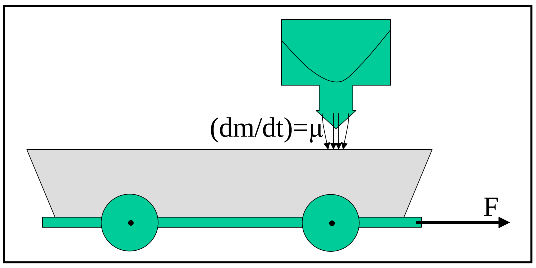
(β) Εντός σταθερού πεδίου βαρύτητας, $F_{\varepsilon\xi}=-(m_0-\mu t)g$, οπότε η (1) γίνεται

$$md\upsilon-\mu u dt=-(m_0-\mu t)g dt \;\Rightarrow\; d\upsilon=\left[-g+\frac{u\mu}{m_0-\mu t}\right]dt$$

Ολοκληρώνοντας, όπως στο (α) έχουμε: $\boxed{\upsilon(t)=u\ln\dfrac{m_0}{m_0-\mu t}-gt}$,

Παρατηρούμε ότι η διαφορά από το ερώτημα (α) δεν είναι παρά η ελεύθερη πτώση σε σταθερό πεδίο βαρύτητας, με την κοινή επιτάχυνση βαρύτητας g, ανεξάρτητα από την μάζα.

Παράδειγμα 2.4.2 (α) Βαγονέτο μάζας m_0 αρχίζει, σε χρόνο t=0, να κινείται, σε οριζόντιο επίπεδο χωρίς τριβές, κατά μήκος ευθείας υπό την επίδραση σταθερής οριζόντιας F. Ταυτόχρονα, αρχίζει να προστίθεται στο βαγονέτο σιτάρι, με σταθερή παροχή dm/dt=μ, από ένα θεριστικό μηχάνημα, το οποίο στέκεται



[1] Αν και το αποτέλεσμα αυτό προκύπτει άμεσα από το νόμο μεταβολής της ορμής του Νεύτωνα, (χωρίς καμία επιπλέον παραδοχή), αναφέρεται μερικές φορές και ως εξίσωση του Τσιολκόφσκι από το όνομα του Ρώσου Κονσταντίν Τσιολκόφσκι (1857-1935) ο οποίος συνεισέφερε σημαντικά σε σχετικές μελέτες.

ακίνητο. Βρείτε την χρονική εξέλιξη της ταχύτητας υ=υ(t) και της επιτάχυνσης a=a(t) του βαγονέτου, για όσο διάστημα η χοάνη φόρτωσης βρίσκεται πάνω από το βαγονέτο. **β)** Να επαναλάβετε τον υπολογισμό των υ=υ(t) και a=a(t), στην περίπτωση που το θεριστικό μηχάνημα και η χοάνη φόρτωσης φροντίζουν να ακολουθούν το βαγονέτο με την ίδια, κάθε στιγμή, ταχύτητα με αυτό. **(γ)** Σχεδιάστε, σε κοινό σχήμα, τη χρονική εξάρτηση της ταχύτητας για τις δύο περιπτώσεις (α) και (β), και σχολιάστε τη σχέση των δύο αποτελεσμάτων.

α) Η εξωτερική δύναμη F επιταχύνει το βαγονέτο μαζί με το φορτίο. Θα μελετήσουμε το σύστημα ανάμεσα σε δύο χρονικές στιγμές, t, και t+dt, κατά τις οποίες **το σύστημα πρέπει να αφορά την ίδια ποσότητα συνολικής μάζας**, άρα την μάζα $m(t)=m_0+\mu t$ και την μάζα $dm=\mu dt$

Την χρονική στιγμή t, το βαγονέτο έχει συνολική μάζα (μαζί με το φορτίο) $m(t)=m_0+\mu t$, η οποία κινείται με ταχύτητα υ, ενώ η μάζα dm, που θα προστεθεί κατά την διάρκεια (t, t+dt) έχει μηδενική οριζόντια συνιστώσα ταχύτητας, άρα $P_{\alpha\rho\chi}=P(t)=(m_0+\mu t)\upsilon$ + $(\mu dt)0$

Την χρονική στιγμή t+dt, το βαγονέτο έχει συνολική μάζα (μαζί με το φορτίο) $m(t)=m_0+\mu t+\mu dt$, η οποία κινείται με ταχύτητα υ+dυ άρα $P_{\tau\varepsilon\lambda}=P(t+dt)=(m_0+\mu t+\mu dt)(\upsilon+d\upsilon)$

Αρα: $P_{\tau\varepsilon\lambda}-P_{\alpha\rho\chi}=Fdt\Rightarrow(m_0+\mu t)d\upsilon+(\mu dt)\upsilon=Fdt$, όπου έχουν γίνει αναγωγές όμοιων όρων και έχουν παραληφθεί όροι διαφορικών ανώτερη τάξης (όπως, π.χ., μdtdυ, το οποίο παραλείπεται ως διαφορικό δεύτερης τάξης). Από την τελευταία εξίσωση :

$$(m_0+\mu t)d\upsilon+(\mu dt)\upsilon=Fdt\Rightarrow(m_o+\mu t)d\upsilon=(F-\mu\upsilon)dt\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{d\upsilon}{F-\mu\upsilon}=\frac{dt}{m_o+\mu t}\Rightarrow-\frac{d(F-\mu\upsilon)}{F-\mu\upsilon}=\frac{d(m_o+\mu t)}{m_o+\mu t}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow-\ln(F-\mu\upsilon)\Big|_{\upsilon=0}^{\upsilon}=\ln(m_o+\mu t)\Big|_{t=0}^{t}\Rightarrow-\ln\frac{F-\mu\upsilon}{F}=\ln\frac{m_o+\mu t}{m_0}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(e^{\ln\frac{F-\mu\upsilon}{F}}\right)^{-1}=e^{\ln\frac{m_o+\mu t}{m_0}}\Rightarrow\frac{1}{\frac{F-\mu\upsilon}{F}}=\frac{m_o+\mu t}{m_0}\Rightarrow Fm_0=(F-\mu\upsilon)(m_o+\mu t)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{\upsilon=\frac{Ft}{m_o+\mu t}}\Rightarrow\upsilon(t\to\infty)\to\upsilon_{o\rho}=\frac{F}{\mu}$$

Για την επιτάχυνση του συστήματος, παραγωγίζουμε την σχέση της ταχύτητας, με τον χρόνο:

$$a=\frac{d\upsilon}{dt}\Rightarrow\boxed{a=\frac{Fm_0}{(m_0+\mu t)^2}}\Rightarrow a(t\to\infty)\to 0$$

Η επιτάχυνση θα μπορούσε να υπολογιστεί από την σχέση :

$$(m_o+\mu t)d\upsilon=(F-\mu\upsilon)dt\Rightarrow(m_o+\mu t)\frac{d\upsilon}{dt}=(F-\mu\upsilon)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(m_o+\mu t)a=(F-\mu\upsilon)\Rightarrow a=\frac{(F-\mu\upsilon)}{(m_o+\mu t)}\Rightarrow a=\frac{Fm_o}{(m_o+\mu t)^2}$$

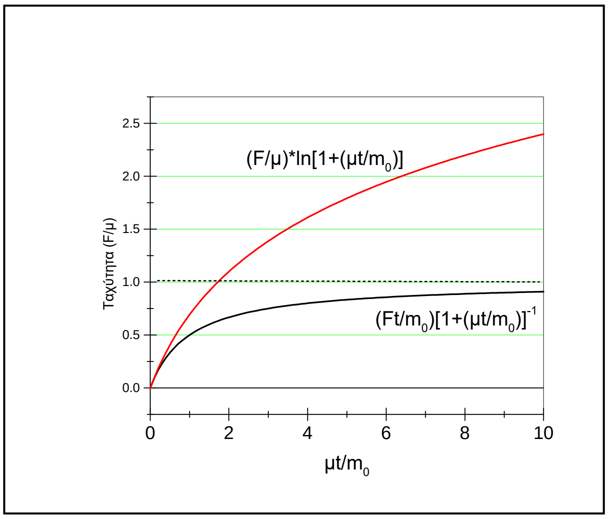
β) Για την περίπτωση που το θεριστικό μηχάνημα και η χοάνη φόρτωσης φροντίζουν να ακολουθούν το βαγονέτο με την ίδια, κάθε στιγμή, ταχύτητα με αυτό, η πρόσθετη ποσότητα μdt έχει ήδη ταχύτητα υ=υ(t), οπότε η σχέση μεταβολής της ορμής έχει ως εξής:

$$P_{\alpha\rho\chi} = P(t) = (m_0 + \mu t)\upsilon + (\mu dt \upsilon) = (m_0 + \mu t + \mu dt)\upsilon$$
$$P_{\tau\varepsilon\lambda} = P(t+dt) = (m_0 + \mu t + \mu dt)(\upsilon + d\upsilon).$$
Αρα: $P_{\tau\varepsilon\lambda} - P_{\alpha\rho\chi} = (m_0 + \mu t + \mu dt)(d\upsilon) = Fdt \quad \Rightarrow (m_0 + \mu t)d\upsilon = Fdt$

όπου έχει παραληφθεί ο όρος μdtdυ, ως 2ης τάξης.

Ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση παίρνουμε: $\upsilon = \dfrac{F}{\mu}\ln\left(1 + \dfrac{\mu t}{m_0}\right)$

γ) Οι δύο τρόποι εξάρτησης της υ=υ(t), φαίνονται στο επόμενο σχήμα



Συγκρίνοντας τις δύο περιπτώσεις, διαπιστώνουμε ότι, παρ' ότι έχουμε εφαρμογή σταθερής δύναμης, στην περίπτωση (α) έχουμε οριακή ταχύτητα, (επειδή πρέπει να προσδίδεται ταχύτητα κάθε φορά στο νέο ποσό μάζας μdt), ενώ στην περίπτωση (β) η ταχύτητα τείνει στο άπειρο με μορφή $\ln(\mu t/m_0)$

Επαναλάβετε την μελέτη για τον υπολογισμό της δύναμης που πρέπει να εφαρμοστεί στο βαγονέτο, ως συνάρτησης του χρόνου, αν ο στόχος είναι να κινείται το βαγονέτο με σταθερή ταχύτητα υ, τόσο στην περίπτωση (α) όσο και στην περίπτωση (β).

Παράδειγμα 2.4.3 Ομοιογενής αλυσίδα, μάζας m_0 και συνολικού μήκους L αποτίθεται, μέσα σε σταθερό πεδίο βαρύτητας (g), πάνω σε οριζόντιο τραπέζι και ανασηκώνεται πάλι, με τις εξής κινήσεις.

(α) Κατά την απόθεση, ενώ το κάτω άκρο της ακουμπά στο τραπέζι, το άλλο άκρο της, που βρίσκεται σε ύψος L, αφήνεται με αρχική ταχύτητα μηδέν, έτσι ώστε η αλυσίδα να σχηματίσει ένα σωρό αμελητέου ύψους.

Κατά την ανάληψη, μπορούμε να μελετήσουμε δύο διαφορετικούς τρόπους ανάληψης (δύο διαφορετικά πειράματα)

(β$_1$) Κατά την ανάληψη, την ανασηκώνουμε μετακινώντας κατακόρυφα το ένα άκρο της με σταθερή ταχύτητα υ.

(β$_2$) Κατά την ανάληψη, την ανασηκώνουμε μετακινώντας κατακόρυφα το ένα άκρο της, με μηδενική αρχική ταχύτητα και σταθερή επιτάχυνση a.

Να υπολογίσετε, και στις τρεις περιπτώσεις, την δύναμη που ασκείται στην αλυσίδα: στην (α) περίπτωση, από το τραπέζι, συναρτήσει του μήκους x που έχει εναποτεθεί, στις περιπτώσεις (β$_1$) και (β$_2$), από το μηχανισμό ανύψωσης, συναρτήσει του μήκους x που έχει ανασηκωθεί.

Είναι χρήσιμο να αποδώσουμε στην αλυσίδα μία γραμμική πυκνότητα μάζας $\lambda \equiv \dfrac{dm}{dx} = \dfrac{m_0}{L}$.

(α) Το κινούμενο μήκος της αλυσίδας εκτελεί ελεύθερη πτώση σε σταθερό πεδίο βαρύτητας. Επομένως, τη χρονική στιγμή t, όλο το κινούμενο τμήμα έχει ταχύτητα $\upsilon(t) = gt$ και το άνω άκρο της αλυσίδας έχει διανύσει απόσταση $x(t) = \dfrac{1}{2}gt^2$, (που συμπίπτει με το μήκος που έχει εναποτεθεί στο τραπέζι και αντιστοιχεί σε ακίνητη μάζα $m(t) = \lambda x(t) = \dfrac{m_0}{L}\dfrac{1}{2}gt^2$

Τη χρονική στιγμή t το τραπέζι πρέπει (i) να εξισορροπήσει το βάρος αυτού του μήκους (της ακίνητης μάζας) και (ii) να εξασφαλίσει και το σωστό ρυθμό μεταβολής της ορμής (αλλά μόνο για τμήμα dm που αποτίθεται με ταχύτητα $\upsilon(t)$, από τη χρονική στιγμή t μέχρι την $t+dt$)

$$F = m(t)g + \frac{dp}{dt} = \left(\frac{m_0}{L}\frac{1}{2}gt^2\right)g + \upsilon(t)\frac{dm}{dt}, \text{ όπου } \upsilon(t) = gt \text{ και } \frac{dm(t)}{dt} = \frac{m_0 gt}{L}$$

$$F = m(t)g + \frac{dp}{dt} = \left(\frac{m_0}{L}\frac{1}{2}gt^2\right)g + \upsilon(t)\frac{dm}{dt} = \frac{m_0 g^2 t^2}{2L} + \frac{m_0 g^2 t^2}{L} \Rightarrow \boxed{F(t) = \frac{3m_0 g^2 t^2}{2L}}$$

Αλλά $x(t) = \frac{1}{2}gt^2$, και επομένως $\boxed{F(x) = 3m_0 g\frac{x}{L}}$

Άρα: σε όλη την διάρκεια της απόθεσης, το τραπέζι ασκεί 3/πλάσια δύναμη από αυτή που αντιστοιχεί στο βάρος της αλυσίδας που βρίσκεται ήδη επάνω του. Η δύναμη αυτή επιμερίζεται, κατά το 1/3 για την εξισορρόπηση του βάρους, και κατά τα 2/3 για τον στιγμιαίο μηδενισμό της ορμής. Μετά την ολοκλήρωση της απόθεσης, η δύναμη που ασκεί το τραπέζι μειώνεται ασυνεχώς από την τιμή $3m_0g$ στην τιμή m_0g, αφού εκλείπει πλέον η απαίτηση μηδενισμού της ορμής, η οποία αντιστοιχεί στα 2/3 της συνολικής δύναμης, κάθε χρονική στιγμή.

<u>Προσοχή</u>: Θα μπορούσε κανείς να αναρωτηθεί, γιατί, κατά την ανάπτυξη της βασικής πρώτης σχέσης: $F = m(t)g + \frac{dp}{dt}$, δεν συνεχίζουμε υπολογίζοντας την παράγωγο της ορμής ως εξής

$$F = m(t)g + \left[\frac{dp}{dt}\right] = \left(\frac{m_0}{L}\frac{1}{2}gt^2\right)g + \left[m(t)\frac{d\upsilon(t)}{dt} + \upsilon(t)\frac{dm(t)}{dt}\right]$$

Θα μπορούσαμε να είχαμε προχωρήσει με αυτό τον τρόπο, αρκεί να είμαστε αρκετά προσεκτικοί ώστε να θυμηθούμε ότι <u>έχουμε ορίσει ως $m(t)$ την ακίνητη μάζα</u>, οπότε, για αυτήν την μάζα ισχύει $\frac{d\upsilon(t)}{dt} = 0$, (αφού ήταν και παραμένει ακίνητη), άρα, η τελική σχέση είναι αυτή που χρησιμοποιούμε παραπάνω. Η πιθανότητα λάθους προκύπτει από το ενδεχόμενο να αντικαταστίσει κάποιος, $m(t) = \lambda x(t) = \frac{m_0}{L}\frac{1}{2}gt^2$, και $\upsilon(t) = gt$, ξεχνώντας ότι αυτά τα δύο μεγέθη αναφέρονται σε διαφορετικά υποσυστήματα, [το $m(t)$ στο ακίνητο και το $\upsilon(t)$ στο κινούμενο τμήμα της αλυσίδας], οπότε θα κατέληγε σε λάθος αποτέλεσμα.

<u>ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΑ Επίλυση από διαφορετική οπτική γωνία</u>: Υπολογίζουμε τη <u>συνολική ορμή της αλυσίδας</u>, κάθε χρονική στιγμή, (όχι μόνο το διαφορικό τμήμα που αποτίθεται) και την αντίστοιχη μεταβολή ορμής. Για το σκοπό αυτό, τώρα <u>ορίζουμε ως $m(t)$ την μάζα του κινούμενου τμήματος</u> της αλυσίδας (που είναι εκείνο που διαθέτει ορμή), οπότε

$$P(t) = [m(t)][\upsilon(t)] = \left[\frac{m_0}{L}\left(L - \frac{1}{2}gt^2\right)\right][gt] = \frac{m_0}{L}g\left(Lt - \frac{1}{2}gt^3\right)$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{m_0}{L}g\left(L - \frac{3}{2}gt^2\right) \Rightarrow \frac{dP(t)}{dt} = m_0 g - 3\frac{m_0}{L}g\left(\frac{1}{2}gt^2\right) = m_0 g - 3m_0 g\frac{x}{L}$$

Αυτή η μεταβολή ορμής οφείλεται σε δύο εξωτερικές δυνάμεις: στο <u>συνολικό βάρος m_0g</u> που ασκείται στην αλυσίδα (από το βαρυτικό πεδίο) και την <u>αντίθετη προς το βάρος δύναμη δύναμη, $F_{\tau\rho\alpha\pi}$</u>, που ασκείται από το τραπέζι

$$F_{o\lambda,\varepsilon\xi} = \frac{dP}{dt} \Rightarrow m_0 g - F_{\tau\rho\alpha\pi} = m_0 g - 3m_0 g\frac{x}{L} \Rightarrow \boxed{F_{\tau\rho\alpha\pi} = 3m_0 g\frac{x}{L}}$$

(σε συνέπεια με την προηγούμενη ανάλυση)

(β_1) Κατά την ανάληψη της αλυσίδας, ξεκινάμε από την ίδια θεμελιώδη σχέση, για την δύναμη από τον μηχανισμό ανύψωσης : $F = m(t)\,g + \dfrac{dp}{dt} = m(t)\,g + \upsilon\dfrac{dm}{dt}$,

όπου ο πρώτος όρος αντιστοιχεί στην εξισορρόπηση του βάρους (για το <u>κινούμενο τμήμα</u> που έχει ανασηκωθεί) και ο δεύτερος όρος εξασφαλίζει την μεταβολή ορμής (η οποία αφορά <u>μόνο το τμήμα *dm* που αποκτά ταχύτητα *υ* κατά το διάστημα *dt*</u>, δεδομένου ότι το κινούμενο τμήμα διατηρεί σταθερή ταχύτητα). Σε αυτή την περίπτωση, που η ταχύτητα ανύψωσης είναι σταθερή, το ύψος που έχει ανυψωθεί, τη χρονική στιγμή t είναι

$$x(t) = \upsilon t \quad \Rightarrow \quad m(t) = \lambda x(t) = \frac{m_0}{L}\upsilon t \quad \Rightarrow \quad \frac{dm}{dt} = \frac{m_0}{L}\upsilon$$

Αντικαθιστώντας: $F = m(t)\,g + \upsilon\dfrac{dm}{dt} = \dfrac{m_0}{L}\upsilon t g + \dfrac{m_0}{L}\upsilon^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{F(x) = \dfrac{m_0}{L} g\left(x + \dfrac{\upsilon^2}{g}\right)}$.

Άρα: όσο διαρκεί η ανάληψη της αλυσίδας από το τραπέζι με σταθερή ταχύτητα υ, η δύναμη που ασκεί ο ανυψωτικός μηχανισμός είναι ίση με το εκάστοτε βάρος της ανυψωμένης αλυσίδας mgx/L, αυξημένο κατά τον σταθερό παράγοντα $m\upsilon^2/L$, ο οποίος αντιστοιχεί στη στιγμιαία μεταβολή ορμής και μηδενίζεται ασυνεχώς, μόλις ολοκληρωθεί η ανάληψη της αλυσίδας από το τραπέζι.

<u>ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΑ (Επίλυση από διαφορετική οπτική γωνία)</u>: Η <u>συνολική εξωτερική δύναμη</u> εξασφαλίζει την <u>συνολική μεταβολή ορμής</u>

$$F - m(t)\,g = \frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt}\big(m(t)\upsilon\big) = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{L}\upsilon\, t\, \upsilon\right) = \frac{m_0}{L}\upsilon^2 \Rightarrow F = m(t)\,g + \frac{m_0}{L}\upsilon^2 = \frac{m_0}{L}\upsilon t g + \frac{m_0}{L}\upsilon^2$$

$$F = \frac{m_0}{L}xg + \frac{m_0}{L}\upsilon^2 \Rightarrow \boxed{F = \frac{m_0}{L} g\left(x + \frac{\upsilon^2}{g}\right)}$$

(β_2) $\quad a = \sigma\tau\alpha\theta. \;\Rightarrow \upsilon(t) = at, \quad x(t) = \dfrac{1}{2}at^2 \quad \Rightarrow \quad m(t) = \lambda x(t) = \dfrac{m_0}{2L}at^2$

Οπότε η ορμή του τμήματος της αλυσίδας που έχει ανυψωθεί:

$$\Rightarrow \quad P(t) = m(t)\upsilon(t) = \frac{m_0}{2L}a^2 t^3$$

$$F = m(t)\,g + \frac{dP}{dt} = \frac{m_0}{2L}at^2 g + \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{2L}a^2 t^3\right) = \frac{m_0}{2L}at^2 g + \frac{3m_0}{2L}a^2 t^2 \Rightarrow \boxed{F(t) = \frac{m_0 a t^2}{2L}(g + 3a)}$$

$$F(t) = \frac{m_0 a t^2}{2L}(g + 3a) \quad \Rightarrow \quad \boxed{F(x) = \frac{m_0}{L}(g + 3a)\,x}$$

<u>Σχόλιο για το ενεργειακό ισοζύγιο των διαδικασιών</u>.

Υπολογίζουμε τα ενεργειακά μεγέθη της περίπτωσης (β_2), που είναι και η λιγότερο τετριμένη. Το έργο της ανυψωτικής δύναμης *F*, μέχρι το σημείο που το άνω άκρο της αλυσίδας βρίσκεται σε απόσταση *x* από το τραπέζι, είναι :

$$W_F(x) = \int_0^x F(x)\,dx = \frac{m_0}{L}(g + 3a)\frac{x^2}{2}$$

Με επίπεδο αναφοράς μηδενικής δυναμικής ενέργειας το επίπεδο του τραπεζιού, η δυναμική και η κινητική ενέργεια του συστήματος, κατά την έναρξη της διαδικασίας είναι ίση με μηδέν. Όταν το άνω άκρο βρίσκεται σε απόσταση *x* από το τραπέζι, η κινητική και η δυναμική ενέργεια του τμήματος που έχει ανυψωθεί είναι :

$$E_K(x) = \frac{1}{2}m(x)\upsilon^2(x) = \frac{m_0}{L}ax^2, \quad E_\Delta(x) = \frac{x}{2}m(x)\,g = \frac{x}{2}\frac{m_0}{L}xg = \frac{m_0}{2L}gx^2 \Rightarrow$$

Συγκρίνουμε το έργο της εξωτερικής δύναμης με τη συνολική δυναμική ενέργεια του συστήματος, ως συνάρτηση της απόστασης *x* του άνω άκρου από το τραπέζι.

$$W_F\left(x\right)-\left[E_K\left(x\right)+E_\Delta\left(x\right)\right]=\frac{m_0 a x^2}{2L}=\frac{E_K\left(x\right)}{2}$$

<u>Παρατήρηση-Σχόλιο:</u> Όπως φάνηκε από τον προηγούμενο υπολογισμό, σε όλες τις ανωτέρω διαδικασίες δεν διατηρείται η μηχανική ενέργεια του συστήματος.

Στην περίπτωση (α) έχουμε μία μείωση της δυναμικής ενέργειας κατά $mgL/2$, με μηδενική αρχική και τελική κινητική ενέργεια (διαδικασία ανάλογη της πλαστικής κρούσης).

Στις περιπτώσεις (β_1) και (β_2), η ολοκλήρωση της ανυψωτικής δύναμης $\int_0^L F\left(x\right)dx$, δίνει έργο μεγαλύτερο από το άθροισμα της τελικής δυναμικής ενέργειας και της τελικής κινητικής ενέργειας του συστήματος.

Άρα, έχουμε απώλεια ενέργειας και κατά την «εκδίπλωση» της αλυσίδας, ωσάν η εκδίπλωση να αποτελεί επίσης μία «μη-ελαστική» διαδικασία. Έστω και αν δεν υπάρχει αναλυτικός τρόπος περιγραφής της τριβής που αναπτύσσεται κατά τη διάρκεια της εκδίπλωσης κάθε κρίκου, εν τούτοις είναι δυνατός ο υπολογισμός του συνολικού αποτελέσματος όπως παραπάνω.

Παράδειγμα 2.4.4 Βυτιοφόρο όχημα, μάζας M_1, μεταφέρει νερό, συνολικής μάζας M_2, και κινείται χωρίς τριβές, πάνω σε ευθύγραμμη διαδρομή, με ταχύτητα V_0. Τη χρονική στιγμή *t*=0 αρχίζει να ασκείται στο όχημα σταθερή δύναμη F, ομόρροπη προς την V_0, και ταυτόχρονα αρχίζει να εκτοξεύεται νερό από την πίσω πλευρά του βυτιοφόρου, με σταθερή ταχύτητα v_1, ως προς το βυτιοφόρο, και με σταθερή παροχή dm/dt=μ. (α) Γράψτε την εξίσωση κίνησης με βάση το νόμο μεταβολής της ορμής. (β) Υπολογίστε την ταχύτητα του βυτιοφόρου, συναρτήσει του χρόνου, για όσο χρονικό διάστημα υπάρχει νερό στο όχημα.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Αν είναι M_1 : η μάζα του βυτιοφόρου και $m_2\left(t\right)=M_2-\mu t$: η μάζα του νερού, τότε ο νόμος μεταβολής της ορμής του συστήματος, ανάμεσα σε δύο χρονικές στιγμές *t* και *t+dt*, υπολογίζεται ως εξής:

$$P_{\alpha\rho\chi}=P\left(t\right)=\left(M_1+m_2\left(t\right)\right)\upsilon\left(t\right)$$

$$P_{\tau\varepsilon\lambda}=P\left(t+dt\right)=\left(M_1+m_2\left(t\right)-dm\right)\left(\upsilon+d\upsilon\right)+dm\left(\upsilon+d\upsilon-v_1\right),$$

Όπου η ποσότητα dm έχει αφαιρεθεί από την «αρχική» ποσότητα $\left(M_1+m_2\left(t\right)\right)$ και έχει εκτοξευθεί με σχετική ταχύτητα $-v_1$, ως προς το όχημα, και επομένως, με ταχύτητα $\left(\upsilon+d\upsilon-v_1\right)$ ως προς το αδρανειακό εργαστηριακό σύστημα ως προς το οποίο γράφεται ο νόμος μεταβολής της ορμής (δεδομένου ότι η εκτόξευσή του έχει ως άμεσο αποτέλεσμα την μεταβολή ταχύτητας απο την τιμή υ στην τιμή $\upsilon+d\upsilon$). Οπότε:

$$P\left(t+dt\right)-P\left(t\right)=Fdt$$

$$\left(M_1+m_2\left(t\right)-dm\right)\left(\upsilon+d\upsilon\right)+dm\left(\upsilon+d\upsilon-v_1\right)-\left(M_1+m_2\left(t\right)\right)\upsilon=Fdt$$

$$\left(M_1+m_2\left(t\right)\right)d\upsilon-v_1 dm=Fdt \quad\Rightarrow\quad \left(M_1+M_2-\mu t\right)d\upsilon-v_1\mu dt=Fdt \quad\Rightarrow$$

$$\boxed{\left(M_1+M_2-\mu t\right)d\upsilon=\left(F+v_1\mu\right)dt}$$

(β) Χωρίζοντας τις μεταβλητές *υ* και *t* : $d\upsilon=-\dfrac{\left(F+v_1\mu\right)}{\mu}\dfrac{d\left(M_1+M_2-\mu t\right)}{\left(M_1+M_2-\mu t\right)}$

Ολοκληρώνοντας: $$\int_{V_0}^{\upsilon} d\upsilon = -\frac{\left(F+v_1\mu\right)}{\mu}\int_{t=0}^{t}\frac{d\left(M_1+M_2-\mu t\right)}{\left(M_1+M_2-\mu t\right)}$$

$$\upsilon - V_0 = -\frac{\left(F+v_1\mu\right)}{\mu}\ln\left(M_1+M_2-\mu t\right)\Big|_{t=0}^{t} \Rightarrow \upsilon = V_0 + \frac{\left(F+v_1\mu\right)}{\mu}\ln\left(M_1+M_2-\mu t\right)\Big|_{t}^{t=0}$$

Τελικά: $\upsilon(t) = V_0 + \left(\frac{F}{\mu}+v_1\right)\ln\left(\frac{M_1+M_2}{M_1+M_2-\mu t}\right)$

Η τελική ταχύτητα αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή $t_0 : M_2 - \mu t_0 = 0$, οπότε

$$\boxed{\upsilon_{\max} = \upsilon(t_0) = V_0 + \left(\frac{F}{\mu}+v_1\right)\ln\left(1+\frac{M_2}{M_1}\right)}$$

Παράδειγμα 2.4.5 Βυτιοφόρο όχημα, μάζας M_0, μεταφέρει νερό, συνολικής μάζας m_0, και κινείται χωρίς τριβές, πάνω σε ευθύγραμμη διαδρομή, με αρχική ταχύτητα V_0. Τη χρονική στιγμή t=0 αρχίζει να εκτοξεύεται νερό από τον πυθμένα του βυτιοφόρου, με σταθερή παροχή dm/dt=μ και με τέτοια σχετική διανυσματική ταχύτητα ως προς το βυτιοφόρο, ώστε κάθε στιγμή το νερό να εκτελεί κατακόρυφη πτώση προς το οδόστρωμα, χωρίς οριζόντια συνιστώσα ταχύτητας (ως προς το οδόστρωμα). (α) Γράψτε την εξίσωση κίνησης με βάση το νόμο μεταβολής της ορμής. (β) Υπολογίστε την ταχύτητα του βυτιοφόρου, συναρτήσει του χρόνου, για όσο χρονικό διάστημα υπάρχει νερό στο όχημα. (γ) Επαναλάβετε τον υπολογισμό για την περίπτωση που το νερό εκτοξεύεται με σταθερή σχετική ταχύτητα υ_0, ως προς το βυτιοφόρο, κάθετα στην ταχύτητα V_0

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Για να εκτοξεύεται το νερό από τον πυθμένα του βυτιοφόρου, με σταθερή παροχή dm/dt=μ και με τέτοια σχετική διανυσματική ταχύτητα ως προς το βυτιοφόρο, ώστε κάθε στιγμή το νερό να εκτελεί κατακόρυφη πτώση προς το οδόστρωμα, χωρίς οριζόντια συνιστώσα ταχύτητας (ως προς το οδόστρωμα), πρέπει να εκτοξεύεται με σχετική ταχύτητα, ως προς το βυτιοφόρο, ίση κατά μέτρο και με αντίθετη φορά από τη στιγμιαία ταχύτητα του βυτιοφόρου ως προς το οδόστρωμα. Με αυτό τον τρόπο, η απόλυτη οριζόντια ταχύτητα του νερού, κατά τη στιγμή της εκτόξευσης, ως προς το οδόστρωμα, είναι μηδέν και, επομένως, το νερό εκτελεί ελεύθερη πτώση προς το οδόστρωμα και δεν συνεισφέρει, μετά την εκτόξευσή του, στην οριζόντια συνιστώσα της ορμής του συστήματος

$$P_{\alpha\rho\chi} = P(t) = \left(M_0 + m(t)\right)\upsilon(t) = \left(M_0 + m_0 - \mu t\right)\upsilon(t)$$
$$P_{\tau\varepsilon\lambda} = P(t+dt) = \left(M_0 + m(t) - dm\right)\left(\upsilon + d\upsilon\right) = \left(M_0 + m - \mu t\right)\left(\upsilon + d\upsilon\right)$$
$$P_{\tau\varepsilon\lambda} - P_{\alpha\rho\chi} = \left(M_0 + m(t) - dm\right)\left(\upsilon + d\upsilon\right) - \left(M_0 + m(t)\right)\upsilon =$$
$$= \left(M_0 + m(t)\right)\upsilon + \left(M_0 + m(t)\right)d\upsilon - dm\upsilon - dmd\upsilon - \left(M_0 + m(t)\right)\upsilon$$
$$P_{\tau\varepsilon\lambda} - P_{\alpha\rho\chi} = 0 \Rightarrow \left(M_0 + m_0 - \mu t\right)d\upsilon - \upsilon\mu dt = 0$$

(β) $P_{\tau\varepsilon\lambda} - P_{\alpha\rho\chi} = 0 \Rightarrow \left(M_0 + m_0 - \mu t\right)d\upsilon = \upsilon\mu dt \Rightarrow \frac{d\upsilon}{\upsilon} = \frac{\mu dt}{\left(M_0 + m_0 - \mu t\right)}$

$$\Rightarrow \frac{d\upsilon}{\upsilon} = -\frac{d\left(M_0 + m_0 - \mu t\right)}{\left(M_0 + m_0 - \mu t\right)} \Rightarrow \int_{V_0}^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{\upsilon} = -\int_{t=0}^{t}\frac{d\left(M_0 + m_0 - \mu t\right)}{\left(M_0 + m_0 - \mu t\right)}$$

$$\ln\frac{\upsilon}{V_0}=\ln\frac{(M_0+m_0)}{(M_0+m_0-\mu t)} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\upsilon=V_0\frac{(M_0+m_0)}{(M_0+m_0-\mu t)}} \text{ και } \upsilon_{\max}=V_0(1+m_0/M_0)$$

(γ) Το τμήμα *dm* του νερού που εκτοξεύεται κατακόρυφα με σταθερή σχετική ταχύτητα υ_0, ως προς το βυτιοφόρο, κάθετα στην ταχύτητα V_0, προσλαμβάνει την στιγμιαία οριζόντια ταχύτητα του βυτιοφόρου

$$P_{\alpha\rho\chi}=P(t)=(M_0+m(t))\upsilon(t)=(M_0+m_0-\mu t)\upsilon(t)$$
$$P_{\tau\varepsilon\lambda}=P(t+dt)=(M_0+m(t)-dm)(\upsilon+d\upsilon)+dm(\upsilon+d\upsilon)=(M_0+m(t))(\upsilon+d\upsilon)$$
$$P_{\tau\varepsilon\lambda}-P_{\alpha\rho\chi}=0\Rightarrow(M_0+m(t))(\upsilon+d\upsilon)-(M_0+m(t))\upsilon=0\Rightarrow(M_0+m(t))d\upsilon=0$$

Για να ισχύει η τελευταία σχέση, για κάθε χρονική στιγμή *t*, $d\upsilon=0\Rightarrow\upsilon=\sigma\tau\alpha\theta.=V_0$

Το αποτέλεσμα ήταν αναμενόμενο, δεδομένου ότι το τμήμα του συστήματος *dm* διατηρεί την οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητάς του, οπότε και το υπόλοιπο τμήμα του συστήματος πρέπει να διατηρήσει επίσης την ταχύτητά του, προκειμένου να διατηρηθεί η συνολική ορμή.

Παράδειγμα 2.4.6 Σε περιοχή του διαστήματος υπάρχει ακίνητο ομογενές αέριο διαπλανητικής σκόνης. Τη χρονική στιγμή $t_0=0$ μπαίνει μέσα στην περιοχή αυτή ένας μετεωρίτης. Εκείνη τη στιγμή ο μετεωρίτης έχει μάζα M_0 και κινείται με ταχύτητα υ_0. Ο μετεωρίτης αρχίζει να παρασύρει διαπλανητική σκόνη και να αυξάνει έτσι τη μάζα του με σταθερό ρυθμό $\frac{dm}{dt}=\lambda$ (υποτίθεται ότι η σκόνη που παρασύρεται από τον μετεωρίτη κινείται κάθε χρονική στιγμή με την ταχύτητα υ που έχει αυτός εκείνη τη στιγμή). Επιπλέον, ο μετωρίτης υφίσταται δύναμη τριβής που είναι ίση κατά μέτρο με $k\upsilon$, όπου $k=\lambda$ είναι θετική σταθερά. **(α)** Βρείτε την ταχύτητα υ_1 που έχει ο μετεωρίτης όταν η μάζα του είναι ίση με $M_1=2M_0$ και τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία συμβαίνει αυτό. **(β)** Βρείτε το έργο της τριβής από τη χρονική στιγμή $t_0=0$ έως τη στιγμή t_1. Είναι αυτό το έργο ίσο με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος μετεωρίτης-σκόνη στο χρονικό διάστημα μεταξύ των στιγμών $t_0=0$ και t_1; Δικαιολογήστε την απάντησή σας..

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Έστω ότι τη χρονική στιγμή *t* ο μετεωρίτης κινείται με ταχύτητα υ και έχει μάζα *m*, ενώ τη χρονική στιγμή *t*+*dt* ο μετεωρίτης κινείται με ταχύτητα $\upsilon+d\upsilon$ και έχει μάζα *m*+*dm*. Από τη σχέση *dp* = *Fdt* βρίσκουμε

$$(m+dm)(\upsilon+d\upsilon)-m\upsilon=F_{\tau\rho}dt=-k\upsilon dt\Rightarrow md\upsilon+\upsilon dm=-k\upsilon\frac{dm}{\lambda}\Rightarrow\frac{d\upsilon}{\upsilon}=-\left(\frac{k}{\lambda}+1\right)\frac{dm}{m}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ln\frac{\upsilon}{\upsilon_0}=-\gamma\ln\frac{m}{M_0}=\gamma\ln\frac{M_0}{m}=\ln\left(\frac{M_0}{m}\right)^{\gamma}\Rightarrow\upsilon=\upsilon_0\left(\frac{M_0}{m}\right)^{\gamma}, \text{όπου } \gamma=\frac{k}{\lambda}+1=2.$$

Επομένως για $\boxed{m=2M_0}$ βρίσκουμε $\upsilon=\upsilon_0\left(\frac{M_0}{2M_0}\right)^2\Rightarrow\boxed{\upsilon=\frac{\upsilon_0}{4}}$

Αυτό συμβαίνει τη χρονική στιγμή t_1 που: $m(t_1)=M_0+\lambda t_1=2M_0\Rightarrow\boxed{t_1=\frac{M_0}{\lambda}}$

Ισοδύναμα: $\left.\begin{cases} md\upsilon+\upsilon dm=-k\upsilon dt \\ m=M_0+\lambda t \Rightarrow dm=\lambda dt \end{cases}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \left(M_0+\lambda t\right)d\upsilon=-\left(k+\lambda\right)\upsilon dt \\ k=\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\lambda}\frac{d\upsilon}{\upsilon}=-\frac{1}{\lambda}\frac{d\left(M_0+\lambda t\right)}{\left(M_0+\lambda t\right)} \Rightarrow \boxed{\upsilon=\upsilon_0\left(\frac{M_0}{M_0+\lambda t}\right)^2}$$

(β) Το έργο της τριβής είναι ίσο με

$$W_{\tau\rho}=-\int_{x_0}^{x_1}k\upsilon dx=-\int_{t_0}^{t_1}k\upsilon^2 dt=-\int_{m_0}^{2m_0}k\upsilon_0^2\frac{M_0^4}{m^4}\frac{dm}{\lambda}=-\upsilon_0^2 M_0^4\int_{m_0}^{2m_0}\frac{dm}{m^4}$$

Τελικά : $W_{\tau\rho}=\upsilon_0^2 M_0^4\left[\frac{1}{3\left(2M_0\right)^3}-\frac{1}{3\left(M_0\right)^3}\right]=-\frac{7}{24}M_0\upsilon_0^2$

Επομένως, το άθροισμα της αρχικής κινητικής ενέργειας και του έργου της τριβής είναι ίσο με : $E_{K,\alpha\rho\chi}+W_{\tau\rho}=\frac{1}{2}M_0\upsilon_0^2-\frac{7}{24}M_0\upsilon_0^2=\frac{5}{24}M_0\upsilon_0^2=\frac{10}{3}\left(\frac{1}{16}M_0\upsilon_0^2\right)=\frac{10}{3}\left(E_{K,\tau\varepsilon\lambda}\right)>\left(E_{K,\tau\varepsilon\lambda}\right)$

Παρατηρούμε ότι, κατ' απόλυτη τιμή, $\left|W_{\tau\rho}\right|<\left|\Delta K\right|$. Αυτό συμβαίνει επειδή ένα μέρος της αρχικής κινητικής ενέργειας μετατρέπεται σε θερμότητα λόγω της τριβής του μετεωρίτη με το αέριο σκόνης, ενώ ένα μέρος μετατρέπεται σε δυναμική ενέργεια παραμόρφωσης (και εν μέρει και σε θερμότητα) λόγω της πλαστικής κρούσης που υφίστανται οι κόκκοι σκόνης που προσπίπτουν στον μετεωρίτη.