ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Πρόχειρες Σημειώσεις για τις ανάγκες του μαθήματος
«Φυσική – Ι (Μηχανική και Εισαγωγή στην Κυματική)»
της Σχολής Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών του ΕΜΠ
Chapt01-2

Ιωάννη Σ. Ράπτη
Καθηγητή ΣΕΜΦΕ - ΕΜΠ

Αθήνα, 2021

1. Μαθηματικά Εργαλεία

1.1.1 Συναρτήσεις Μεγεθών (παράγωγος, ακρότατα, σειρά Taylor)

Στην συνήθη εκδοχή της, η μελέτη ενός φυσικού φαινομένου συνίσταται στον προσδιορισμό του τρόπου με τον οποίον, η τιμή ενός φυσικού μεγέθους (π.χ., x), επηρεάζει την τιμή ενός άλλου φυσικού μεγέθους (π.χ., y). Ο τρόπος αυτός αποδίδεται με τη μορφή μίας συνάρτησης $y = f(x)$, στην οποία εφαρμόζονται όλες οι έννοιες (του ορίου, της συνέχειας, της παραγώγου, των ακρότατων, κ.λπ.) οι οποίες είναι γνωστές από τα μαθηματικά, και στην οποία ως ανεξάρτητη μεταβλητή x μπορεί να θεωρείται το ανεξάρτητο μέγεθος (την τιμή του οποίου μπορεί να καθορίζει ο μελετητής του φαινομένου) και ως εξαρτημένη μεταβλητή y το εξαρτημένο μέγεθος (η τιμή του οποίου καθορίζεται από το μέγεθος x).

Όταν έχει ορισθεί η παράγωγος πρώτης τάξης μίας συνάρτησης $y = f(x)$ ως:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = g(x),$$

τότε, οι παράγωγοι ανώτερης τάξης ορίζονται με ανάλογο τρόπο. Δηλαδή, η παράγωγος δεύτερης τάξης της $y = f(x)$, είναι η παράγωγος πρώτης τάξης της παραγώγου $g(x) = \dfrac{dy}{dx}$,

$$\frac{dg}{dx} = \frac{d}{dx} g = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \equiv \frac{d^2 y}{dx^2}, \text{ και αντίστοιχα οι: } \frac{d^3 y}{dx^3}, \frac{d^4 y}{dx^4}, \frac{d^4 y}{dx^4}, \ldots, \text{ κ.ο.κ.}$$

Για παράδειγμα, σε μία ευθύγραμμη κίνηση, όπου η θέση του κινητού, συναρτήσει του χρόνου, περιγράφεται από τη συνάρτηση $x = x(t)$, ορίζουμε την ταχύτητα $\upsilon = \upsilon(t)$ και την επιτάχυνση $a = a(t)$, ως $\upsilon(t) = \dfrac{dx}{dt}$ και $a(t) = \dfrac{d\upsilon}{dt} = \dfrac{d^2 x}{dt^2}$.

Στην περίπτωση που μία συνάρτηση $y = f(x)$ είναι αμφιμονοσήμαντη, έστω και τμηματικά, τότε μπορούμε να ορίσουμε την ***αντίστροφη*** συνάρτηση (έστω και τμηματικά, αντίστοιχα), εναλλάσσοντας τον ρόλο των δύο μεταβλητών, $x = f^{-1}(y) \equiv g(y)$, και επιλλέγοντας το κατάλληλο διάστημα τιμών της μεταβλητής y, ώστε η αντίστροφη να είναι μονότιμη. Π.χ., στις περιοδικές συναρτήσεις επιλέγουμε το κατάλληλο τμήμα της περιόδου, ώστε να ικανοποιούνται οι ανωτέρω προϋποθέσεις.

Για παράδειγμα, αν $y = A\sin(ax)$, (όπου A: σταθερά με τις διαστάσεις του y, και a:σταθερά με διαστάσεις αντίστροφες από εκείνες του x), τότε ορίζουμε την αντίστροφη συνάρτηση $x = x(y)$, ως εξής:

$$y = A\sin(ax) \;\Rightarrow\; \frac{y}{A} = \sin(ax) \;\Rightarrow\; ax = \arcsin\left(\frac{y}{A}\right) \;\Rightarrow x = \frac{1}{a}\arcsin\left(\frac{y}{A}\right)$$

Προκειμένου να έχουμε μία καλά ορισμένη συνάρτηση $x = x(y)$, πρέπει, π.χ., $-1 \le \dfrac{y}{A} < 1$.

Για τον υπολογισμό της παραγώγου της αντίστροφης συνάρτησης χρειάζεται, μερικές φορές, να χρησιμοποιηθεί η ιδιότητα της παραγώγου: $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{(dy/dx)}$

Στο ανωτέρω παράδειγμα, $y = A\sin(ax) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = Aa\cos(ax)$, οπότε για την αντίστροφη συνάρτηση θα έχουμε: $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{(dy/dx)} = \dfrac{1}{Aa\cos(ax)} = \dfrac{1}{A\alpha}\dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2(ax)}} = \dfrac{1}{A\alpha}\dfrac{1}{\sqrt{1-(y/A)^2}}$

Άρα $\dfrac{dx}{dy} \equiv \dfrac{d}{dy}\left\{\dfrac{1}{a}\arcsin\left(\dfrac{y}{A}\right)\right\} = \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{1}{\sqrt{A^2-y^2}}$, τελικά: $\dfrac{d}{dy}\left\{\arcsin\left(\dfrac{y}{A}\right)\right\} = \dfrac{1}{\sqrt{A^2-y^2}}$

<u>Σημείωση</u>: το αποτέλεσμα αυτό θα είναι χρήσιμο στη μελέτη του αρμονικού ταλαντωτή.

Παράδειγμα 1.2.2.1 Σημειακή μάζα κινείται κατά μήκος του άξονα *x* έτσι ώστε η θέση του, *x*, να περιγράφεται, συναρτήσει του χρόνου, *t*, από τη συνάρτηση $x = f(t) = a + b(t-t_0) + c(t-t_0)^2$, για το χρονικό διάστημα $t \in (t_0, 5t_0)$. Τη χρονική στιγμή $t = 5t_0$ η μάζα προσκρούει κάθετα σε ακλόνητο τοίχο, ανακλάται ελαστικά και στη συνέχεια κινείται στην αντίθετη κατεύθυνση με σταθερή ταχύτητα.

(α) Προσδιορίστε την ταχύτητα και την επιτάχυνση της μάζας για το χρονικό διάστημα $t \in (t_0, 5t_0)$, καθώς και την θέση, την ταχύτητα και την επιτάχυνση της μάζας για το χρονικό διάστημα $t \in (5t_0, 10t_0)$

(β) Προσδιορίστε σε ποια διαστήματα είναι συνεχή τα τρία μεγέθη: θέση, ταχύτητα και επιτάχυνση, σε ποια σημασία παρουσιάζουν ασυνέχεια και πόση είναι τιμή της ασυνέχειας του κάθε μεγέθους.

Διαφορικό παραγωγίσημης Συνάρτησης

Όταν έχει ορισθεί η παράγωγος πρώτης τάξης μίας συνάρτησης $y = f(x)$ ως:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x),$$

τότε το διαφορικό *dy* της συνάρτησης, σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της στο οποίο είναι καλά ορισμένη η παράγωγός της, ορίζεται ως

$$dy = \lim_{\Delta x \to 0}\left[f(x+\Delta x) - f(x)\right] = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)\Delta x\right] = f'(x)dx \Rightarrow \boxed{dy = f'(x)dx}$$

Όπως φαίνεται από τον παραπάνω σχέση, το διαφορικό *dy* μίας συνάρτησης εκφράζει το πόσο μεταβάλλεται η τιμή της συνάρτησης, σε κάθε σημείο *x* του πεδίου ορισμού της, αλλά για την ίδια τιμή διαφορικής μεταβολής *dx* της ανεξάρτητης μεταβλητής.

Παράδειγμα. (α) Εκφράστε το εμβαδόν *S* ενός κύκλου ως συνάρτηση της ακτίνας του *r*. (β) Θεωρήστε μία διαφορική μεταβολή του *r* κατά *dr*, και εκφράστε το διαφορικό εμβαδόν που περιλαμβάνεται μεταξύ των περιφεριών με ακτίνες *r* και *r+dr*, (διαφορικός επίπεδος δακτύλιος), ως συνάρτηση του *r*. (γ) Επαναλάβετε τα ερωτήματα (α) και (β) για την περίπτωση του όγκου *V* μίας σφαίρας με ακτίνα *r* και για τον όγκο του διαφορικού φλοιού με εσωτερική ακτίνα *r* και εξωτερική ακτίνα *r+dr* .

(α) $S(r) = \pi r^2$

(β) $dS = \left(\pi r^2\right)' dr \quad \Rightarrow \quad dS = 2\pi r dr$

(γ) $V=\dfrac{4}{3}\pi^3 \quad \Rightarrow \quad dV=\left(\dfrac{4}{3}\pi^3\right)' dr \quad \Rightarrow \quad dV=4\pi r^2 dr$

Οι έννοιες του διαφορικού φλοιού και του διαφορικού δακτυλίου θα είναι χρήσιμες στην ενότητα του στερεού σώματος, για τον υπολογισμό των συντεταγμένων του κέντρου μάζας και την ροπής αδράνειας στερεών σωμάτων με διαφορετικά γεωμετρικά σχήματα και, ενδεχομένως, με μη ομοιογενή κυκνότητα μάζας.

Διαφορικές Εξισώσεις

Η μελέτη των φυσικών φαινομένων γίνεται συνήθως με μία διαδικασία η οποία θα μπορούσε να διατυπωθεί ως ερώτημα της μορφής: «όταν μεταβάλλεται, κατά δA, ένα φυσικό μέγεθος A, τότε ποιά είναι η αντίστοιχη μεταβολή δB, ενός μεγέθους B;». Αυτές οι μεταβολές μπορεί να αντιστοιχούν σε ένα χρονικό διάστημα (δt) ή σε μία μετατόπιση (δr) στο χώρο. Όταν αυτές οι μεταβολές τείνουν στο μηδέν, τότε αναφερόμαστε σε διαφορικές μεταβολές ή διαφορικά $\left(d\mathrm{A}, d\mathrm{B}, dt, dr, \ldots\right)$, οπότε μελετώντας τα όρια των κατάλληλων πηλίκων, διατυπώνουμε τους νόμους που διέπουν τα φυσικά φαινόμενα με τη μορφή σχέσεων ανάμεσα στις κατάλληλες παραγώγους, π.χ. $\left(d\mathrm{A}/dt, d\mathrm{B}/dt, d\mathrm{A}/dx, d\mathrm{A}/dy, d\mathrm{A}/dz, d\mathrm{B}/dx, \ldots\right)$.

Οι σχέσεις ανάμεσα στις παραγώγους (χωρικές ή χρονικές) των φυσικών μεγεθών που χαρακτηρίζουν ένα φυσικό φαινόμενο και εκφράζουν το νόμο που διέπει αυτό το φαινόμενο είναι ένα παράδειγμα διαφορικής εξίσωσης. Γενικά, <u>μία διαφορική εξίσωση (ΔΕ) είναι μία σχέση ανάμεσα σε μία συνάρτηση και στις παραγώγους αυτής της συνάρτησης, η γενική μορφή της οποίας είναι $F\left(f, f', f'', \ldots, t\right)=0$, όπου *t*: η ανεξάρτητη μεταβλητή, $f=f\left(t\right)$: η συνάρτηση που αναζητείται ως λύσης της διαφορικής, $f', f'', \ldots$, οι παράγωγοι πρώτης και ανώτερων τάξεων της *f*, και *F*: δεδομένη σχέση μεταξύ των $\left(f, f', f'', \ldots, t\right)$</u>. Μία ΔΕ χαρακτηρίζεται ως ΔΕ πρώτης (δεύτερης, τρίτης, ... κλπ.) τάξης ανάλογα με το αν η ανώτερη παράγωγος, (της υπο εύρεση συνάρτησης), που εμφανίζεται στη ΔΕ, είναι η παράγωγος πρώτης (δεύτερης, τρίτης, ... κλπ.) τάξης, αντίστοιχα. Επίσης, μία ΔΕ χαρακτηρίζεται ως γραμμική ΔΕ αν στους όρους της περιλαμβάνονται, είτε η συνάρτηση είτε οι παραγωγοί της, αλλά όχι ανώτερες δυνάμεις της συνάρτησης ή των παραγώγων της, ούτε γινόμενα των παραγώγων ή γινόμενα της συνάρτησης με παραγώγους.

Όταν ένα φυσικό μέγεθος, π.χ., y, είναι συνάρτηση ενός μόνο μεγέθους, $y=f\left(x\right)$, τότε η διαφορική εξίσωση που περιγράφει τον φυσικό νόμο θα περιλαμβάνει τις συνήθεις παραγώγους της *f* ως προς *x*, οπότε χαρακτηρίζεται ως συνήθης ΔΕ.

Όταν ένα φυσικό μέγεθος, π.χ., y, είναι συνάρτηση περισσοτέρων από ένα μεγεθών, $y=f\left(x_1, x_2, x_3, \ldots\right)$, τότε η διαφορική εξίσωση που περιγράφει τον φυσικό νόμο θα περιλαμβάνει τις μερικές παραγώγους της *f* ως προς τα $\left(x_1, x_2, x_3, \ldots\right)$, δηλ. τις $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_3}$, ... Αυτή η ΔΕ χαρακτηρίζεται ως ΔΕ με μερικές παραγώγους.

Στο μεγαλύτερο μέρος του μαθήματος Φυσική-Ι θα μας απασχολήσουν συνήθεις ΔΕ. Η επίλυση μίας συνήθους ΔΕ συνίσταται στην εύρεση της κατάλληλης συνάρτησης $f=f\left(x\right)$, η οποία, μαζί με τις παραγώγους της, ικανοποιεί την δεδομένη ΔΕ. Η επίλυση μίας ΔΕ ισοδυναμεί με μία διαδικασία ολοκλήρωσης, δεδομένου ότι, από μία σχέση μεταξύ παραγώγων, οδηγεί στον υπολογισμό της συνάρτησης που ικανοποιεί τη ΔΕ. Επειδή, σε κάθε διαδικασία υπολογισμού ενός αορίστου ολοκληρώματος, υπεισέρχεται μία σταθερά ολοκλήρωσης, είναι φανερό ότι, ανάλογα με την τάξη της ΔΕ, θα έχουμε και αντίστοιχο αριθμό σταθερών ολοκλήρωσης (1-σταθερά για ΔΕ-πρώτης-τάξης, 2-σταθερές για ΔΕ-δεύτερης-τάξης, ..., κ.ο.κ.). Οι τιμές των σταθερών ολοκλήρωσης προσδιορίζονται με τη βοήθεια των λεγόμενων αρχικών συνθηκών. Για μία ΔΕ *n*-στής τάξης, οι *n*-τον-αριθμό σταθερές ολοκλήρωσης προσδιορίζονται με τη βοήθεια των *n*-τον-αριθμό αρχικών συνθηκών και συγκεριμένα από την γνώση της τιμής που έχει η συνάρτηση και οι *n*-1 πρώτες παράγωγοί της, σε συγκεκριμένα σημεία του πεδίου ορισμού τους: $y_{o,o} = f\left(x = x_0\right)$, $y_{o,1} = \left(df / dx\right)_{x=x_0}$, $y_{o,2} = \left(d^2 f / dx^2\right)_{x=x_0}$, ... , $y_{o,n-1} = \left(d^{n-1} f / dx^{n-1}\right)_{x=x_0}$.

Παράδειγμα 1.4.1 Ένα κινητό κινείται σε ευθεία γραμμή με σταθερή επιτάχυνση a (ανεξάρτητη από τη θέση και το χρόνο). (α) Διατυπώστε αυτό το δεδομένο με τη μορφή διαφορικής εξίσωσης. (β) Χαρακτηρίστε αυτή τη διαφορική εξίσωση και επιλύστε την, υπολογίζοντας την ταχύτητα και την θέση του κινητού ως συναρτήσεις του χρόνου. Προσδιορίστε τις σταθερές ολοκλήρωσης, γνωρίζοντας ότι τη χρονική στιγμή $t = t_0$, το κινητό βρίσκεται στη θέση x_0 και έχει ταχύτητα υ_0. (γ) Αν αναζητούσαμε τη ΔΕ που περιγράφει την ταχύτητα ως συνάρτηση της θέσης, πως θα μπορούσε να γραφεί αυτή η ΔΕ και ποιά θα ήταν η λύση της;

Απάντηση

(α) *Διατύπωση της ΔΕ και χαρακτηρισμός*. Θεωρούμε ότι το κινητό κινείται κατά μήκος του άξονα *x*. Οπότε, το δεδομένο που διατυπώνεται στην ερώτηση περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d\upsilon_x}{dt} = a, \qquad \text{ισοδύναμα} \qquad \frac{d\upsilon_x}{dt} = a \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = a \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} = a$$

Άρα η ΔΕ είναι μία συνήθης γραμμική διαφορική, πρώτης τάξης ως προς τη συνάρτηση της ταχύτητας $\upsilon_x(t)$, και δεύτερης τάξης ως προς τη συνάρτηση της θέσης $x = x\left(t\right)$.

(β) *Επίλυση*. Επιλύουμε την πρώτης-τάξης ΔΕ ως προς την συνάρτηση της ταχύτητας

$$\frac{d\upsilon_x}{dt} = a \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{d\upsilon_x}{dt}\right)dt = adt \quad \Rightarrow \quad d\upsilon_x = adt \quad \Rightarrow \quad \int d\upsilon_x = \int adt$$

Η ολοκλήρωση της τελικής σχέσης μπορεί να γίνει είτε μέσω ορισμένου ολοκληρώματος είτε μέσω αορίστου ολοκληρώματος.

(β_1) *Επίλυση μέσω ορισμένου ολοκληρώματος*. Καθορίζουμε τα <u>όρια</u> σε κάθε ολοκλήρωμα, σύμφωνα με τις <u>αρχικές συνθήκες</u> χρόνου-ταχύτητας, δηλ.,

$$\int_{\upsilon_0}^{\upsilon_x} d\upsilon_x = \int_{t_o}^{t} adt \quad \Rightarrow \quad \upsilon_x - \upsilon_0 = a\left(t - t_0\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\upsilon_x = \upsilon_0 + a\left(t - t_0\right)}$$

Γράφουμε την ταχύτητα με τη μορφή παραγώγου της απόστασης ως προς το χρόνο και επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία, δηλ.,

$$\upsilon_x = \upsilon_0 + a\left(t - t_0\right) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \upsilon_0 + a\left(t - t_0\right) \Rightarrow \left(\frac{dx}{dt}dt\right) = \left(\upsilon_0 + a\left(t - t_0\right)\right)dt \Rightarrow dx = \left(\upsilon_0 + a\left(t - t_0\right)\right)dt$$

$$dx = \left(\upsilon_0 + a\left(t - t_0\right)\right)dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t}\left(\upsilon_0 + a\left(t - t_0\right)\right)dt \Rightarrow x - x_0 = \upsilon_0\left(t - t_0\right) + a\int_{t_0}^{t}\left(t - t_0\right)dt$$

Οπότε, τελικά:

$$\boxed{x = x_0 + \upsilon_0\left(t - t_0\right) + \frac{1}{2}a\left(t - t_0\right)^2}$$

(β_2) *Επίλυση μέσω αορίστου ολοκληρώματος*. Υπολογίζουμε την παράγουσα συνάρτηση κάθε μιας από τις δύο ολοκληρωτέες ποσότητες των ολοκληρωμάτων. Επειδή οι παράγουσες συναρτήσεις υπολογίζονται με την προσέγγιση μία προσθετικής σταθεράς, ενσωματώνουμε αυτές τις δύο προσθετικές σταθερές σε μία <u>σταθερά ολοκλήρωσης</u> του αόριστου ολοκληρώματος, την οποία και προσδιορίζουμε μέσω <u>των αρχικών συνθηκών</u>, δηλ.,

$$d\upsilon_x = adt \quad \Rightarrow \quad \int d\upsilon_x = \int adt + C \quad \Rightarrow \quad \boxed{\upsilon_x = at + C_1}$$

Γράφουμε αυτό το αποτέλεσμα με τη μορφή διαφορικής εξίσωσης για τη συνάρτηση $x = x(t)$, και την ολοκληρώνουμε, δηλ.,

$$\upsilon_x = at + C_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = at + C_1 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)dt = (at + C_1)dt \quad \Rightarrow \quad dx = (at + C_1)dt$$

$$\int dx = \int (at + C_1)dt + C_2 \quad \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}at^2 + C_1 t + C_2}$$

Όπως φαίνεται, η πρώτης τάξης ΔΕ ως προς υ οδηγεί σε λύση με μία σταθερά ολοκλήρωσης, ενώ η δεύτερης τάξης ΔΕ ως προς x οδηγεί σε λύση με δύο σταθερές ολοκλήρωσης. Οι σταθερές ολοκλήρωσης C_1 και C_2 προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες, δηλ.,

$$\left.\begin{cases} \upsilon_x = at + C_1 \\ t = t_0 \Rightarrow \upsilon = \upsilon_0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \upsilon_0 = at_o + C_1 \Rightarrow \boxed{C_1 = \upsilon_0 - at_o}$$

Αντικαθιστώντας αυτή την τιμή, στην εξίσωση για τη συνάρτηση θέσης, και εφαρμόζοντας την αρχική συνθήκη θέσης, παίρνουμε

$$\left.\begin{cases} x = \frac{1}{2}at^2 + (\upsilon_0 - at_o)t + C_2 \\ t = t_0 \quad \Rightarrow \quad x = x_0 \end{cases}\right\} \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2}at_0^2 + (\upsilon_0 - at_o)t_0 + C_2 \Rightarrow \boxed{C_2 = x_0 - \frac{1}{2}at_0^2 - (\upsilon_0 - at_o)t_0}$$

Με βάση τις τιμές των σταθερών ολοκλήρωσης που υπολογίστηκαν, οι συναρτήσεις ταχύτητας και θέση, ως προς το χρόνο, λαμβάνουν την ίδια μορφή που προέκυψε από την ορισμένη ολοκλήρωση, δηλ.,

$$\boxed{\upsilon_x = \upsilon_0 + a(t - t_0)} \qquad \text{και} \qquad \boxed{x = x_0 + \upsilon_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2}$$

(γ) Αφού και η ταχύτητα και η θέση είναι συναρτήσεις του χρόνου, η συνάρτηση ταχύτητας-θέσης θα μπορούσε να προκύψει από τις δύο προηγούμενες εκφράσεις, ως προς τον χρόνο, με απαλοιφή του χρόνου μεταξύ τους. Ισοδύναμα, θα μπορούσαμε να γράψουμε

$$\frac{d\upsilon_x}{dt} = a \quad \Rightarrow \quad \frac{d\upsilon_x}{dx}\frac{dx}{dt} = a \quad \Rightarrow \quad \frac{d\upsilon_x}{dx}\upsilon_x = a \quad \Rightarrow \quad \upsilon_x\left(\frac{d\upsilon_x}{dx}\right)dx = adx$$

$$\upsilon_x d\upsilon_x = adx \quad \Rightarrow \quad \int_{\upsilon_0}^{\upsilon_x} \upsilon_x d\upsilon_x = \int_{x_0}^{x} adx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\left(\upsilon_x^2 - \upsilon_0^2\right) = a(x - x_0)$$

Και τελικά: $\boxed{\upsilon_x = \sqrt{\upsilon_0^2 + 2a(x - x_0)}}$

Η ίδια σχέση θα προέκυπτε και από την απαλοιφή του χρόνου (πιο συγκεκριμένα, του όρου $(t - t_0)$ από τις σχέσεις $\upsilon_x = \upsilon_x(t), \quad x = x(t)$.

Στην πορεία του μαθήματος θα έχουμε την ευκαιρία να αντιμετωπίσουμε συνήθεις γραμμικές ΔΕ πρώτης και δεύτερης τάξης σε προβλήματα κινηματικής και δυναμικής των σημειακών μαζών. Επίσης, στην ενότητα της εισαγωγής στην Κυματική, θα έχουμε την ευκαιρία να αντιμετωπίσουμε και ΔΕ με μερικές παραγώγους. Και στις δύο περιπτώσεις θα παρουσιαστούν μέθοδοι επίλυσης αυτών των ΔΕ, η αυστηρή μαθηματική ανάλυση των οποίων θα παρουστεί στα μαθήματα των μαθηματικών.

Ανάπτυγμα σε σειρά Taylor

Ένα χρήσιμο εργαλείο για μία συνάρτηση $y=f\left(x\right)$ η οποία είναι συνεχής και έχει καλά ορισμένες παραγώγους σε κάποιο διάστημα τιμών $\left(x_1,x_2\right)$, είναι το **ανάπτυγμα, σε σειρά Taylor**, της συνάρτησης αυτής στην γειτονιά ενός σημείου x_0 του πεδίου ορισμού της. Όπως αποδεικνύεται, ισχύει:

$$f\left(x\right)=f\left(x_0\right)+\frac{1}{1!}\left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0}\left(x-x_0\right)+\frac{1}{2!}\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_{x_0}\left(x-x_0\right)^2+\ldots+\frac{1}{n!}\left(\frac{d^nf}{dx^n}\right)_{x_0}\left(x-x_0\right)^n+\ldots,$$

όπου, το σύμβολο $n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot\left(n-1\right)\cdot n$, είναι το λεγόμενο "n-παραγοντικό".

Στην περίπτωση που το σημείο περί το οποίο γίνεται το ανάπτυγμα είναι το $x_0=0$, τότε το ανάπτυγμα είναι γνωστό και ως ανάπτυγμα ή σειρά Mclaurin, και έχει τη μορφή

$$f\left(x\right)=f\left(0\right)+\frac{1}{1!}\left(\frac{df}{dx}\right)_0 x+\frac{1}{2!}\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_0 x^2+\ldots+\frac{1}{n!}\left(\frac{d^nf}{dx^n}\right)_0 x^n+\ldots$$

Μία "πρόχειρη απόδειξη" (με την έννοια ότι παρακάμπτονται τα ζητήματα ελέγχου σύγκλισης, που θα εξεταστούν στα αντίστοιχα μαθήματα της Μαθηματικής Ανάλυσης), της τελευταίας σχέσης θα μπορούσε να είναι ως εξής:

Μπορούμε (?) να δείξουμε ότι μία συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής στο x_0=0, και έχει καλά ορισμένες παραγώγους στο ίδιο σημείο, αναπτύσεται σε ένα πολυωνυμικό άθροισμα της μορφής

$$f\left(x\right)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots\quad;$$

υπολογίζοντας τους συνετελεστές $a_0,a_1,a_2,\cdots a_n,\ldots$.

"Απόδειξη":

Αν ίσχυε το παραπάνω ανάπτυγμα, τότε:

$$\boxed{f\left(0\right)=a_0}$$

$$f'\left(x\right)=a_1+2a_2x+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots\Rightarrow f'\left(0\right)=a_1\Rightarrow\boxed{f'\left(0\right)=1\cdot a_1}$$

$$f''\left(x\right)=2a_2+3\cdot2a_3x\ldots+n\left(n-1\right)a_nx^{n-2}+\ldots\Rightarrow f''\left(0\right)=2a_2\Rightarrow\boxed{f''\left(0\right)=1\cdot2\cdot a_2}$$

Συνεχίζοντας με την ίδιο τρόπο, και επιλύοντας ως προς τα $a_0,a_1,a_2,\ldots$ έχουμε:

$$a_0=f\left(0\right),\quad a_1=\frac{1}{1!}\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=0},\quad a_2=\frac{1}{2!}\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_{x=0},\ldots\quad a_n=\frac{1}{n!}\left(\frac{d^nf}{dx^n}\right)_{x=0},\ldots$$

Η σημασία του αναπτύγματος Taylor έγκειται στο γεγονός ότι οποιαδήποτε συνάρτηση (άρρητη, τριγωνομετρική, εκθετική, λογαριθμική,..., ή συνδυασμός τους), η οποία έχει τα χαρακτηριστικά συνέχειας και παραγωγισημότητας που αναφέρονται στην αρχή αυτής της ενότητας, μπορεί να γραφεί ως πολυωνυμικό ανάπτυγμα όρων με θετικούς ακέραιους εκθέτες.

Η χρησιμότητα ενός τέτοιου αναπτύγματος οφείλεται στο γεγονός ότι, σε αρκετές περιπτώσεις, ενδιαφερόμαστε για τιμές του *x* πολύ κοντά στο x_0, οπότε ο n-στός όρος μπορεί να γραφεί με τη μορφή $\left(x-x_0\right)^n=x_0^n\left(\frac{x}{x_0}-1\right)^n$, όπου $\left\|\left(\frac{x}{x_0}-1\right)\right\|<<1$, και, επομένως, οι όροι ανώτερων τάξεων συνεισφέρων ολοένα και λιγότερο στον υπολογισμό του αναπτύγματος, αν μάλιστα ληφθεί υπόψην και ο παράγοντας $n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot\left(n-1\right)\cdot n\ n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot\left(n-1\right)\cdot n$, στον παρονομαστή του αντίστοιχου όρου. Οπότε, ανάλογα και με τις απαιτήσεις ακρίβειας στον υπολογισμό του αντίστοιχου μεγέθους που προκύπτει από το ανάπτυγμα, μπορούμε να διακόψουμε το ανάπτυγμα σε κάποιον όρο, συνήθως πρώτης ή δεύτερης τάξης.

Χρήσιμα αναπτύγματα σε σειρές Taylor, στην κατάλληλη περιοχή:

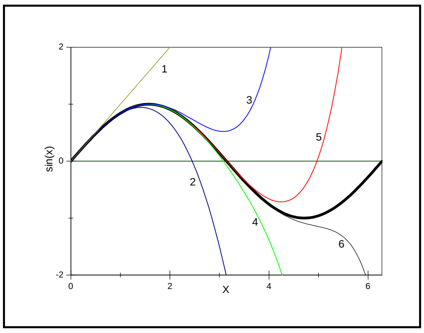
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots, \quad \forall x. \qquad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots.., \quad -1 < x \le 1$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots, \forall x. \qquad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots, \forall x.$$

$$\arcsin(x) = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\frac{x^7}{7} + \ldots, \qquad |x| < 1$$

$$\arctan(x) = \begin{cases} x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \ldots, & |x| < 1, \\ \pm\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{3x^3} - \dfrac{1}{5x^5} + \ldots, & [+ : x \ge 1, \quad - : x \le -1] \end{cases}$$

Παράδειγμα 1.2.2.2 (α) Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η διαδοχική αθροιστική συνεισφορά των 6 πρώτων όρων στο ανάπτυγμα Taylor της τριγωνομετρικής συνάρτησης $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$. Οι αριθμοί που αναγράφονται στο σχήμα δηλώνουν το πλήθος των όρων (1→1, 2→1+2, 3→1+2+3, ...) στο οποίο έχει φθάσει το άθροισμα των διαδοχικών όρων στο ανάπτυγμα Taylor



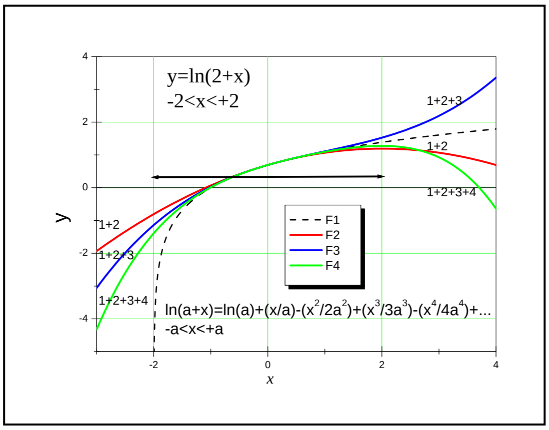
Διερευνήστε, με ανάλογο τρόπο, μέχρι πόσους όρους του αναπτύγματος $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$ πρέπει να κρατήστε, έτσι ώστε το ανάπτυγμα να αναπαριστά ικανοποιητικά την αντίστοιχη συνάρτηση μέσα στην πρώτη περίοδο $(0 \le x \le 2\pi)$ [Ικανοποιητική αναπαράσταση ≡ σωστός αριθμός ακρότατων και μηδενισμών στην πρώτη περίοδο].

(β) Υπολογίστε το ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης $f(x) = \ln(a+x)$ και το διάστημα της μεταβλητής x για την οποία η αντίστοιχη σειρά συγκλίνει.

$$f(x) = \ln(a+x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{(a+x)} \Rightarrow f'(x=0) = \frac{1}{a}, \qquad f''(x) = \frac{-1}{(a+x)^2} \Rightarrow f''(x=0) = -\frac{1}{a^2},$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(a+x)^3} \Rightarrow f'''(x=0) = \frac{2}{a^3}, \quad f^{(4)}(x=0) = -\frac{2\cdot 3}{a^4}$$

$$\ln(a+x) = \ln(a) + \left(\frac{x}{a}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{x}{a}\right)^4 + \ldots$$



Κριτήρια σύγκλισης της εναλλασσόμενης σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$, (α) $\left(u_n = \frac{y^n}{n}, \quad y = \frac{x}{a}\right)$:

(α) $|u_{n+1}| \le |u_n|$ για $n \ge 1$, και (β) $\lim_{n\to\infty}|u_n| = 0$

(α) $$|u_{n+1}| \le |u_n| \Rightarrow \frac{|y^{n+1}|}{n+1} \le \frac{|y^n|}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |y| \le \frac{n+1}{n}, \{n \to \infty \Rightarrow y \le 1\}$$

(β) $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n| = 0 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{|y^n|}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0 \quad\Rightarrow\quad |y| < 1$.

Άρα $\left|\dfrac{x}{a}\right| < 1 \Rightarrow \boxed{-a < x < +a}$

Στο παραπάνω σχήμα έχει σχεδιαστεί η συνάρτηση $\ln(a+x)$ για $a=2$, (εστιγμένη γραμμή), και το ανάπτυγμα Taylor, δύο (1+2), τριών (1+2+3) και τεσσάτων (1+2+3+4) όρων, όπου φαίνεται ότι, για $-a < x < +a$, το ανάπτυγμα συγκλίνει, ενώ , έξω από αυτή την περιοχή το ανάπτυγμα αποκλίνει και μάλιστα με διαφορετικό τρόπο, (ανάλογα με την τάξη προσέγγισης). Για $x < -a$ η συνάρτηση $\ln(a+x)$ δεν ορίζεται παρ' ότι το ανάπτυγμα συγκλίνει με την αύξηση των όρων της σειράς. Για $x > a$ η συνάρτηση $\ln(a+x)$ ορίζεται αλλά το ανάπτυγμα αποκλίνει και μάλιστα πιο έντονα με την αύξηση των όρων της σειράς. Το παράδειγμα αυτό δείχνει την χρησιμότητα του αναπτύγματος Taylor μίας συνάρτησης, αλλά και την προσοχή με την οποία πρέπει να εφαρμόζεται.

Παράδειγμα 1.2.2.3 Είναι γνωστό ότι η δυναμική ενέργεια λόγω βαρύτητας, ανάμεσα σε ένα σφαιρικό σώμα μάζας M και ακτίνας R και σε ένα άλλο σώμα μάζας m, και μικρών διαστάσεων (σε σχέση με το R), ώστε να μπορεί να θωρηθεί σημειακό, το οποίο απέχει απόσταση r (r>R) από το σώμα M, είναι της μορφής $E_\Delta = -G\dfrac{Mm}{r}$. Δείξτε ότι για μικρές μετατοπίσεις *h* (*h*<<*R*) του m, πάνω από την επιφάνεια του σφαιρικού σώματος, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η δυναμική ενέργεια λόγω βαρύτητας μεταβάλλεται γραμμικά με την απόσταση *h* από την επιφάνεια, και υπολογίστε τον συντελεστή της γραμμικής εξάρτησης.

$$E_\Delta(r) = -G\frac{Mm}{r} \Rightarrow E_\Delta(R+h) = -G\frac{Mm}{R+h} = -G\frac{Mm}{R(1+h/R)} = -G\frac{Mm}{R}(1+h/R)^{-1}$$

Αναπτύσσουμε τη συνάρτηση $f(x) = (1+x)^{-1}$, $(x = h/R)$ σε σειρά Taylor, γύρω από το σημείο $h=0$, οπότε:

$$f(0)=1, \quad f'(0)=-1, \quad f''(0)=(-1)\cdot(-2), \quad f'''(0)=(-1)\cdot(-2)\cdot(-3), \quad ...$$

Επομένως η σειρά Taylor γράφεται $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$. Άρα, σε «πρώτη τάξη» ως προς την μεταβλητή h/R, έχουμε

$$E_\Delta(R+h) = -G\frac{Mm}{R}(1+h/R)^{-1} \approx -G\frac{Mm}{R}(1-h/R) = -G\frac{Mm}{R} + G\frac{Mm}{R}\frac{h}{R} = -G\frac{Mm}{R} + G\frac{M}{R^2}mh$$

Η τελευταία σχέση γράφεται

$$E_\Delta(R+h) \approx -G\frac{Mm}{R} + m\left(G\frac{M}{R^2}\right)h = E_\Delta(R) + mgh, \qquad g = \left(G\frac{M}{R^2}\right)$$

Επομένως, για μικρές μετατοπίσεις $h\,(h << R)$, πάνω από την επιφάνεια της Γης, η μεταβολή της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας είναι, σε πολύ καλή προσέγγιση, γραμμική συνάρτηση του ύψους.

[Δείξτε, ανεξάρτητα από το ανάπτυγμα σε σειρά Taylor, ότι, όταν $h << R$, τότε $\Delta E_\Delta = E_\Delta(R+h) - E_\Delta(R) \approx mgh$, και βρείτε το g].

Κανόνας του L' Hôpital

Ένα άλλο χρήσιμο μαθηματικό εργαλείο είναι ο κανόνας του L' Hôpital. Στην περίπτωση δύο συναρτήσεων, οι οποίες σε ένα συγκεκριμένο σημείο x_0, του πεδίου ορισμού τους, έχουν όριο είτε και οι δύο το μηδέν, είτε και οι δύο το άπειρο, οπότε το πηλίκο τους δεν είναι καλά ορισμένο σε αυτό το σημείο :

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Αν} & \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A, & \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B \\ \text{και, είτε} & A=B=0, & \text{ή} \quad A=B=\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Παράδειγμα 1.2.2.4 Σε ορισμένα φαινόμενα συμβολής από μία σειράς αρμονικές ταλαντώσεις με ίδια συχνότητα και σταθερή διαφορά φάσης δ, μεταξύ τους, το αποτέλεσμα υπολογίζεται με τη μορφή $y_{o\lambda}=A\left(\frac{\sin\delta}{\delta}\right)$. Ποια είναι η τιμή του $y_{o\lambda}$ όταν $\delta\to 0$

[Εργαζόμαστε είτε με τον κανόνα του L’ Hôpital, είτε με το ανάπτυγμα σε σειρά Taylor του sinδ.]

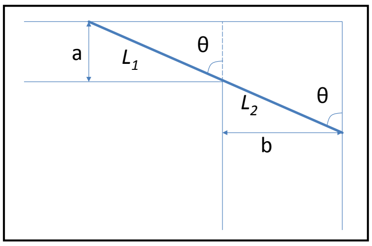
Τοπικά ακρότατα συνάρτησης

Ιδιαίτερα χρήσιμη, σε ορισμένες περιπτώσεις είναι μελέτη των ακρότατων μίας συνάρτησης. Τα σημεία $x=x_i$ όπου μία συνάρτηση $y=f(x)$ λαμβάνει τιμές τοπικά μέγιστες ή ελάχιστες, σε σχέση με τις τιμές των γειτονικών σημείων του πεδίου ορισμού λέγονται σημεία ακρότατων της συνάρτησης. Για τη μελέτη των ακρότατων μίας συνάρτησης ισχύει:

Αν συμβαίνει $f'(x_0)=f''(x_0)=f'''(x_0)=\ldots f^{(2p-1)}(x_0)=0, \quad \text{και} \quad f^{(2p)}(x_0)\neq 0$

τότε (i) $f^{(2p)}(x_0)<0 \Rightarrow f(x)$: τοπικό μέγιστο στο $x=x_0$

(i) $f^{(2p)}(x_0)>0 \Rightarrow f(x)$: τοπικό ελάχιστο στο $x=x_0$



Παράδειγμα 1.2.2.5 Ποιό είναι το μεγαλύτερο μήκος οριζόντιας ράβδου που μπορεί να περάσει από την ορθή γωνία ενός οριζόντιου διαδρόμου, του οποίου τα δύο σκέλη έχουν πλάτη a και b, αντίστοιχα.

Παρ’ ότι το ζητούμενο είναι το μέγιστο μήκος που διέρχεται από τη γωνία, θα πρέπει να σκεφτούμε ότι η συνθήκη οριακής διέλευσης αντιστοιχεί σε ένα ευθύγραμμο τμήμα το οποίο ακουμπά στην εσωτερική ακμή και στις δύο εξωτερικές πλευρές, όπως στο σχήμα. Καθώς μία τέτοια ευθεία μεταβάλει τον προσανατολισμό της (γωνία θ) μεταβάλλεται και το μήκος της, άρα αρκεί να υπολογίσουμε το μήκος συναρτήσει της γωνίας και να υπολογίσουμε το ελάχιστο (γιατί ;)

$$L=\frac{a}{\cos\theta}+\frac{b}{\sin\theta}\Rightarrow\frac{dL}{d\theta}=\frac{a\sin^3\theta-b\cos^3\theta}{\cos^2\theta\sin^2\theta}$$

Επομένως, $$\frac{dL}{d\theta}=0\Rightarrow\frac{a\sin^3\theta-b\cos^3\theta}{\cos^2\theta\sin^2\theta}=0\Rightarrow a\sin^3\theta=b\cos^3\theta\Rightarrow\tan\theta=\sqrt[3]{b/a}$$

Μπορείτε να δείξετε ότι $\left(\frac{d^2L}{d\theta^2}\right)_{\theta=\arctan\sqrt[3]{b/a}}>0$, άρα το ακρότατο είναι ελάχιστο, και η τιμή του ελαχίστου είναι $L_{\min}=L\left(\theta=\arctan\sqrt[3]{b/a}\right)\Rightarrow\boxed{L_{\min}=\left(a^{2/3}+b^{2/3}\right)^{3/2}}$

Μιγαδικοί Αριθμοί

Αν ορίσουμε ως <u>φανταστική μονάδα</u> το σύμβολο «i», με την ιδιότητα $(\pm i)^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad \pm i = \sqrt{-1}$, τότε ονομάζουμε <u>φανταστικό αριθμό</u> κάθε παράσταση της μορφής, $A = \pm i\, y$, όπου y: πραγματικός αριθμός. Κατ' αναλογία με τον «άξονα-x» των πραγματικών αριθμών, ορίζουμε τον «άξονα-y» των φανταστικών αριθμών, τον οποίον χαράσσουμε κάθετα στον άξονα-x, και στον οποίον διατάσσουμε του φανταστικούς αριθμούς iy.

Ορίζουμε ως <u>μιγαδικό αριθμό</u> $\tilde{z}$, κάθε παράσταση που γράφεται ως άθροισμα ενός πραγματικού και ενός φανταστικού αριθμού, $\tilde{z} = x + iy$. Ο αριθμός αυτός μπορεί να αναπαρασταθεί στο επίπεδο των αξόνων x και y, (που αναφέραμε προηγουμένως, και το οποίο ονομάζεται <u>μιγαδικό επίπεδο</u>), ως σημείο με συντεταγμένες τα x και y, που ονομάζονται πραγματικό, $x = \mathrm{Real}\{\tilde{z}\}$, και φανταστικό, $y = \mathrm{Im}\{\tilde{z}\}$, μέρος του μιγαδικού αριθμού, αντίστοιχα.

Ορίζουμε, επίσης, ως συζυγή μιγαδικό $\tilde{z}^*$ κάθε μιγαδικού αριθμού $\tilde{z} = x + iy$, τον μιγαδικό αριθμό $\tilde{z}^* = x - iy$.

Ορίσουμε ως <u>μέτρο του μιγαδικού αριθμού</u> $\tilde{z}$ τον πραγματικό αριθμό $z = |\tilde{z}| = \sqrt{\tilde{z}\tilde{z}^*} = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ορίζουμε επίσης ως <u>φάση του μιγαδικού αριθμού</u> $\tilde{z}$ την γωνία φ που σχηματίζει, με τον άξονα των πραγματικών αριθμών x, η ευθεία που ενώνει την αρχή του μιγαδικού επιπέδου (x=0, y=0) με τον μιγαδικό αριθμό, για την οποία ισχύει, $\tan\varphi = \dfrac{y}{x} \Rightarrow \varphi = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$, ισοδύναμα: $\sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \dfrac{y}{|\tilde{z}|} \Rightarrow \varphi = \arcsin\left(\dfrac{y}{|\tilde{z}|}\right)$.

Για δύο μιγαδικούς αριθμούς $\tilde{z}_1 = x_1 + iy_1$ και $\tilde{z}_2 = x_2 + iy_2$, ορίζονται οι εξής αλγεβρικές πράξεις

Πρόσθεση: $\tilde{z}_1 \pm \tilde{z}_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$

Πολλαπλασιασμός: $\tilde{z}_1\tilde{z}_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_2y_1 + x_1y_2)$

Δαίρεση: $\dfrac{\tilde{z}_1}{\tilde{z}_2} = \dfrac{\tilde{z}_1}{\tilde{z}_2}\dfrac{\tilde{z}_2^*}{\tilde{z}_2^*} = \dfrac{\tilde{z}_1\tilde{z}_2^*}{|z_2|^2} = \dfrac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$

Γενικεύοντας τις προηγούμενες σχέσεις μπορούμε να ορίσουμε όλες τις δυνάμεις $\tilde{z}^n$ του μιγαδικού αριθμού $\tilde{z} = x + iy$, οπότε, για κάθε συνάρτηση $f = f(x)$ που αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά, μπορούμε να ορίσουμε την αντίστοιχη συνάρτηση $f(\tilde{z})$, της μιγαδικής μεταβλητής $\tilde{z}$, μέσω της αντίστοιχης δυναμοσειράς. Με αυτήν την έννοια, ορίζουμε την εκθετική συνάρτηση $\exp(\tilde{z}) = 1 + \tilde{z} + \dfrac{\tilde{z}^2}{2!} + \dfrac{\tilde{z}^3}{3!} + \dfrac{\tilde{z}^4}{4!} + \ldots$

η οποία διατηρεί τη χαρακτηριστική της ιδιότητα, να παραμένει αμετάβλητη μετά από παραγώγιση.

Όταν το όρισμα της προηγούμενης εκθετικής συνάρτησης είναι καθαρά φανταστικό, $\tilde{z} = ia$, τότε, αντικαθιστώντας, αναπτύσσοντας και ομαδοποιώντας του όρους των άρτιων δυνάμεων, που είναι πραγματικοί εναλλασσόμενου προσήμου, και τους όρους των περιττών δυνάμεων, που είναι φανταστικοί, επίσης εναλλασσόμενου προσήμου, παίρνουμε την σχέση που είναι γνωστή ως «τύπος του Euler», σύμφωνα με τον οποίον

$$e^{ia} = \cos(a) + i\sin(a) \tag{1}$$

Αλλά, αν $\tilde{z} = x + iy$, τότε

$$\tilde{z} = x + iy = |\tilde{z}|\cos(\phi) + i|\tilde{z}|\sin(\phi) = |\tilde{z}|\left(\cos(\phi) + i\sin(\phi)\right) \Rightarrow \boxed{\tilde{z} = |\tilde{z}|e^{i\varphi}} \tag{2}$$

Εκφράζοντας με αυτό τον τρόπο τους μιγαδικούς αριθμούς, διαπιστώνουμε ότι οι πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης μεταξύ των μιγαδικών $\tilde{z}_1 = A_1 e^{i\varphi_1}$ και $\tilde{z}_2 = A_2 e^{i\varphi_2}$ αριθμών μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$\tilde{z}_1 \tilde{z}_2 = A_1 e^{i\varphi_1} A_2 e^{i\varphi_2} = A_1 A_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \qquad \textbf{(3)}$$

$$\tilde{z}_1 / \tilde{z}_2 = \left(A_1 e^{i\varphi_1}\right) / \left(A_2 e^{i\varphi_2}\right) = \left(A_1 / A_2\right) e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} \qquad (4)$$

Επίσης, συνδυάζοντας τις σχέσεις

$$e^{ia} = \cos(a) + i\sin(a), \qquad \text{και} \qquad e^{-ia} = \cos(-a) + i\sin(-a) = \cos(a) - i\sin(a)$$

Παίρνουμε τις σχέσεις $\cos(a) = \dfrac{e^{ia} + e^{-ia}}{2}$, $\quad \sin(a) = \dfrac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i}$. (5 α,β)

Μερικές παράγωγοι συνάρτησης με πολλές ανεξάρτητες μεταβλητές

Σε πολλά φυσικά προβλήματα ενδιαφέρει η εξάρτηση ενός φυσικού μεγέθους από περισσότερες από μία ανεξάρτητες μεταβλητές. Για παράδειγμα, σε ένα πρόβλημα Δυναμικής της ατμόσφαιρας (μετεωρολογίας) ενδιαφέρει η πίεσης της ατμόσφαιρας, ή η θερμοκρασία της ατμόσφαιρας, ως συναρτήσεις της θέσης και του χρόνου, δηλ., $P = P(x, y, z, t)$, ή $T = T(x, y, z, t)$. Σε αυτές τις περιπτώσεις είναι χρήσιμο το μέγεθος της μερικής παραγώγου μίας συνάρτησης, που δίνει ένα μέτρο του ρυθμού μεταβολής της συνάρτησης ανά στοιχειώδη μεταβολή μίας από τις ανεξάρτητες μεταβλητές, όταν οι υπόλοιπες ανεξάρτητες μεταβλητές παραμένουν σταθερές, δηλ.,

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x + \Delta x, y, z, t) - P(x, y, z, t)}{\Delta x}$$

και παρόμοια για τις υπόλοιπες μερικές παραγώγους $\dfrac{\partial P}{\partial y}, \dfrac{\partial P}{\partial z}, \dfrac{\partial P}{\partial t}$.

Διαφορικός Τελεστής «ανάδελτα»

Όταν μία βαθμωτή συνάρτηση εξαρτάται από περισσότερες της μίας μεταβλητές, ορίζονται οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης όπως προηγουμένως. Ως παράδειγμα, μπορούμε να σκεπτόμαστε την Θερμοκαρασία ως συνάρτηση της θέσης (για μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή, προκειμένου να αποφύγουμε, προς στιγμήν, την εξάρτηση από το χρόνο), $T = T(x, y, z, t_0) = f(x, y, z)$, (ή, ισοδύναμα, όταν η T δεν εξαρτάται από το χρόνο, αλλά μόνο από τη θέση). Σε αυτές τις περιπτώσεις έχει νόημα η ερώτηση, «πόσο μεταβάλλεται η τιμή της *f*, όταν μετακινηθούμε από το σημείο $\vec{r} = (x, y, z)$ στο σημείο $\vec{r} + d\vec{r} = (x + dx, y + dy, z + dz)$».

Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα δίνεται με τη βοήθεια του ολικού διαφορικού της συνάρτησης: $df = \dfrac{\partial f}{\partial x} dx + \dfrac{\partial f}{\partial y} dy + \dfrac{\partial f}{\partial z} dz$. Επειδή το διαφορικό μέγεθος $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$ είναι ένα διανυσματικό μέγεθος, και έχοντας την εμπειρία του εσωτερικού γινομένου διανυσματικών μεγεθών, είναι εύλογο το ερώτημα αν το μέγεθος $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}\right)$ είναι και αυτό ένα διανυσματικό μέγεθος. Αποδεικνύεται ότι, πράγματι, αυτό το μέγεθος, σε μετασχηματισμούς στροφής ενός συστήματος αναφοράς, μετασχηματίζεται ως διανυσματικό μέγεθος, στο οποίο δίνεται το όνομα «βαθμίδα της *f*» ή grad*f* και συμβολίζεται $\vec{\nabla} f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}\right)$, οπότε μπορούμε να γράψουμε: $df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \cdot \left(dx \; dy \; dz \right) = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r}$. Στη μαθηματική γλώσσα λέγεται ότι το ανάδελτα: $\vec{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ είνα ένας διανυσματικός διαφορικός τελεστής, η λειτουργία του οποίου σε μία βαθμωτή συνάρτηση $f = f\left(x, y, z\right)$ έχει ορισθεί όπως προηγουμένως.

Όπως θα δούμε στην ενότητα των διατηρητικών δυνάμεων, στις περιπτώσεις που η δυναμική ενέργεια U, (που έχει μία σημειακή μάζα όταν βρίσκεται μέσα σε κατάλληλο πεδίο δυνάμεων), είναι καλά ορισμένη συνάρτηση της θέσης, $U = U\left(x, y, z\right)$, τότε αποδεικνύεται ότι η δύναμη που αισθάνεται η σημειακή μάζα σχετίζεται με τις μερικές παραγώγους της U,

$$\left(F_x, F_y, F_z\right) = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right) \Rightarrow \vec{F} = -\vec{\nabla} U$$

Θα δούμε, επίσης, ότι, υπάρχουν περιπτώσεις όπου έχει ενδιαφέρον η μελέτη διανυσματικών συναρτήσεων πολλών μεταβλητών, όπως, π.χ., η ταχύτητα των μορίων ενός ρευστού, του οποίου η κατάσταση κίνησης δεν εξαρτάται από το χρόνο, αλλά είναι συνάρτηση της θέσης (μόνιμη μη-ομοιογενής ροή), $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}\left(\vec{r}\right) = \left[\upsilon_x\left(x, y, z\right), \upsilon_y\left(x, y, z\right), \upsilon_z\left(x, y, z\right)\right]$. Σε αυτές τις περιπτώσεις, διαπιστώνεται ότι έχει ενδιαφέρον και νόημα το ερώτημα του πως θα λειτουργούσε ο «τελεστής ανάδελτα» στην διανυσματική συνάρτηση $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}\left(\vec{r}\right)$. Επειδή, τώρα, και ο τελεστής αλλά και η συνάρτηση είναι διανυσματική, αποδεικνύεται ότι η δράση του τελεστή στη συνάρτηση μπορεί να γίνει με τη μορφή είτε εσωτερικού γινομένου, είτε εξωτερικού δινομένου, και τα αντίστοιχα αποτελέσματα ονομάζονται «απόκλιση» και «στροβιλισμός», και η αναπαράστασή τους, στο σύστημα των καρτεσιανών συνεταγμένων είναι:

«απόκλιση»: $$div\vec{\upsilon} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\upsilon} \equiv \frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon_y}{\partial y} + \frac{\partial \upsilon_z}{\partial z},$$

και

«στροβιλισμός»: $$rot\vec{\upsilon} = \vec{\nabla} \times \vec{\upsilon} \equiv \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \upsilon_x & \upsilon_y & \upsilon_z \end{vmatrix},$$

Η ορίζουσα του στροβιλισμού αναπτύσσεται όπως μία ορίζουσα (3x3) αλλά έτσι ώστε οι διαφορικοί τελεστές των μερικών παραγώγων να «βλέπουν από δεξιά τους» τις προς παραγώγιση συναρτήσεις, επομένως:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\upsilon} \equiv \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \upsilon_x & \upsilon_y & \upsilon_z \end{vmatrix} = \hat{x}\left(\frac{\partial \upsilon_z}{\partial y} - \frac{\partial \upsilon_y}{\partial z} \right) - \hat{y}\left(\frac{\partial \upsilon_z}{\partial x} - \frac{\partial \upsilon_x}{\partial z} \right) + \hat{z}\left(\frac{\partial \upsilon_y}{\partial x} - \frac{\partial \upsilon_x}{\partial y} \right)$$

Για τη φυσική σημασία και τη χρησιμότητα της απόκλισης και του στροβιλισμού μίας διανυσματικής συνάρτησης θα αναφερθούμε σε επόμενες ενότητες του μαθήματος, όπου θα παρουσιαστούν, επίσης, και περισσότερο γενικοί ορισμού των δύο τελεστών, από τους οποίους θα προκύπτει πιο εύλογα το φυσικό τους νόημα, και οι οποίοι (ορισμοί) είναι ανεξάρτητοι από το συγκεκριμένο κάθε φορά (π.χ., καρτεσιανό) σύστημα συντεταγμένων.