ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Πρόχειρες Σημειώσεις για τις ανάγκες του μαθήματος «Φυσική – Ι (Μηχανική και Εισαγωγή στην Κυματική)» της Σχολής Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών του ΕΜΠ

Ιωάννη Σ. Ράπτη
Καθηγητή ΣΕΜΦΕ - ΕΜΠ

Αθήνα, 2021

1. **Εισαγωγή – Θεμελιώδη και Παράγωγα Μεγέθη – Μαθηματικά Εργαλεία (ΒΛΕΠΕ: ΕΝΟΤΗΤΑ_01)**

2. **Νόμοι του Νεύτωνα**

2.1 Διατύπωση των νόμων του Νεύτωνα και γενικά σχόλια

Για την ανάλυση της ισορροπίας, της κίνησης, και της δυναμικής των μαζών, το πλαίσιο της κλασσικής μηχανικής, όπως διατυπώθηκε από τον Νεύτωνα, αποτελεί μία εξαιρετικά καλή προσέγγιση, (σύμφωνα με το σημερινό επίπεδο γνώσεων), με την προϋπόθεση ότι μελετάμε κινήσεις με ταχύτητες σημαντικά μικρότερες από την ταχύτητα του φωτός ($c \approx 3\times10^8$ m/s), και αλληλεπιδράσεις σωματιδίων σημαντικά μεγαλύτερων από την ατομική κλίμακα.

Κεντρική έννοια, στο Νευτωνικό πλαίσιο περιγραφής, αποτελεί η έννοια του αδρανειακού συστήματος αναφοράς, το οποίο θα μπορούσε να οριστεί ως το σύστημα αναφοράς στο οποίο ένα μεμονωμένο σώμα (δηλ., ένα σώμα που δεν αλληλεπιδρά με άλλα σώματα), είτε ακινητεί είτε κινείται με σταθερή ταχύτητα (θεωρώντας την ταχύτητα με τα διανυσματικά της χαρακτηριστικά).

Η ανάλυση της ισορροπίας, της κίνηση,ς και της δυναμικής των μαζών, στο πλαίσιο της κλασικής μηχανικής, διέπονται από τα παρακάτω τρία αξιώματα, αναφερόμενα ως «Νόμοι του Νεύτωνα»:

1. Ως προς κάποιο αδρανειακό σύστημα αναφοράς, κάθε σώμα είτε ακινητεί, είτε κινείται ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα, εκτός αν ασκείται πάνω του κάποια δύναμη.
2. Ως προς κάποιο αδρανειακό σύστημα αναφοράς, ένα σώμα μάζας m, στο οποίο ασκείται κάποια δύναμη $\vec{F}$, εκτελεί κίνηση η οποία διέπεται από τη σχέση $\vec{F} = \dfrac{d\left(m\vec{\upsilon}\right)}{dt} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$. Στην περίπτωση που η μάζα m δεν εξαρτάται από το χρόνο, η σχέση αυτή γράφεται ως: $\vec{F} = m\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt} = m\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$
3. Όταν ένα σώμα 1 ασκεί σε ένα σώμα 2 μία δύναμη $\vec{F}_{12}$, κατά μήκος της ευθείας που τα συνδέει, τότε και το σώμα 2 ασκεί στο σώμα 1 δύναμη $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$.

Το σύστημα των τριών αυτών αξιωμάτων δεν είναι απαλλαγμένο από κάποιου είδους αυτοαναφορικότητα, στο βαθμό που το πρώτο αξίωμα αποτελεί και έναν ορισμό του αδρανειακού συστήματος αναφοράς. Εναλλακτικά, ο χαρακτηρισμός ενός συστήματος αναφοράς ως «αδρανειακού» μπορεί να γίνει με δύο τρόπους:

(α) ένα σύστημα αναφοράς χαρακτηρίζεται ως αδρανειακό όταν είτε ακινητεί είτε κινείται με σταθερή (διανυσματική) ταχύτητα ως προς τον «απόλυτο χώρο» (για τον οποίο, όμως, δεν προτείνεται κάποια λειτουργική μέθοδος επιβεβαίωσης [απλανείς αστέρες ?]),

(β) ένα σύστημα αναφοράς χαρακτηρίζεται ως αδρανειακό όταν η κίνηση των σωμάτων σε αυτό διέπεται από το δεύτερο νόμο, (μόνο που, σε αυτή την περίπτωση, αφ' ενός οι νόμοι (1) και (2) φαίνεται να αλληλοεξαρτώνται, αφ' ετέρου ο νόμος (2), ενώ γίνεται κριτήριο της αδρανειακότητας ενός συστήματος αναφοράς, ταυτόχρονα αποτελεί και τη μόνη μέθοδο υπολογισμού της δύναμης $\vec{F}$, μέσω των θεμελιωδών μεγεθών

Αυτά τα στοιχεία «κυκλικότητας» του συστήματος των αξιωμάτων του Νεύτωνα, έγιναν αντικείμενο κριτικής και, σε συνδυασμό με την απαίτηση του αναλλοίωτου των φυσικών νόμων (Μηχανικής και Ηλεκτρομαγνητισμού) σε μετασχηματισμούς, από το ένα αδρανειακό σύστημα στο άλλο, οδήγησαν στη διατύπωση των νόμων της Ειδικής και της Γενικής Σχετικότητας. Παρ' όλα αυτά, για ένα μεγάλο σύνολο φαινομένων της μηχανικής, όπου οι σχετικές ταχύτητες είναι μικρές σε σύγκριση με την ταχύτητα του φωτός, η παραδοχή ότι κάποια συστήματα αναφοράς, (που έχουν σχετικά μικρές επιταχύνσεις ως προς, π.χ., το σύστημα αναφοράς των απλανών αστέρων), είναι αδρανειακά συστήματα, αποτελεί μία καλή προσέγγιση, στο πλαίσιο της οποίας οι παραπάνω Νόμοι του Νεύτωνα οδηγούν σε συμπεράσματα αρκετά ακριβή ως προς τα αντίστοιχα πειραματικά αποτελέσματα. Στο πλαίσιο αυτών των συστημάτων, με βάση το πρότυπο μοναδιαίας μάζας (m_0=1kg) προσδιορίζουμε τις άλλες μάζες (m_x) εφαρμόζοντας την ίδια δύναμη F σε αμφότερες, οπότε, σύμφωνα με το 2^o νόμο του Νεύτωνα,

$$\left(m_0\vec{a}_0 = \vec{F} = m_x\vec{a}_x\right) \;\Rightarrow\; m_0\vec{a}_0 = m_x\vec{a}_x \;\Rightarrow\; m_x = m_0\left(|\vec{a}_0|/|\vec{a}_x|\right)$$

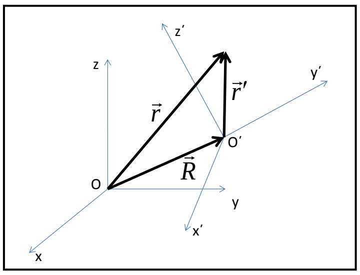
Όσον αφορά στις δυνάμεις, σύμφωνα με το σημερινό επίπεδο γνώσεων, φαίνεται ότι υπάρχουν τέσσερα είδη διαφορετικών δυνάμεων. Κάθε μία από τις τέσσερις γνωστές δυνάμεις έχει τα δικά της χαρακτηριστικά, όσον αφορά την ένταση, τα υλικά συστήματα μέσω των οποίων εκδηλώνεται και την τυπική απόσταση ανάμεσα σε αυτά τα υλικά συστήματα, πέραν της οποίας παύει να εκδηλώνεται (βεληνεκές), και συνοπτικά καταγράφονται στον Πίνακα.Ι, που ακολουθεί.

Πίνακας. Ι. Οι τέσσερις γνωστές αλληλεπιδράσεις, στην φύση.

	Δύναμη	**Ενταση**	**Εμβέλεια**	**Φαινόμενα – Εκδηλώσεις**
1	Ισχυρή	10^2	~10^{-15} m	Σταθερότητα πυρήνων
2	Ηλεκτρομαγνητική	1	∞ (~$1/r^2$)	Ατομική-μοριακή δομή της ύλης Βιολογικές δομές - Οργανισμοί
3	Ασθενής	10^{-4}	< 10^{-17} m	Πυρηνική διάσπαση
4	Βαρυτική	10^{-36}	∞ (~$1/r^2$)	Σημερινή Δομή του Σύμπαντος σε μεγάλη κλίμακα
		$\Uparrow$		
2-4	Δύναμη (σε 10^2 N) ανάμεσα σε δύο πρωτόνια, που απέχουν όσο η διάμετρός τους (2×10^{-15} m)			

Παράδειγμα 2.1.1. Δείξτε ότι η κίνηση ενός σώματος μάζας m, ως προς δύο συστήματα αναφοράς, Oxyz και O΄x΄y΄z΄ που διατηρούν το σχετικό προσανατολισμό τους, περιγράφεται, με βάση το 2^o Νόμο του Νεύτωνα, από την ίδια δύναμη $\vec{F} = \vec{F}'$, με την προϋπόθεση ότι το ένα σύστημα κινείται ως προς το άλλο με σταθερή ταχύτητα.

Αν υποθέσουμε ότι η θέση της αρχής του συστήματος O΄x΄y΄z΄ περιγράφεται, ως προς το σύστημα Oxyz από το διάνυσμα $\vec{R} = \vec{R}(t)$, τότε, τα διανύσματα θέσης $\vec{r}$, $\vec{r}'$ του κινητού, ως προς τα συστήματα αναφοράς , Oxyz και O΄x΄y΄z΄ , αντίστοιχα, συνδέονται με τη σχέση $\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + \vec{r}'(t)$



Παραγωγίζοντας δύο φορές ως προς τον χρόνο, και πολλαπλασιάζοντας επί την μάζα m του κινητού, έχουμε:

$$\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \frac{d^2\vec{R}(t)}{dt^2} + \frac{d^2\vec{r}'(t)}{dt^2} \Rightarrow m\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} - m\frac{d^2\vec{r}'(t)}{dt^2} = m\frac{d^2\vec{R}(t)}{dt^2} \Rightarrow$$

$$\vec{F} - \vec{F}' = m\frac{d^2\vec{R}(t)}{dt^2}$$

Επομένως, το σώμα φαίνεται να κινείται υπό την επίδραση της ίδιας δύναμης $\vec{F}=\vec{F}'$ και ως προς τα δύο συστήματα αναφοράς, αν $\vec{F}-\vec{F}'=0 \Rightarrow \frac{d^2\vec{R}(t)}{dt^2}=0 \Rightarrow \frac{d\vec{R}(t)}{dt}=\vec{V}=\sigma\tau\alpha\vartheta.$, όπου $\vec{V}=\sigma\tau\alpha\vartheta.$, η σταθερή σχετική ταχύτητα των δύο συστημάτων αναφοράς.

Αντίθετα, αν $\frac{d^2\vec{R}(t)}{dt^2}=\vec{A}\neq 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{F}'=\vec{F}-m\vec{A}}$, δηλαδή, παρατηρούμε ότι, στην περίπτωση που το σύστημα (Ο΄x΄y΄z΄) επιταχύνεται ως προς το (Οxyz) με μία επιτάχυνση $\vec{A}$, τότε, για να ερμηνεύεται η κίνηση της μάζας, ως προς το (Ο΄x΄y΄z΄), με το νόμο του Νεύτωνα, απαιτείται η προσθήκη μίας «αδρανειακής» ψευδο-δύναμης $-m\vec{A}=-m\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}$. Στην Ενότητα των μη-αδρανειακών συστημάτων αναφοράς θα μελετήσουμε και άλλα είδη ψευδοδυνάμεων, ή αδρανειακών δυνάμεων που είναι γνωστές και ως δυνάμεις **d'Alembert.** Οι δυνάμεις αυτές δεν είναι πραγματικές δυνάμεις που προκύπτουν ως αποτέλεσμα αλληλεπίδρασης της μάζας m με κάποιες άλλες μάζες, αλλά είναι πλασματικές δυνάμεις που προκύπτουν ως αποτέλεσμα της περιγραφής της κίνησης ως προς ένα μη-αδρανειακό σύστημα αναφοράς, και είναι πάντα ανάλογες της μάζας m της οποίας περιγράφουμε την κίνηση.

Στην προηγούμενη ανάλυση, υπονοούνται δύο υποθέσεις: (α) ο χρόνος κυλάει με τον ίδιο ρυθμό και στα δύο συστήματα, (β) η μάζα είναι ίδια (αναλλοίωτη) και στα δύο συστήματα. Όπως προκύπτει από την Ειδική Σχετικότητα, και οι δύο αυτές συνθήκες δεν ισχύουν στο σχετικιστικό πλαίσιο. Επίσης, σημειώνεται ότι υποθέσαμε πως τα δύο συστήματα διατηρούν το σχετικό προσανατολισμό τους, καθώς αλλάζει ο χρόνος. Θα δούμε, στην ενότητα των Συστημάτων Αναφοράς ότι, και στο πλαίσιο της Κλασικής Μηχανικής, όταν ένα Σύστημα Αναφοράς περιστρέφεται, ακόμη και αν η αρχή του διατηρείται σε σταθερή θέση ως προς αδρανειακό σύστημα, η δυναμική των σωμάτων ως προς το περιστρεφόμενο σύστημα απαιτεί την εισαγωγή όρων «ψευδοδύναμης» προκειμένου να ερμηνεύεται με το νόμο (2) του Νεύτωνα.

Παράδειγμα 2.1.2 Συνδυάζοντας τον δεύτερο και τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα, δείξτε ότι η συνολική ορμή ενός συστήματος δύο σημάτων μάζας m_1 και m_2, αντίστοιχα, που αλληλεπιδρούν με κεντρικές δυνάμεις, διατηρείται στο χρόνο.

Από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, εφαρμοζόμενο σε κάθε σώμα, έχουμε

$\frac{d(m_1\vec{\upsilon}_1)}{dt}=\vec{F}_{21}, \quad \kappa\alpha\iota \qquad \frac{d(m_2\vec{\upsilon}_2)}{dt}=\vec{F}_{12}$, αλλά, από τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα $\vec{F}_{21}=-\vec{F}_{12}$.

Επομένως. $\frac{d(m_1\vec{\upsilon}_1)}{dt}=-\vec{F}_{12}, \quad \kappa\alpha\iota \qquad \frac{d(m_2\vec{\upsilon}_2)}{dt}=\vec{F}_{12}$.

Αθροίζοντας τις δύο σχέσεις, παίρνουμε: $\frac{d(m_1\vec{\upsilon}_1)}{dt}+\frac{d(m_2\vec{\upsilon}_2)}{dt}=0 \Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}(\vec{p}_1+\vec{p}_2)=0}$

Το συμπέρασμα αυτό μπορεί να γενικευτεί, (όπως θα δούμε στα συστήματα σωματιδίων), σε ένα σύστημα Ν-το-πλήθος σωματιδίων, τα οποία αλληλεπιδρούν μεταξύ τους, αλλά δεν δέχονται εξωτερικές δυνάμεις, οπότε η συνολική ορμή του συστήματος των σωματιδίων είναι σταθερή.

2.2 Επίλυση της εξίσωσης κίνησης του Νεύτωνα

Μία από τις πλέον συνήθεις εφαρμογές της εξίσωσης κίνησης του Νεύτωνα είναι η επίλυσή της, κατά την οποία, γνωρίζοντας την δύναμη $\vec{F}$, παράγουμε το διάνυσμα θέσης και το διάνυσμα της ταχύτητας, ως συναρτήσεις του χρόνου, ή, και το διάνυσμα της ταχύτητας, ως συνάρτηση της θέσης, ολοκληρώνοντας τη διαφορική εξίσωση. Ο βαθμός δυσκολίας στην ολοκλήρωση της διαφορικής εξίσωσης κίνησης εξαρτάται από τη μορφή της δύναμης, ως συνάρτησης του χρόνου, της θέσης και (ενδεχομένως) της ταχύτητας. Είναι σπανιότερες οι περιπτώσεις που οι δυνάμεις είναι συναρτήσεις του χρόνου, ενώ είναι πολύ συνηθισμένες οι περιπτώσεις που οι δυνάμεις είναι συναρτήσεις της θέσης. Υπάρχουν, επίσης, περιπτώσεις που οι δυνάμεις είναι συναρτήσεις της ταχύτητας (π.χ., κατά την κίνηση ενός σώματος μέσα σε ρευστό)

2.2.1 Κίνηση με σταθερή δύναμη

Αν η δύναμη $\vec{F}$ είναι σταθερή, ως διάνυσμα, και ανεξάρτητη, από τον χρόνο, τη θέση και την ταχύτητα του κινητού, τότε επιλύουμε την διαφορική εξίσωση ολοκληρώνοντάς την. Η ολοκλήρωση αυτή μπορεί να γίνει με τη μορφή είτε αόριστου είτε ορισμένου ολοκληρώματος. Στην πρώτη περίπτωση θα προκύψουν δύο σταθερές ολοκλήρωσης, δεδομένου ότι η διαφορική εξίσωση του Νεύτωνα είναι δεύτερης τάξης και η ολοκλήρωσή της θα γίνει σε δύο στάδια. Στη δεύτερη περίπτωση, θα χρειαστούμε τα όρια ολοκλήρωσης και για την ταχύτητα και για την θέση. Το συμπέρασμα αυτό ισχύει γενικά για όποια διαφορική εξίσωση n-τάξης, για την επίλυση (ολοκλήρωση) της οποίας αποδεικνύεται ότι είναι απαραίτητη η γνώση n-το πλήθος σταθερών ολοκλήρωσης που, στην περίπτωση που η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο χρόνος, λέγονται και «αρχικές συνθήκες». Στην περίπτωση της εξίσωσης του Νεύτωνα, οι αρχικές συνθήκες δίνονται με τη μορφή γνωστών τιμών για τη θέση $\left(\vec{r}_0\right)$ και την ταχύτητα $\left(\vec{\upsilon}_0\right)$ σε μία ορισμένη χρονική στιγμή $\left(t_0\right)$, ανεξάρτητα από τη μορφή της δύναμης.

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\vec{F}\Rightarrow m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\vec{F}\Rightarrow d\vec{\upsilon}=\frac{\vec{F}}{m}dt\Rightarrow\int_{\vec{\upsilon}_0}^{\vec{\upsilon}}d\vec{\upsilon}=\int_{t_o}^{t}\frac{\vec{F}}{m}dt\Rightarrow\boxed{\vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}_o+\frac{\vec{F}}{m}\left(t-t_0\right)}\qquad(1)$$

Στο επόμενο βήμα

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{\upsilon}_o+\frac{\vec{F}}{m}\left(t-t_0\right)\Rightarrow\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}}d\vec{r}=\int_{t_0}^{t}\left[\vec{\upsilon}_o+\frac{\vec{F}}{m}\left(t-t_0\right)\right]dt\Rightarrow\boxed{\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{\upsilon}_0\left(t-t_0\right)+\frac{\vec{F}}{2m}\left(t-t_0\right)^2}\qquad(2)$$

Αν, οι σχέσεις (1) και (2), αναλυθούν στις καρτεσιανές τους συνιστώσες, το αποτέλεσμα, γνωστό και ως «αρχή της ανεξαρτησίας των κινήσεων», δηλώνει ότι η συνολική κίνηση είναι η διανυσματική σύνθεση των επί μέρους κινήσεων σε κάθε άξονα.

Οι δύο σχέσεις που είναι στο πλαίσιο, στην περίπτωση που τα διανύσματα $\vec{\upsilon}_0$ και $\vec{F}$ είναι παράλληλα, αποτελούν τους γνωστούς νόμους της ομαλά επιταχυνόμενης ή επιβραδυνόμενης κίνησης, (ανάλογα με το αν τα δύο αυτά διανύσματα είναι ομόρροπα ή αντίρροπα). Στην περίπτωση που τα δύο διανύσματα $\vec{\upsilon}_0$ και $\vec{F}$ δεν είναι παράλληλα, έχουμε σύνθεση μίας ομαλής κίνησης και μίας ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης, όπως είναι η πλάγια βολή σε σταθερό πεδίο βαρύτητας.

Παράδειγμα 2.2.1 Δύο κινητά ευρίσκονται, κατά τη χρονική στιγμή t_0, στις θέσεις $\vec{r}_{01}$ και $\vec{r}_{02}$, και κινούνται με σταθερές ταχύτητες $\vec{\upsilon}_{01}$ και $\vec{\upsilon}_{02}$, αντίστοιχα. Θεωρώντας ότι τα τέσσερα διανύσματα $\vec{r}_{01}$, $\vec{r}_{02}$, $\vec{\upsilon}_{01}$ και $\vec{\upsilon}_{02}$ είναι τυχαία, προσδιορίστε τη συνθήκη που πρέπει να ικανοποιούν, προκειμένου, τα δύο κινητά, να συναντώνται, και, με την προϋπόθεση ότι η συνθήκη αυτή ικανοποιείται, υπολογίστε τη χρονική στιγμή που θα συμβεί αυτό.

Επειδή τα κινητά κινούνται με σταθερές ταχύτητες, τα διανύσματα θέσης τους δίνονται από τις σχέσεις $\vec{r}_1 = \vec{r}_{01} + \vec{\upsilon}_{01}(t - t_0)$, και $\vec{r}_2 = \vec{r}_{02} + \vec{\upsilon}_{02}(t - t_0)$, αντίστοιχα.

Αν υπάρχει κάποια στιγμή που συναντώνται, $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$, οπότε $(\vec{r}_{01} - \vec{r}_{02}) = (\vec{\upsilon}_{02} - \vec{\upsilon}_{01})(t - t_0)$. Άρα, για να συναντηθούν τα δύο κινητά πρέπει τα διανύσματα $(\vec{r}_{01} - \vec{r}_{02})$ και $(\vec{\upsilon}_{02} - \vec{\upsilon}_{01})$ να είναι συγγραμμικά. Σε αυτή την περίπτωση, η χρονική στιγμή της συνάντησης υπολογίζεται:

$$(\vec{r}_{01} - \vec{r}_{02}) \cdot (\vec{\upsilon}_{02} - \vec{\upsilon}_{01}) = \left|(\vec{\upsilon}_{02} - \vec{\upsilon}_{01})\right|^2 (t - t_0) \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = t_0 + \frac{(\vec{r}_{01} - \vec{r}_{02}) \cdot (\vec{\upsilon}_{02} - \vec{\upsilon}_{01})}{\left|(\vec{\upsilon}_{02} - \vec{\upsilon}_{01})\right|^2}}$$

Παράδειγμα 2.2.2 Ένα σώμα μάζας m εκτοξεύεται, κατά τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, από μία αρχική θέση $\vec{r}_0 = \hat{z} z_0$ με αρχική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0 = \hat{x}\upsilon_{0x} + \hat{z}\upsilon_{0z}$ μέσα σε ομογενές πεδίο βαρύτητας, όπου η δύναμη που αισθάνεται από τη Γη υποθέτουμε ότι είναι σταθερή και ίση με $\vec{B} = -mg\hat{z}$. Να μελετηθεί η κίνησή του
[Σχόλιο: Το πρόβλημα είναι ανάλογο με την κίνηση φορτισμένου σωματιδίου μάζας *m* και φορτίου *q* το οποίο εισέρχεται με αρχική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0 = \hat{x}\upsilon_{0x} + \hat{z}\upsilon_{0z}$, σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E} = \hat{z}E_0$ (π.χ., στο εσωτερικό ενός επίπεδου πυκνωτή), οπότε δέχεται σταθερή δύναμη $\vec{F} = \hat{z}qE_0$. Η πορεία του έχει τα χαρακτηριστικά της βολής που περιγράφονται στη συνέχεια].

Το παράδειγμα αφορά αυτό που είναι γνωστό ως πλάγια βολή σε σταθερό πεδίο βαρύτητας. Μπορούμε να εργαστούμε με τις δύο σχέσεις στις οποίες καταλήξαμε υποθέτοντας σταθερή δύναμη: $\boxed{\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_o + \frac{\vec{F}}{m}(t - t_0)}$, $\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}_0(t - t_0) + \frac{\vec{F}}{2m}(t - t_0)^2}$.

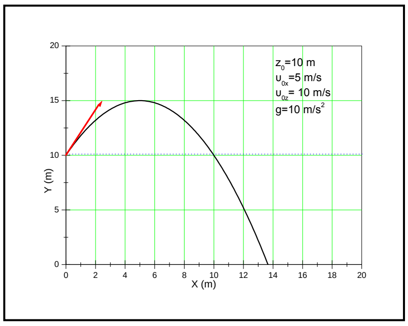
Με αρχικές συνθήκες $\vec{r}_0 = \hat{z}z_0$, $\vec{\upsilon}_0 = \hat{x}\upsilon_{0x} + \hat{z}\upsilon_{0z}$, έχουμε

$\vec{\upsilon} = (\hat{x}\upsilon_{0x} + \hat{z}\upsilon_{0z}) - \hat{z}g(t - t_0) \Rightarrow \boxed{\vec{\upsilon} = \hat{x}\upsilon_{0x} + \hat{z}(\upsilon_{0z} - gt)}$, και

$$\vec{r} = \hat{z}z_0 + (\hat{x}\upsilon_{0x} + \hat{z}\upsilon_{0z})t - \hat{z}\frac{g}{2}t^2 \Rightarrow \boxed{\vec{r} = \hat{x}\upsilon_{0x}t + \hat{z}\left(z_0 + \upsilon_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2\right)}$$

Αν γράψουμε την τελευταία σχέση κατά συνιστώσες και απαλείψουμε τον χρόνο, παίρνουμε:

$$\left.\begin{aligned} x &= \upsilon_{0x}t \\ z &= z_0 + \upsilon_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} t &= \frac{x}{\upsilon_{0x}} \\ z &= z_0 + \upsilon_{0z}\frac{x}{\upsilon_{0x}} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{\upsilon_{0x}}\right)^2 \end{aligned}$$



Η τελευταία σχέση $z = z(x)$ αποτελεί την αναλυτική έκφραση της τροχιάς του σώματος, κατά την πλάγια βολή, (ένα παράδειγμα της οποίας βλέπουμε στο διπλανό σχήμα, με τις αντίστοιχες συνθήκες). Διαπιστώνουμε ότι, αν και η εφαρμοζόμενη σταθερή δύναμη $\vec{B} = -mg\hat{z}$ εξαρτάται από την μάζα του σώματος, η χρονική εξέλιξη της ταχύτητας και της θέσης του σώματος, αλλά και αναλυτική εξίσωση της τροχιάς, δεν εξαρτώνται από τη μάζα του σώματος. Το συμπέρασμα αυτό προκύπτει ως αποτέλεσμα της ισότητας «βαρυτικής» μάζας $\left(\vec{B}=-m_{\beta\alpha\rho} g\hat{z}\right)$ και «αδρανειακής» μάζας $\left(m_{\alpha\delta\rho}\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\vec{F}\right)$, $m_{\beta\alpha\rho}=m_{\alpha\delta\rho}=m$.

Από την παραπάνω γενική ανάλυση μπορεί κανείς να εξειδικεύσει τις επί μέρους περιπτώσεις, όπως της οριζόντιας βολής από κάποιο ύψους h, $\left[z_0=h,\ \ \upsilon_{0z}=0\right]$, της κατακόρυφης βολής από κάποιο ύψος h, $\left[z_0=h,\ \ \upsilon_{0x}=0\right]$, καθώς και τις υποπεριπτώσεις της κατακόρυφης βολής, όπως είναι η κατακόρυφη βολή προς τα πάνω από ύψος h, $\left[z_0=h,\ \ \upsilon_{0x}=0,\ \ \upsilon_{oz}>0\right]$, η κατακόρυφη βολή προς τα κάτω από ύψος h, $\left[z_0=h,\ \ \upsilon_{0x}=0,\ \ \upsilon_{oz}<0\right]$, και η ελεύθερη πτώση από ύψος h, $\left[z_0=h,\ \ \upsilon_{0x}=0,\ \ \upsilon_{oz}=0\right]$.

Επίσης, για την πλάγια βολή που γίνεται από μηδενικό ύψος $\left(z_0=0\right)$, και υπό γωνία θ ως προς το οριζόντιο επίπεδο, μπορούμε να υπολογίσουμε το βεληνεκές (*R*=range) που είναι η μέγιστη απόσταση που διανύεται στον οριζόντιο άξονα, μέχρι το σώμα να ξαναβρεθεί σε μηδενικό ύψος. Από τις σχέσεις που περιγράφουν την τροχιά της πλάγιας βολής, για $z_0=0$, έχουμε

$$z=\upsilon_{0z}\frac{x}{\upsilon_{0x}}-\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{\upsilon_{0x}}\right)^2 \Rightarrow z=x\left(\frac{\upsilon_{0z}}{\upsilon_{0x}}-\frac{gx}{2\upsilon_{0x}^2}\right).$$

Αν αναζητήσουμε τις τιμές του x για τις οποίες μηδενίζεται το ύψος z, έχουμε

$$z=0\Rightarrow x\left(\frac{\upsilon_{0z}}{\upsilon_{0x}}-\frac{gx}{2\upsilon_{0x}^2}\right)=0\Rightarrow\left\{\begin{array}{c} x_1=x_{\min}=0 \\ \dfrac{\upsilon_{0z}}{\upsilon_{0x}}-\dfrac{gx_2}{2\upsilon_{0x}^2}=0\end{array}\right\}$$

και, από τη δεύτερη σχέση $\quad x_2=\dfrac{2}{g}\upsilon_{0x}\upsilon_{0z}=\dfrac{\upsilon_0^2}{g}2\cos\theta\sin\theta\Rightarrow\boxed{R\equiv x_2=\dfrac{\upsilon_0^2}{g}\sin 2\theta}$

Από την τελευταία σχέση βλέπουμε ότι το βεληνεκές R μεγιστοποιείται για τη μέγιστη τιμή του $\sin 2\theta$, άρα για $\theta=45^o$, οπότε $R_{\max}=\dfrac{\upsilon_0^2}{g}$. Το ίδιο αποτέλεσμα θα μπορούσε να υπολογιστεί με τη μελέτη των ακρότατων, μέσω των παραγώγων της $R=R\left(\theta\right)$.

Επίσης, από τις σχέσεις που δίνουν την ταχύτητα και την θέση κατά τον άξονα των z, έχουμε:

$$\upsilon_z=\upsilon_{0z}-gt,\quad \text{και}\quad z=\upsilon_{0z}t-\frac{1}{2}gt^2$$

Το μέγιστο ύψος της πλάγιας βολής αντιστοιχεί στο μηδενισμό της κατακόρυφης ταχύτητας, επομένως, από την πρώτη σχέση παίρνουμε την αντίστοιχη χρονική στιγμή : $t_0=\dfrac{\upsilon_{0z}}{g}$, η οποία, όταν αντικατασταθεί στη δεύτερη σχέση, δίνει $z\left(t_0\right)=\dfrac{\upsilon_{oz}^2}{g}-\dfrac{1}{2}g\left(\dfrac{\upsilon_{oz}}{g}\right)^2\Rightarrow\boxed{z_{\max}=\dfrac{\upsilon_{oz}^2}{2g}}$

2.2.2 Κίνηση υπό την επίδραση δύναμης που εξαρτάται από τη θέση ή/και την ταχύτητα

Αν η συνολική επιταχύνουσα δύναμη $\vec{F}$ εξαρτάται από τη θέση και την ταχύτητα του κινητού, τότε, η επίλυση των εξισώσεων κίνησης απαιτεί κατάλληλες αλλαγές μεταβλητής προκειμένου να είναι ολοκληρώσιμη η διαφορική εξίσωση κίνησης.

Μία περίπτωση δύναμης που εξαρτάται από την θέση και την ταχύτητα του κινητού, και για την οποία μπορεί να μεθοδευθεί η ολοκλήρωση της διαφορικής εξίσωσης κίνησης με αλλαγή μεταβλητής από την μεταβλητή του χρόνου στη μεταβλητή της θέσης, είναι η περίπτωση μία δύναμης που έχει σταθερό προσανατολισμό (έστω: x) και το μέτρο της μπορεί να γραφεί ως γινόμενο μίας συνάρτησης της θέσης και μίας συνάρτησης της ταχύτητας, $F(x,\upsilon) = f(x)g(\upsilon)$. Σε αυτή την περίπτωση γράφουμε:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(x,\upsilon) \quad \Rightarrow \quad m\frac{d\upsilon}{dt} = f(x)g(\upsilon) \quad \Rightarrow \quad m\frac{d\upsilon}{dx}\frac{dx}{dt} = f(x)g(\upsilon)$$

Σε αυτό το σημείο, αντικαθιστώντας $(dx/dt) = \upsilon$ και διαχωρίζοντας σε διαφορετικά σκέλη της εξίσωσης τις μεταβλητές x και υ, παίρνουμε :

$$m\frac{\upsilon d\upsilon}{g(\upsilon)} = f(x)dx \quad \Rightarrow \quad m\int_{\upsilon_0}^{\upsilon}\frac{\upsilon' d\upsilon'}{g(\upsilon')} = \int_{x_0}^{x} f(x')dx' \quad \Rightarrow G(m,\upsilon_0;\upsilon) = H(x_0;x)$$

όπου οι βουβές μεταβλητές ολοκλήρωσης φαίνονται ως «τονούμενες» προκειμένου να κρατήσουμε τα σύμβολα (x,υ) για τα άνω όρια των αντίστοιχων ολοκληρώσεων. [Το σημείο στήξης «;» ξεχωρίζει της παραμέτρους (αριστερά) από τις μεταβλητές (δεξιά) του προβλήματος]. Μετά τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων της τελευταίας σχέσης, επιλύουμε την σχέση που προκύπτει έτσι ώστε να πάρουμε μία σχέση της μορφής $\upsilon = \upsilon(m, x_0, \upsilon_0; x)$. Αν καταφέρουμε να πάρουμε αναλυτικά μία τέτοια έκφραση, τότε μπορούμε να προχωρήσουμε σε μία ακόμη ολοκλήρωση, ως εξής:

$$\upsilon = \upsilon(m, x_0, \upsilon_0; x) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \upsilon(m, x_0, \upsilon_0; x) \Rightarrow \frac{dx}{\upsilon(m, x_0, \upsilon_0; x)} = dt \quad \Rightarrow \quad \int_{x_0}^{x}\frac{dx'}{\upsilon(m, x_0, \upsilon_0; x')} = \int_{t_0}^{t} dt'$$

Το αποτέλεσμα αυτής της ολοκλήρωσης θα μπορεί, γενικά, να γραφεί με τη μορφή

$$x = x(m, t_0, x_0, \upsilon_0; t),$$

όπου έχει χρησιμοποιηθεί η ίδια σύμβαση για το διαχωρισμό «παραμέτρων» (αρχικών συνθηκών) και «μεταβλητών»
[Η διαφοροποίηση των «βουβών» μεταβλητών ολοκλήρωσης (τονούμενες) από το άνω όριο του ολοκληρώματος (άτονο) θα υπονοείται στη συνέχεια, χωρίς να δηλώνεται πάντα ρητά].

2.2.3 Η έννοια της κινητικής ενέργειας

Αν γράψουμε τη διαφορική εξίσωση κίνησης συναρτήσει της ταχύτητας και πολλαπλασιάσουμε εσωτερικά, και τα δύο μέλη της, επί το διάνυσμα της στοιχειώδους μετατόπισης, μπορούμε να πάρουμε τη σχέση

$$\vec{F}(\vec{r}) = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}(\vec{r}) = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\cdot d\vec{r} = md\vec{\upsilon}\cdot\vec{\upsilon},$$

η ολοκλήρωση της οποίας θα δώσει :

$$\vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = md\vec{\upsilon}\cdot\vec{\upsilon} \quad \Rightarrow \quad \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}}\vec{F}(\vec{r}')\cdot d\vec{r}' = m\int_{\vec{\upsilon}_0}^{\vec{\upsilon}} d\vec{\upsilon}'\cdot\vec{\upsilon}' = m\int_{\vec{\upsilon}_0}^{\vec{\upsilon}} d\left(\frac{\vec{\upsilon}'\cdot\vec{\upsilon}'}{2}\right) = m\int_{\vec{\upsilon}_0}^{\vec{\upsilon}} d\left(\frac{\upsilon'^2}{2}\right)$$

Αλλά, $\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}}\vec{F}(\vec{r}')\cdot d\vec{r}' = W_{\vec{F}}(\vec{r}_0,\vec{r})$ είναι το έργο που παράγει η δύναμη $\vec{F}$ κατά την μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της (που βρίσκεται επί του κινητού μάζας m), από το σημείο $\vec{r}_0$ στο σημείο $\vec{r}$, ενώ το τελευταίο σκέλος της ισότητας είναι ολοκλήρωμα του διαφορικού της ποσότητας $\upsilon^2/2$ και, επομένους, τελικά μπορούμε να γράψουμε

$$W_{\vec{F}}\left(\vec{r}_0,\vec{r}\right)=m\int_{\vec{\upsilon}_0}^{\vec{\upsilon}} d\left(\frac{\upsilon'^2}{2}\right) \quad\Rightarrow\quad \boxed{W_{\vec{F}}\left(\vec{r}_0,\vec{r}\right)=\frac{1}{2}m\left(\upsilon^2-\upsilon_0^2\right)} \qquad (2)$$

Αν ορίσουμε την ποσότητα $E_K=\frac{1}{2}m\upsilon^2$ ως την κινητική ενέργεια ενός σώματος μάζας m που κινείται με ταχύτητα υ, τότε, η σχέση (2), (γνωστή και ως θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας), λέει ότι, όταν ένα σώμα κινείται υπό την επίδραση συνολικής επιταχύνουσας δύναμης $\vec{F}$, τότε, κατά την μετακίνησή του από τη θέση $\vec{r}_1$ στη θέση $\vec{r}_2$, το έργο της δύναμης $\vec{F}$ είναι ίσο με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος ανάμεσα στις δύο θέσεις.

Παράδειγμα 2.2.3. Κίνηση μάζας m, σε μία διάσταση, υπό την επίδραση αρμονικής δύναμης $F\left(x\right)=-kx\hat{x}$ (αρμονικός ταλαντωτής). Υποθέτουμε ότι οι αρχικές συνθήκες δίνονται από τις σχέσεις: $x\left(t_0\right)=x_o,\quad \upsilon\left(t_0\right)=\upsilon_o$.

Επειδή η δύναμη είναι αναλυτική συνάρτηση της θέσης μπορούμε να εφαρμόσουμε την προηγούμενη μεθοδολογία, γράφοντας :

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx \;\Rightarrow\; m\frac{d\upsilon}{dt}=-kx \;\Rightarrow\; m\frac{d\upsilon}{dx}\frac{dx}{dt}=-kx \;\Rightarrow\; m\upsilon d\upsilon=-kxdx$$

Επομένως, ολοκληρώνουμε, χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες

$$m\upsilon d\upsilon=-kxdx \;\Rightarrow\; m\int_{\upsilon_0}^{\upsilon}\upsilon d\upsilon=-k\int_{x_0}^{x}xdx \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}m\left(\upsilon^2-\upsilon_0^2\right)=-\frac{1}{2}k\left(x^2-x_0^2\right)$$

[Στην επόμενη Ενότητα, που θα μιλήσουμε για διατηρητικές δυνάμεις και για την έννοια της δυναμικής ενέργειας, θα αναγνωρίσουμε στην τελευταία σχέση τη διατήρηση της ολικής μηχανικής ενέργειας (κινητικής και δυναμικής)]

Επιλύουμε την τελευταία σχέση ως προς $\upsilon\equiv dx/dt$, διαχωρίζουμε τις μεταβλητές x και t σε διαφορετικά μέλη της σχέσης και ολοκληρώνουμε άλλη μία φορά, χρησιμοποιώντας στα ορισμένα ολοκληρώματα τις αρχικές συνθήκες.

$$\upsilon^2=\upsilon_0^2-\frac{k}{m}\left(x^2-x_0^2\right) \;\Rightarrow\; \frac{dx}{dt}=\sqrt{\upsilon_0^2-\frac{k}{m}\left(x^2-x_0^2\right)}$$

$$\Rightarrow\; \frac{dx}{\sqrt{\upsilon_0^2-\frac{k}{m}\left(x^2-x_0^2\right)}}=dt \;\Rightarrow\; \int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{\upsilon_0^2-\omega_o^2\left(x^2-x_0^2\right)}}=\int_{t_0}^{t}dt\,,$$

όπου ορίσαμε τη σταθερά $\omega_0^2=k/m$ (γνωστή ως κυκλική συχνότητα ταλάντωσης του αρμονικού ταλαντωτή. Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της τελευταίας σχέσεις με ω_0,

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\omega_0dx}{\sqrt{\upsilon_0^2-\omega_o^2\left(x^2-x_0^2\right)}}=\omega_0\int_{t_0}^{t}dt \;\Rightarrow\; \int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{\left(\upsilon_0^2/\omega_o^2\right)+x_0^2-x^2}}=\omega_0\int_{t_0}^{t}dt \;\Rightarrow\; \int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\omega_0\int_{t_0}^{t}dt$$

[<u>Μαθηματική παρένθεση</u>: Απόδειξη της σχέσης $\int\frac{df}{\sqrt{1-f^2}}=\arcsin f$.

Έστω ότι $f=\sin\varphi \;\Rightarrow\; \varphi=\arcsin f$. Παραγωγίζοντας $\frac{df}{d\varphi}=\cos\varphi=\sqrt{1-\sin^2\varphi}=\sqrt{1-f^2}$

Για την αντίστροφη συνάντηση: $\frac{d\varphi}{df}=\frac{1}{df/d\varphi}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}}$, και, πολλαπλασιάζοντας με df

$$\frac{d\varphi}{df}df = \frac{df}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}} \quad \Rightarrow \quad d\varphi = \frac{df}{\sqrt{1-f^2}} \quad \Rightarrow \quad \int d\{\arcsin f\} = \int \frac{df}{\sqrt{1-f^2}}$$, *όπερ έδει δείξαι.*]

Ολοκληρώνουμε: $\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \omega_0 \int_{t_0}^{t} dt \quad \Rightarrow \quad \arcsin\frac{x}{a} - \arcsin\frac{x_0}{a} = \omega_0(t-t_0)$

και ορίζουμε το $\arcsin\frac{x_0}{a} = \theta_0$, οπότε η προηγούμενη σχέση γράφεται

$$\arcsin\frac{x}{a} = \omega_0 t - (\omega_0 t_0 - \theta_0) \quad \Rightarrow \quad x = a\sin(\omega_0 t - \varphi_0) \quad \Rightarrow \boxed{x = \left(\sqrt{(\upsilon_0^2/\omega_o^2) + x_0^2}\right)\sin(\omega_0 t - \varphi_0)},$$

που είναι μεταβολή θέσης, με το χρόνο, του αρμονικού ταλαντωτή, με:

πλάτος $a = \sqrt{(\upsilon_0^2/\omega_o^2) + x_0^2}$ και φάση $\varphi_0 = \omega_0 t - \arcsin\frac{x_0}{a}$

Παράδειγμα 2.2.4. Κίνηση μάζας m σε οριζόντιο λείο επίπεδο (μηδενική κινητική τριβή), με αρχικές συνθήκες $x(t_0=0)=0, \quad \upsilon(t_0=0)=\upsilon_0>0$, και αντίσταση αέρα (α) ανάλογη της ταχύτητας $F(\upsilon) = -c_1\upsilon$, (β) ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας $F(\upsilon) = -c_2\upsilon^2$

(α) Η εξίσωση κίνησης γράφεται

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = -c_1\upsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{d\upsilon}{\upsilon} = -\frac{c_1}{m}dt \quad \Rightarrow \quad \int_{\upsilon_0}^{\upsilon} \frac{d\upsilon}{\upsilon} = -\frac{c_1}{m}t \quad \Rightarrow$$

$$\ln\left(\frac{\upsilon}{\upsilon_0}\right) = -\frac{c_1}{m}t \quad \Rightarrow \quad \boxed{\upsilon(t) = \upsilon_0 e^{-\frac{c_1}{m}t}}$$

Η ταχύτητα μειώνεται εκθετικά με το χρόνο (αλλά, η κίνηση διαρκεί επ’ άπειρον !)

Για την μεταβολή της θέσης με το χρόνο, ολοκληρώνουμε την προηγούμενη εξίσωση

$$\frac{dx}{dt} = \upsilon_0 e^{-\frac{c_1}{m}t} \quad \Rightarrow \quad dx = \upsilon_0 e^{-\frac{c_1}{m}t}dt \quad \Rightarrow \quad \int_0^x dx = \upsilon_0 \int_0^t e^{-\frac{c_1}{m}t}dt$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \upsilon_0 \frac{m}{c_1}\left(1 - e^{-\frac{c_1}{m}t}\right)} \quad \Rightarrow \quad x(t\to\infty) = \boxed{\upsilon_0\frac{m}{c_1} = x_{\max}}$$

Άρα, παρά την επ’ άπειρον κίνηση της μάζας, το διάστημα που διανύεται είναι πεπερασμένο λόγω της εκθετικής μείωσης της ταχύτητας με τον χρόνο

Η εξάρτηση της ταχύτητας από την απόσταση μπορεί να υπολογιστεί είτε με απαλοιφή του χρόνου από τις αντίστοιχες σχέσεις, είτε επιλύοντας την διαφορική εξίσωση της κίνησης με την αρχική μεθοδολογία της αντικατάστασης $(d\upsilon/dt) = (d\upsilon/\ dx)(dx/dt)$, οπότε:

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = -c_1\upsilon \quad \Rightarrow \quad m\frac{d\upsilon}{dx}\frac{dx}{dt} = -c_1\upsilon \quad \Rightarrow \quad -\frac{m}{c_1}d\upsilon = dx \quad \Rightarrow \boxed{\upsilon = \upsilon_0 - \frac{c_1}{m}x}$$

(β) Για την περίπτωση αντίστασης ανάλογης του τετραγώνου της ταχύτητας $F(\upsilon) = -c_2\upsilon^2$, εργαζόμενοι αν τον ίδιο τρόπο, βρίσκουμε:

$$\upsilon(t) = \frac{\upsilon_0}{1+kt}, \quad x(t) = \frac{\upsilon_0}{k}\ln(1+kt), \qquad \left(k = c_2\frac{\upsilon_0}{m}\right)$$

Σε αυτή την περίπτωση, σε μεγάλους χρόνους, η ταχύτητα μειώνεται περίπου ως ~1/t , ενώ η απόσταση αυξάνεται περίπου όπως το ~ln(t). Δηλαδή, και η κίνηση συνεχίζεται επ' άπειρον (!) και το διανυόμενο διάστημα είναι άπειρο (!), παρά την τετραγωνική εξάρτηση της αντίστασης από την ταχύτητα. Τούτο συμβαίνει διότι, όσο περνάει ο χρόνος, για μικρές ταχύτητες, η τετραγωνική εξάρτηση είναι ασθενέστερη της γραμμικής εξάρτησης. Σε ένα πραγματικό σύστημα, όπου υπάρχουν και οι δύο όροι, καθώς μειώνεται η ταχύτητα μειώνεται και η σημασία του τετραγωνικού όρου, με αποτέλεσμα να είναι πεπερασμένο το συνολικό μήκος της διαδρομής του κινητού. Αν θέλαμε να επιλύσουμε με ακρίβεια την περίπτωση που συνυπάρχουν και οι δύο όροι, θα είχαμε

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = -c_1\upsilon - c_2\upsilon^2 \quad \Rightarrow \quad m\frac{d\upsilon}{c_1\upsilon + c_2\upsilon^2} = -dt \quad \Rightarrow \int_{\upsilon_0}^{\upsilon} \frac{d\upsilon}{c_1\upsilon + c_2\upsilon^2} = -\frac{t}{m} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{c_1}\ln\frac{\upsilon}{c_2\upsilon + c_1}\bigg|_{\upsilon_0}^{\upsilon} = -\frac{t}{m} \quad \Rightarrow \quad ... \quad \Rightarrow \quad \upsilon(t) = \frac{\upsilon_0 c_1 e^{-\frac{c_1 t}{m}}}{c_1 + c_2\upsilon_0\left(1 - e^{-\frac{c_1 t}{m}}\right)}$$

με τις ανωτέρω οριακές συμπεριφορές

Παράδειγμα 2.2.5. Πτώση σώματος μάζας m σε σταθερό πεδίο βαρύτητας με μηδενική αρχική ταχύτα $(\upsilon_0 = 0)$ και τριβή από τον αέρα ανάλογη της ταχύτητας.

Επιλέγουμε ως θετική κατεύθυνση του κατακόρυφου άξονα την κατεύθυνση της βαρύτητας (προς τα κάτω), οπότε $m\frac{d\upsilon}{dt} = mg - c\upsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{d\upsilon}{g - (c/m)\upsilon} = dt$

$$\Rightarrow \quad \frac{-(c/m)d\upsilon}{g - (c/m)\upsilon} = -(c/m)dt \Rightarrow \quad \frac{d\left(g - (c/m)\upsilon\right)}{g - (c/m)\upsilon} = -d\left(ct/m\right)$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση, (με αρχικές συνθήκες, $t = 0 \Rightarrow \upsilon = 0$) και απολογαριθμίζοντας παίρνουμε

$$\upsilon(t) = \frac{mg}{c}\left(1 - e^{-\frac{ct}{m}}\right) \quad \Rightarrow \quad \upsilon_{o\rho} \equiv \upsilon(t \to \infty) = \frac{mg}{c}$$

Στο τελευταίο συμπέρασμα για την $\upsilon_{o\rho}$ θα μπορούσε να καταλήξει κανείς από την εξίσωση κίνησης, $m\frac{d\upsilon}{dt} = mg - c\upsilon$, θέτοντας $\frac{d\upsilon}{dt} = 0$, οπότε $mg - c\upsilon_{o\rho} = 0$.

[Δείξτε ότι, αν επιλέξουμε ως θετική κατεύθυνση του κατακόρυφου άξονα την κατεύθυνση την αντίθετη της βαρύτητας (προς τα πάνω), τότε: $\upsilon(t) = \frac{mg}{c}\left(e^{-\frac{ct}{m}} - 1\right)$, και σχολιάστε]

Παράδειγμα 2.2.6 Πλάγια βολή μέσα σε σταθερό πεδίο βαρύτητας και σε περιβάλλον που ασκεί δύναμη αντίδρασης ανάλογη της ταχύτητας.

Μπορούμε να συνδυάσουμε τα δύο προβλήματα, αυτό της πλάγιας βολής σε σταθερό βαρυτικό πεδίο και της κίνησης μέσα σε ρευστό (π.χ., την ατμόσφαιρα) το οποίο ασκεί δύναμη αντίδρασης ανάλογη της ταχύτητας. Σε αυτή την περίπτωση, η εξίσωση κίνησης σε διανυσματική μορφή γράφονται: $m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -mg\hat{z} - c\vec{\upsilon}$, όπου έχουμε επιλέξει ως θετική φορά του άξονα z την αντίθετη από την κατεύθυνση της βαρύτητας. Αν ορίσουμε $c/m = k$, τότε η εξίσωση κίνησης, κατά συνιστώσες, γράφεται:

$$\ddot{x} = -k\dot{x}, \qquad \ddot{y} = -k\dot{y}, \qquad \ddot{z} = -g - k\dot{z}$$

Οι τρεις διαφορικές εξισώσεις είναι ήδη διαχωρισμένες και μπορούν να ολοκληρωθούν (σύμφωνα με τα παραδείγματα που έχουν προηγηθεί). Η πρώτη ολοκλήρωση δίνει :

$$\dot{x} \equiv \upsilon_x(t) = \upsilon_{0x} e^{-kt}, \qquad \dot{y} \equiv \upsilon_y(t) = \upsilon_{0y} e^{-kt}, \qquad \dot{z} \equiv \upsilon_z(t) = \upsilon_{0z} e^{-kt} - \frac{g}{k}\left(1 - e^{-kt}\right),$$

όπου έχουν υποτεθεί αρχικές ταχύτητες, κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$, $\left(\upsilon_{0x}, \upsilon_{0y}, \upsilon_{0z}\right)$.

Με μία δεύτερη ολοκλήρωση (με αρχική θέση την αρχή των αξόνων, $x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 0$) παίρνουμε

$$x(t) = \frac{\upsilon_{0x}}{k}\left(1 - e^{-kt}\right), \quad y(t) = \frac{\upsilon_{0y}}{k}\left(1 - e^{-kt}\right), \quad z(t) = \left(\frac{\upsilon_{0z}}{k} + \frac{g}{k^2}\right)\left(1 - e^{-kt}\right) - \frac{g}{k}t$$

Η εξίσωση τροχιάς στο κατακόρυφο επίπεδο, π.χ., στο x-z, (ισοδύναμα αποτελέσματα προκύπτουν και στο y-z), προκύπτει με την απαλοιφή του χρόνου από την πρώτη και την τρίτη εξίσωση. Από την πρώτη σχέση $\left(1 - e^{-kt}\right) = \dfrac{k}{\upsilon_{0x}} x(t) \Rightarrow t = -\dfrac{1}{k}\ln\left(1 - \dfrac{k}{\upsilon_{0x}} x\right)$,

και αντικαθιστώντας στην τρίτη σχέση $z = \left(\dfrac{\upsilon_{0z}}{k} + \dfrac{g}{k^2}\right)\dfrac{k}{\upsilon_{0x}} x + \dfrac{g}{k^2}\ln\left(1 - \dfrac{k}{\upsilon_{0x}} x\right)$.

Τελικά $z = \left(\dfrac{\upsilon_{0z}}{\upsilon_{0x}} + \dfrac{g}{k\upsilon_{0x}}\right)x + \dfrac{g}{k^2}\ln\left(1 - \dfrac{k}{\upsilon_{0x}} x\right)$, η οποία είναι μία καμπύλη πολύ πιο απότομη στην κάθοδό της από την παραβολή της πλάγιας βολής χωρίς αντιστάσεις του αέρα.

Αν θέλουμε να διερευνήσουμε την συμπεριφορά της $z = z(x)$ για μικρές τιμές της σταθεράς αντίστασης *k*, θα πρέπει να κάνουμε ένα κατάλληλο ανάπτυγμα του λογαρίθμου μέχρις εκείνο τον όρο που, μετά τις αναγωγές στην συνολική εξίσωση, θα επιτρέπει την εμφάνιση στην τελική σχέση ενός όρου πρώτης τάξης ως προς *k*. Αν δοκιμάσουμε το ανάπτυγμα Taylor του λογάριθμου $\ln(1 - \xi) \approx -\xi - \dfrac{\xi^2}{2} - \dfrac{\xi^3}{3} - \ldots$, θα διαπιστώσουμε ότι αυτό επιτυγχάνεται όταν προχωρήσουμε μέχρι και τον τρίτο όρο, οπότε:

$$z \approx \frac{\upsilon_{0z}}{\upsilon_{0x}} x - \frac{gx^2}{2\upsilon_{0x}^2} - \frac{gkx^3}{3\upsilon_{0x}^3} = \left\{ x\left(\frac{\upsilon_{0z}}{\upsilon_{0x}} - \frac{gx}{2\upsilon_{0x}^2}\right)\right\} - \left\{\frac{gkx^3}{3\upsilon_{0x}^3}\right\},$$

όπου, στην πρώτη αγκύλη αναγνωρίζουμε το τμήμα που αφορούσε την πλάγια βολή χωρίς αντίσταση, και στη δεύτερη αγκύλη έχουμε τη διόρθωση που προκύπτει (σε πρώτη τάξη ως προς *k*) λόγω της αντίστασης

Για τον ακριβή προσδιορισμό του βεληνεκούς, θα έπρεπε να επιλύσουμε την εξίσωση που προκύπτει για μηδενισμό του ύψους $(z = 0)$ στην αρχική εξίσωση της καμπύλης, οπότε θα είχαμε μία υπερβατική εξίσωση της μορφής $\left(\dfrac{\upsilon_{0z}}{\upsilon_{0x}} + \dfrac{g}{k\upsilon_{0x}}\right)x + \dfrac{g}{k^2}\ln\left(1 - \dfrac{k}{\upsilon_{0x}} x\right) = 0$,

που δεν επιλύεται, ως προς x, με συμβατικές μεθόδους. Αν χρησιμοποιήσουμε το προηγούμενο προσεγγιστικό αποτέλεσμα, η συνθήκη του βεληνεκούς $(z = 0)$ γράφεται

$$z \approx \frac{\upsilon_{0z}}{\upsilon_{0x}} x - \frac{gx^2}{2\upsilon_{0x}^2} - \frac{gkx^3}{3\upsilon_{0x}^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad x\left(-\frac{gk}{3\upsilon_{0x}^3}x^2 - \frac{g}{2\upsilon_{0x}^2}x + \frac{\upsilon_{0z}}{\upsilon_{0x}}\right) = 0,$$

Της οποίας οι ρίζες είναι $x_1 = 0$ και $x_{2,3} = \dfrac{3\upsilon_{0x}^2}{2gk}\left[-\dfrac{g}{2\upsilon_{0x}^2} \mp \sqrt{\left(\dfrac{g}{2\upsilon_{0x}^2}\right)^2 + \dfrac{4gk\upsilon_{0z}}{3\upsilon_{0x}^4}}\right]$, από τις οποίες απορρίπτεται η ρίζα με το αρνητικό ριζικό (διότι δίνει αρνητικό βεληνεκές) και η ρίζα με το θετικό ριζικό δίνει το βεληνεκές το διορθωμένο λόγω αντιστάσεων (στο πλαίσιο των παραπάνω προσεγγίσεων).

Παράδειγμα 2.2.7 Να μελετηθεί η κίνηση φορτισμένου σωματιδίου μάζας m και φορτίου q>0, το οποίο «εκτοξεύεται», τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0 = \hat{x}\upsilon_{0x} + \hat{z}\upsilon_{0z}$, από το σημείο $\vec{r}_0 = \left(\hat{x}x_0 + \hat{y}y_0 + \hat{z}z_0\right)$, σε ένα χώρο στον οποίον συνυπάρχουν ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E} = \hat{z}E_0$ και ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = \hat{z}B_0$. Θεωρούμε γνωστό ότι το σωματίδιο δέχεται δύναμη Lorentz $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{\upsilon}\times\vec{B}\right)$

[Οι αρχικές συνθήκες που αναφέρονται είναι αρκετά γενικές, απλώς έχει περιστραφεί το σύστημα αναφοράς, περί τον άξονα z έτσι ώστε ο άξονας x να είναι παράλληλος στην καρτεσιανή συνιστώσα της αρχικής ταχύτητας, που είναι κάθετη στον άξονα z]

Για να γράψουμε τη διαφορική εξίσωση κίνησης, σε μία τυχαία χρονική στιγμή, θα πρέπει να υποθέσουμε ότι η αντίστοιχη ταχύτητα έχει, γενικά, τρεις συνιστώσες $\vec{\upsilon} = \left(\hat{x}\upsilon_x + \hat{y}\upsilon_y + \hat{z}\upsilon_z\right)$,

οπότε ο όρος $\vec{\upsilon}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \upsilon_x & \upsilon_y & \upsilon_z \\ 0 & 0 & B_0 \end{vmatrix} = \hat{x}\upsilon_y B_0 - \hat{y}\upsilon_x B_0$. Αντικαθιστώντας στην $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{\upsilon}\times\vec{B}\right)$

έχουμε $\vec{F} = q\left(\hat{z}E_0 + \left(\hat{x}\upsilon_y B_0 - \hat{y}\upsilon_x B_0\right)\right)$, οπότε η εξίσωση κίνησης, κατά συνιστώσες γράφεται:

$$m\frac{d\upsilon_x}{dt} = q\upsilon_y B_0, \quad m\frac{d\upsilon_y}{dt} = -q\upsilon_x B_0, \quad m\frac{d\upsilon_z}{dt} = qE_0 \qquad (1,\alpha,\beta,\gamma)$$

Από την σχέση (1,γ): $\upsilon_z = \upsilon_{oz} + \frac{qE_0}{m}t \quad \Leftrightarrow \quad z = z_0 + \upsilon_{oz}t + \frac{qE_0}{2m}t^2$, ομαλά επιταχυνόμενη

Από τις σχέσεις (1,α) και (1,β) βλέπουμε ότι έχουμε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων, όπου η διαφορική της μίας συνιστώσας εκφράζεται συναρτήσει της άλλης. Παραγωγίζοντας άλλη μία φορά τις δύο αυτές σχέσεις ως προς το χρόνο, παίρνουμε

$$\frac{d^2\upsilon_x}{dt^2} = \frac{qB_0}{m}\frac{d\upsilon_y}{dt}, \quad \frac{d^2\upsilon_y}{dt^2} = -\frac{qB_0}{m}\frac{d\upsilon_x}{dt}, \qquad (2\alpha,\beta)$$

Συνδυάζοντας τις (1α)-(2α) και τις (1β)-(2β), από το σύστημα δύο διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης, καταλήγουμε σε δύο ανεξάρτητες διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης

$$\frac{d^2\upsilon_x}{dt^2} = -\left(\frac{qB_0}{m}\right)^2\upsilon_x, \quad \frac{d^2\upsilon_y}{dt^2} = -\left(\frac{qB_0}{m}\right)^2\upsilon_y, \qquad (3\alpha,\beta)$$

Αν ορίσουμε ως «κυκλοτρονική συχνότητα» την ποσότητα $\omega_c = qB_0/m$, τότε οι (3α,β)

γράφονται ως εξής: $\dfrac{d^2\upsilon_x}{dt^2} = -\omega_c^2\upsilon_x, \quad \dfrac{d^2\upsilon_y}{dt^2} = -\omega_c^2\upsilon_y, \qquad (4\alpha,\beta)$

Επομένως και οι δύο συνιστώσες υπακούουν διαφορική εξίσωση με τα χαρακτηριστικά της διαφορικής εξίσωσης του αρμονικού ταλαντωτή, άρα (όπως είδαμε και στο Παράδειγμα 2.2.3) οι γενικές λύσεις θα έχουν τη μορφή:

$$\upsilon_x = C_0\cos\left(\omega_c t + \varphi\right) = C_1\cos\left(\omega_c t\right) + C_2\sin\left(\omega_c t\right)$$

Εφαρμόζοντας τις αρχικές συνθήκες ταχύτητας $\upsilon_x\left(t=0\right) = \upsilon_{0x} \Rightarrow C_1 = \upsilon_{0x}$

και, από την (1α), $\upsilon_y = \frac{1}{\omega_c}\left[-\upsilon_{0x}\omega_c\sin\left(\omega_c t\right) + C_2\omega_c\cos\left(\omega_c t\right)\right]$.

Εφαρμόζοντας τις αρχικές συνθήκες ταχύτητας $\upsilon_y\left(t=0\right) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

Τελικά, οι δύο συνιστώσες ταχύτητας γράφονται

$$\upsilon_x = \upsilon_{0x}\cos(\omega_c t), \qquad \upsilon_y = -\upsilon_{0x}\sin(\omega_c t)$$

Ολοκληρώνοντας άλλη μία φορά:

$$x = (\upsilon_{0x}/\omega_c)\sin(\omega_c t) + D_1, \qquad y = (\upsilon_{0x}/\omega_c)\cos(\omega_c t) + D_2$$

και εφαρμόζοντας αρχικές συνθήκες: $x_0 = D_1, \quad D_2 = y_0 - \dfrac{\upsilon_{0x}}{\omega_c}$

Τελικά: $x = (\upsilon_{0x}/\omega_c)\sin(\omega_c t) + x_0, \qquad y = (\upsilon_{0x}/\omega_c)\cos(\omega_c t) + y_0 - \dfrac{\upsilon_{0x}}{\omega_c}$

Για να παράγουμε την εξίσωση της τροχιάς στο επίπεδο (*x*,*y*) απαλείφουμε τον χρόνο από τις δύο προηγούμενες εξισώσεις

$$\left.\begin{aligned} &(x-x_0)^2 = (\upsilon_{0x}/\omega_c)^2 \sin^2(\omega_c t) \\ &\left(y-y_0+\frac{\upsilon_{0x}}{\omega_c}\right)^2 = (\upsilon_{0x}/\omega_c)^2\cos^2(\omega_c t)\end{aligned}\right\} \Rightarrow (x-x_0)^2 + \left(y-y_0+\frac{\upsilon_{0x}}{\omega_c}\right)^2 = \left(\frac{\upsilon_{0x}}{\omega_c}\right)^2.$$

Άρα, στο επίπεδο (x,y) η τροχιά είναι κύκλος με ακτίνα $R = \dfrac{\upsilon_{0x}}{\omega_c} = \dfrac{\upsilon_{0x} m}{qB_0}$, γνωστή και ως κυκλοτρονική ακτίνα, και κέντρο $(x_0, y_0 - R)$. Αν λάβουμε υπόψη μας και την ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση στον άξονα-z, βλέπουμε ότι η συνολική κίνηση είναι μία σπειροειδής κίνηση με σταθερή ακτίνα, αλλά με βήμα έλικας που αυξάνει τετραγωνικά με το χρόνο.

Αν δεν υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο $(E_0 = 0)$, τότε η κίνηση παράλληλα στον άξονα-z είναι ισοταχής, οπότε η σπειροειδής κίνηση γίνεται με σταθερό βήμα $\Delta z = T_c \upsilon_{0z} = \dfrac{2\pi}{\omega_c}\upsilon_{0z}$. Στην περίπτωση που δεν υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο $(E_0 = 0)$ και η αρχική ταχύτητα είναι κάθετη στο μαγνητικό πεδίο $(\upsilon_{0z} = 0)$, τότε το σωματίδιο παραμένει στο επίπεδο $z = z_0$, εκτελώντας κυκλική τροχιά με τα παραπάνω στοιχεία.