ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Πρόχειρες Σημειώσεις για τις ανάγκες του μαθήματος
«Φυσική – Ι (Μηχανική και Εισαγωγή στην Κυματική)»
της Σχολής Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών του ΕΜΠ

Ιωάννη Σ. Ράπτη
Καθηγητή ΣΕΜΦΕ - ΕΜΠ

Αθήνα, 2021

Η "Φυσική Ι" διδάσκεται στους φοιτητές του πρώτου εξαμήνου της Σχολής Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών (ΣΗΜΜΥ) του ΕΜΠ. Το μάθημα αποτελεί μία εισαγωγή και συνοπτική παρουσίαση των θεμελιωδών εννοιών της Κλασικής Μηχανικής, με βάση τις εξισώσεις του Νεύτωνα και τους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου, καθώς και μία εισαγωγή στα συστήματα συζευγμένων ταλαντωτών και στην εξίσωση κύματος στο 1-διάστατο συνεχές ελαστικό μέσο.

Η ύλη του μαθήματος θα μπορούσε να κατανεμηθεί στις παρακάτω ενότητες αν και, όπως σε όλα θέματα Φυσικής, στην ανάλυση κάπως σύνθετων ρεαλιστικών προβλημάτων, η χρήση εννοιών από διαφορετικές ενότητες όχι μόνο είναι αναπόφευκτη αλλά, σε πολλές περιπτώσεις, επιβάλλεται.

1. Εισαγωγή - Μαθηματικά Εργαλεία
2. Νόμοι του Νεύτωνα – Εφαρμογές των Ν. Νεύτωνα με διαφορετικά είδη δυνάμεων
3. Εφαρμογές των Ν. Νεύτωνα σε κλειστά συστήματα οι συνιστώσες των οποίων ανταλλάσσουν μάζα-ορμή
4. Συστήματα αναφοράς: Μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου
5. Μη-αδρανειακά συστήματα αναφοράς – Ψευδοδυνάμεις
6. Διατήρηση της ενέργειας – Διατηρητικές δυνάμεις
7. Διατήρηση της ορμής και Εφαρμογές
8. Διατήρηση της στροφορμής και Εφαρμογές
9. Ο αρμονικός ταλαντωτής, απόσβεση, εξωτερική διέγερση, συντονισμός
10. Στοιχειώδης δυναμική των στερεών σωμάτων
11. Δυνάμεις αντίστροφου τετραγώνου
12. Συζευγμένοι Ταλαντωτές. Κανονικοί Τρόποι Ταλάντωσης
13. Εξίσωση κύματος στο 1-διάστατο συνεχές ελαστικό μέσο (Οδεύοντα και στάσιμα κύματα)

1. Εισαγωγή – Θεμελιώδη και Παράγωγα Μεγέθη – Μαθηματικά Εργαλεία

1.1 Εισαγωγή

Η Κλασική Μηχανική ασχολείται με την μελέτη της κίνησης (με την γενικότερη έννοια, στατική, κινηματική, δυναμική) των υλικών σωμάτων, είτε ως υλικών σημείων είτε ως εκτεταμένων στερεών σωμάτων. Για την μελέτη αυτή χρησιμοποιούνται δύο θεμελιώδεις έννοιες, η έννοια του χώρου και η έννοια του χρόνου. Στο πλαίσιο που έθεσε ο Newton με το έργο του «*Philosophie naturalis principia mathematica*» (1687) (Μαθηματικές αρχές φυσικής φιλοσοφίας), οι δύο αυτές έννοιες ορίζονται με τον εξής γενικό τρόπο: «*Ο απόλυτος, αληθής και μαθηματικός χρόνος, ως εκ της φύσεώς του, ρέει με τον ίδιο ρυθμό, ανεξάρτητα από οτιδήποτε εξωτερικό ως προς αυτόν και ονομάζεται, επίσης, διάρκεια. Ο απόλυτος χώρος, ως εκ της φύσεώς του, ανεξάρτητα από οτιδήποτε εξωτερικό ως προς αυτόν, παραμένει πάντα ο ίδιος και ακίνητος*».

Οι έννοιες αυτές διατήρησαν αυτά τα χαρακτηριστικά, για περισσότερο από δύο αιώνες, παρά την κριτική που υπέστησαν, κυρίως προς το τέλος αυτής της περιόδου, μεταξύ άλλων από τον Γερμανό φυσικό Ernst Mach (1838 – 1916), (που θεωρείται ότι επηρέασε την οπτική του Albert Einstein), με το βιβλίο του «Η Επιστήμη της Μηχανικής: Ένας Κριτικός και Ιστορικός Απολογισμός της Ανάπτυξής της» (1907). Το νόημα αυτών των δύο εννοιών, η ανεξαρτησία μεταξύ τους καθώς και από τα σώματα που υπάρχουν στο χώρο και από την κίνηση αυτών των σωμάτων, καθώς ρέει ο χρόνος, θα αλλάξουν ριζικά, στο πλαίσιο της Ειδικής και της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας που εισάγει ο Einstein με τις εργασίες του από το 1905 και το 1917. Στοιχεία αυτής της νέας οπτικής θα παρουσιαστούν εισαγωγικά στις ενότητες της Ειδικής Σχετικότητας, (οι οποίες θα αναρτηθούν σε αυτές τις Σημειώσεις, για λόγους πληρότητας, αν και δεν αποτελούν μέρος της ύλης αυτού του μαθήματος).

Στο πλαίσιο της κλασικής μηχανικής, θεωρούμε ότι τα υλικά συστήματα (σημειακές μάζες, ή εκτεταμένα σώματα) αλληλεπιδρούν μεταξύ τους με δυνάμεις, οι οποίες αποτελούν την αιτία για την εξέλιξη της δυναμικής συμπεριφοράς αυτών των συστημάτων. Όσον αφορά τις δυνάμεις, σύμφωνα με τις σύγχρονες αντιλήψεις, υπάρχουν τέσσερις θεμελιώδεις δυνάμεις στη φύση, τα κλασικά χαρακτηριστικά των οποίων φαίνονται στο πίνακα που ακολουθεί. Στην στήλη «Ισχύς», αυτού του Πίνακα, καταχωρούνται τυπικές τιμές έντασης των αντίστοιχων δυνάμεων (ως τάξεις μεγέθους), όπου έχει ληφθεί αυθαίρετα ως μονάδα έντασης εκείνη της Ηλεκτρομαγνητικής δύναμης. Στο πλαίσιο της Κβαντικής Φυσικής έχει επιτευχθεί η ενοποιημένη περιγραφή της Ασθενούς και της Ηλεκτρομαγνητικής δύναμης (από τους Glashow, Salam και Weinberg, βραβείος Nobel 1979). Στο πλαίσιο της λεγόμενης Μεγάλης Ενοποιημένης Θεωρίας (GUT) επιδιώκεται η ενοποίηση και της Ισχυρής αλληλεπίδρασης, ενώ με τις θεωρίες Χορδών επιχειρείται και η ενοποίηση της κβαντικής βαρύτητας σε ενιαίο πλαίσιο με τις υπόλοιπες αλληλεπιδράσεις.

Πίνακας 1. Οι τέσσερις γνωστές αλληλεπιδράσεις, στην φύση.

	Δύναμη	**Ισχύς**	**Εμβέλεια**	**Φαινόμενα – Εκδηλώσεις**
1	Ισχυρή	10^2	$\sim 10^{-15}$ m	Σταθερότητα πυρήνων
2	Ηλεκτρομαγνητική	1	∞ $(\sim 1/r^2)$	Ατομική-μοριακή δομή της ύλης Βιολογικές δομές – Οργανισμοί
3	Ασθενής	10^{-4}	$< 10^{-17}$ m	Πυρηνική διάσπαση
4	Βαρυτική	10^{-36}	∞ $(\sim 1/r^2)$	Σημερινή Δομή του Σύμπαντος σε μεγάλη κλίμακα

Στο πλαίσιο αυτού του μαθήματος θα μας απασχολήσει η βαρυτική δύναμη, αλλά και κάποιες δυνάμεις, (όπως οι δυνάμεις τριβής, ή, οι τάσεις νημάτων), που, παρά την φαινομενολογική του περιγραφή ως δυνάμεων που ασκούνται μεταξύ μαζών, είναι, (κατά την ακριβή τους περιγραφή, και με βάση το σημερινό επίπεδο γνώσεων), δυνάμεις ηλεκτρομαγνητικού χαρακτήρα, που αφορούν την αλληλεπίδραση είτε των επιφανειακών μοριακών συγκροτημάτων ανάμεσα σε δύο επιφάνειες, (για την περίπτωση της τριβής), είτε την αλληλεπίδραση διαδοχικών μοριακών συγκροτημάτων στο συμπαγές τμήμα ενός υλικού, (για την περίπτωση των δυνάμεων που «μεταφέρονται» μέσω τάσης νημάτων.

1.2 Θεμελιώδη και Παράγωγα Μεγέθη

Για τις δύο βασικές έννοιες που αποτελούν το πλαίσιο της Νευτώνιας Μηχανικής, το χώρο και το χρόνο, αλλά και για κάποιες επιπλέον έννοιες, που αποτελούν τα βασικά μεγέθη με τη βοήθεια των οποίων περιγράφεται η συμπεριφορά των μαζών (σημειακών και εκτεταμένων) κατά τις μεταξύ τους αλληλεπιδράσεις, (όπως, π.χ., η μάζα και η δύναμη), χρησιμοποιούνται συγκεκριμένες μονάδες μέτρησης, προκειμένου να μπορεί να ποσοτικοποιηθεί η μεταξύ τους σχέση, κατά την μελέτη των μηχανικών φαινομένων.

Επίσης, ένα σημαντικό ερώτημα που αφορά τα μεγέθη που εμπλέκονται στη μελέτη των φυσικών φαινομένων είναι το ερώτημα σχετικά με το ποια από αυτά θα πρέπει να θεωρηθούν ως θεμελιώδη μεγέθη, με βάση τα οποία θα ορισθούν τα υπόλοιπα μεγέθη.

Με βάση τη θεμελιώδη σχέση της Μηχανικής $\vec{F} = m\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$, η οποία συσχετίζει τα μεγέθη, «Δύναμη», «Μάζα», «Διάνυσμα Θέσης» και «Χρόνος», είναι φανερό ότι έχοντας ορίσει τα τρία από αυτά τα μεγέθη ως θεμελιώδη, καθώς και τις μονάδες τους, μπορούμε να υπολογίσουμε την μονάδα του τετάρτου μεγέθους και, με κατάλληλες μετρήσεις των τριών θεμελιωδών μεγεθών σε ένα δυναμικό φαινόμενο, να υπολογίσουμε και την τιμή του τέταρτου μεγέθους.

Ως προς τα δύο αυτά ερωτήματα, (α) των θεμελιωδών μεγεθών και (β) των μονάδων του, επί τη βάσει των οποίων θα ορισθούν όλα τα «παράγωγα» μεγέθη και οι αντίστοιχες μονάδες, η κατάσταση που ισχύει αυτή τη στιγμή αποτυπώνεται στον πίνακα που ακολουθεί, από το National Institute of Standards and Technology (NIST) του Υπουργείου Εμπορίου των Ηνωμένων Πολιτειών.

		https://physics.nist.gov/cuu/Units/current.html (2020)
Length	**meter**	The meter, symbol m, is the SI unit of length. It is defined by taking the fixed numerical value of the speed of light in vacuum *c* to be 299 792 458 when expressed in the unit m s^{-1}, where the second is defined in terms of $\Delta\nu_{Cs}$.
Mass	**kilogram**	The kilogram, symbol kg, is the SI unit of mass. It is defined by taking the fixed numerical value of the Planck constant *h* to be 6.626 070 15 × 10^{-34} when expressed in the unit J s, which is equal to kg m^2 s^{-1}, where the meter and the second are defined in terms of *c* and $\Delta\nu_{Cs}$.
Time	**second**	The second, symbol s, is the SI unit of time. It is defined by taking the fixed numerical value of the cesium frequency $\Delta\nu_{Cs}$, the unperturbed ground-state hyperfine transition frequency of the cesium 133 atom, to be 9 192 631 770 when expressed in the unit Hz, which is equal to s^{-1}.
Electric current	**ampere**	The ampere, symbol A, is the SI unit of electric current. It is defined by taking the fixed numerical value of the elementary charge *e* to be 1.602 176 634 x 10^{-19} when expressed in the unit C, which is equal to A s, where the second is defined in terms of $\Delta\nu_{Cs}$.
Thermo dynamic temperat ure	**kelvin**	The kelvin, symbol K, is the SI unit of thermodynamic temperature. It is defined by taking the fixed numerical value of the Boltzmann constant *k* to be 1.380 649 x 10^{-23} when expressed in the unit J K^{-1}, which is equal to kg m^2 s^{-2} K^{-1}, where the kilogram, meter and second are defined in terms of *h*, *c* and $\Delta\nu_{Cs}$.

Amount of substance	**mole**	The mole, symbol mol, is the SI unit of amount of substance. One mole contains exactly 6.022 140 76 x 10^{23} elementary entities. This number is the fixed numerical value of the Avogadro constant, N_A, when expressed in the unit mol^{-1} and is called the Avogadro number. The amount of substance, symbol *n*, of a system is a measure of the number of specified elementary entities. An elementary entity may be an atom, a molecule, an ion, an electron, any other particle or specified group of particles.
Luminous intensity	**candela**	The candela, symbol cd, is the SI unit of luminous intensity in a given direction. It is defined by taking the fixed numerical value of the luminous efficacy of monochromatic radiation of frequency 540 x 10^{12} Hz, K_{cd}, to be 683 when expressed in the unit lm W^{-1}, which is equal to cd sr W^{-1}, or cd sr kg^{-1} m^{-2} s^3, where the kilogram, meter and second are defined in terms of *h*, *c* and $\Delta\nu_{Cs}$.

Στον πίνακα αυτόν τα τρία πρώτα μεγέθη (μήκος, μάζα, χρόνος) είναι τα θεμελιώδη μεγέθη της Κλασσικής Μηχανικής, και ακολουθούν τα θεμελιώδη μεγέθη του ηλεκτρισμού, της θερμοδυναμικής, της φυσικοχημείας και της φωτομετρίας.

Μία πρώτη αίσθηση για την μεγάλη επίδραση, ακόμη και στην καθημερινή ζωή, στη σημερινή εποχή, της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας (για την οποία, παρότι δεν περιλαμβάνεται στην ύλη του μαθήματος, θα αναρτηθούν συνοπτικές σημειώσεις για τους ενδιαφερόμενους), μπορεί να έχει κανείς και από το γεγονός ότι η μονάδα μήκους (m) ορίζεται με βάση την ταχύτητα *c* του φωτός, θεωρούμενη ως παγκόσμια σταθερά. Επίσης, είναι ενδεικτικό της σημασίας που έχει πλέον η Κβαντική Φυσική στις τεχνολογικές εφαρμογές αλλά και στην καθημερινή ζωή, το γεγονός ότι η μάζα ορίζεται πλέον μέσω της παγκόσμιας σταθεράς *h* του Planck, που αντιστοιχεί στο κβάντο της δράσης ή στο κβάντο της στροφορμής, (όπως θα μάθετε στο μάθημα «Κυματική και Κβαντική Φυσική», του 4ου εξαμήνου). Οπως προκύπτει αντίστοιχα από τη θερμοδυναμική, που μελετά τα αποτελέσματα από τη στατιστική συμπεριφορά συστημάτων μεγάλου αριθμού σωματιδίων, μία άλλη παγκόσμια σταθερά, η σταθερά *k* του Boltzmann, αντιστοιχεί στο κβάντο της πληροφορίας[1].

Μαθηματικά Εργαλεία

1.2.1 Είδη μεγεθών

Τα τρία θεμελιώδη μεγέθη της Μηχανικής (χρόνος, μήκος, μάζα) ανήκουν στα λεγόμενα **βαθμωτά (ή, μονόμετρα) μεγέθη**, για την καταγραφή των οποίων αρκεί ένας αριθμός και η αντίστοιχη μονάδα. Άλλα βαθμωτά μεγέθη είναι, η Θερμοκρασία, η Υδροστατική πίεση, η πυκνότητα μάζας. Μία άλλη κατηγορία αφορά σε μεγέθη για την πλήρη καταγραφή των οποίων, εκτός από μία τιμή και τη μονάδα της, χρειάζεται και η καταγραφή μίας κατεύθυνσης στο χώρο. Τέτοια μεγέθη είναι η θέση, η ταχύτητα, η επιτάχυνση, η δύναμη. Αυτού το είδους τα μεγέθη τα ονομάζουμε **διανυσματικά μεγέθη**, και η πλήρης περιγραφή τους απαιτεί τη γνώση του μέτρου του μεγέθους και της κατεύθυνσής τους, ή, εναλλακτικά, τριών αριθμών (με τη μονάδα τους), τις οποίες ονομάζουμε **συνιστώσες του διανύσματος**. Πέραν των βαθμωτών και των διανυσματικών μεγεθών υπάρχουν μεγέθη που απαιτούν, για τον πλήρη προσδιορισμό τους, περισσότερους αριθμούς, και τα οποία ονομάζουμε **τανυστές** (ή, τανυστικά μεγέθη) διαφόρων τάξεων. Μάλιστα, τα βαθμωτά και τα διανυσματικά μεγέθη μπορούν, στο πλαίσιο των

[1] Για τη σημασία των παγκόσμιων σταθερών και τη σχέση τους με τις φυσικές θεωρίες, βλ. ένα ενδιαφέρον βιβλιαράκι, Gilles Cohen-Tannoudji “*Le constants universelles*”, Hachette, 1991, [Ελλην. Μετάφραση, «*Οι Παγκόσμιες Σταθερές*», Εκδ. ΚΑΤΟΠΤΡΟ 1993, Σειρά: Ορίζοντες της Επιστήμης].

τανυστικών μεγεθών, να θεωρηθούν ως τανυστικά μεγέθη, μηδενικής και πρώτης τάξης, αντίστοιχα. Με αυτήν την οπτική των τανυστών διαφορετικής τάξης, η τανυστική τάξη κάθε φυσικού μεγέθους καθορίζεται από τον τρόπο που το μέγεθος αυτό μετασχηματίζεται, όταν προκαλέσουμε μία στροφή του συστήματος αναφοράς του χώρου, γύρω από έναν τυχαίο άξονα.

Έτσι, αν $\tilde{R} = \left(R_{ij}\right) = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix}$ είναι ένας πίνακας στροφής με τη βοήθεια του οποίου περιγράφεται η στροφή ενός συστήματος αναφοράς $\left(x, y, z\right)$ σε ένα νέο σύστημα αναφοράς $\left(x', y', z'\right)$, έτσι ώστε:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow x'_i = \sum_j R_{ij} x_j ,$$

τότε, τα φυσικά μεγέθη P χαρακτηρίζονται ως τανυστές κάποιας τάξης, ανάλογα με τον κανόνα μετασχηματισμού τους από το ένα σύστημα στο άλλο, ως εξής:

τανυστής μηδενικής τάξης (**βαθμωτό**): $P' = P$, (π.χ., πυκνότητα, θερμοκρασία, υγρασία, …)

τανυστής πρώτης τάξης (**διάνυσμα**): $P'_i = \sum_j R_{ij} P_j$, (π.χ., δύναμη, ορμή, στροφορμή,…)

τανυστής δεύτερης τάξης (“**τανυστής**”): $P'_{ij} = \sum_{kl} R_{ik} R_{jl} P_{kl}$, (π.χ., αγωγιμότητα, πολωσιμότητα,..)

κ.ο.κ.

Διανύσματα

Ανεξάρτητα από τον μαθηματικό ορισμό ενός διανυσματικού μεγέθους μέσω του νόμου μετασχηματισμού του (βλ. προηγούμενη παράγραφο), για μία εισαγωγή στην έννοια του διανύσματος, μπορεί κανείς να θεωρήσει τον τρόπο που προσδιορίζουμε την θέση ενός σημείου στο χώρο, δίνοντας τις τρείς συντεταγμένες του, ως προς ένα τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων (*x*,*y*,*z*), οι οποίοι έχουν κοινή αρχή (π.χ., στο $O \equiv \left(x=0, y=0, z=0\right)$, γράφοντας $\vec{r} = \left(x, y, z\right)$, ή ισοδύναμα $\vec{r} = \hat{x}x + \hat{y}y + \hat{z}z$, όπου $\hat{x} = \left(1,0,0\right)$, $\hat{y} = \left(0,1,0\right)$ και $\hat{z} = \left(0,0,1\right)$ τα τρία μοναδιαία διανύσματα (δηλ., διανύσματα με μοναδιαίο μέτρο) κατά μήκος των τριών αξόνων, $\left(x, y, z\right)$, αντίστοιχα. Ισοδύναμα, συμβολίζονται ως $\hat{x} \equiv \hat{i}$, $\hat{y} \equiv \hat{j}$, $\hat{z} \equiv \hat{k}$, με τη “γωνιώδη καμπύλη” να αντικαθιστά το βέλος “$\rightarrow$”, που χρησιμοποιείται για τα μη-μοναδιαία διανύσματα.Τα μοναδιαία διανύσματα έχουν μοναδιαίο μέτρο ανεξάρτητα από το χρόνο (ή τη θέση) που υπολογίζονται. Η κατεύθυνσή τους μπορεί γενικά να εξαρτάται από τη θέση ή το χρόνο, (όπως θα δούμε στις καμπυλόγραμμες συντεταγμένες ή στα μη-αδρανειακά συστήματα αναφοράς, αντίστοιχα). Για τα συγκεκριμένα μοναδιαία των «καρτεσιανών συντεταγμένων», (*x*,*y*,*z*), και το μέτρο και η κατεύθυνσή τους είναι ανεξάρτητη του χρόνου και της θέσης

Για έναν γενικό διάνυσμα $\vec{A} = \left(A_1, A_2, A_3\right) = \left(\hat{i}A_1 + \hat{j}A_2 + \hat{k}A_3\right) = \left(A_x, A_y, A_z\right) = \left(\hat{x}A_x + \hat{y}A_y + \hat{z}A_z\right)$, ορίζουμε ως **μέτρο του διανύσματος** το: $A = \left|\vec{A}\right| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^3}$.

Ως μοναδιαίο διάνυσμα, παράλληλο στο διάνυσμα $\vec{A} = \left(A_1, A_2, A_3\right)$, ορίζουμε το διάνυσμα $\hat{A} = \vec{A}/\left|\vec{A}\right| = \vec{A}/A = \left(A_1/A, A_2/A, A_3/A\right)$ που προκύπτει διαιρώντας το $\vec{A}$ με το μέτρο του, και το οποίο, (ως εκ τούτου), έχει μοναδιαίο μέτρο.

Επίσης, δύο διανύσματα είναι ίσα όταν οι αντίστοιχες συνιστώσες τους είναι ίσες:

$$\vec{A}=\vec{B} \Leftrightarrow \left(A_1, A_2, A_3\right)=\left(B_1, B_2, B_3\right) \Leftrightarrow \left(A_1=B_1, A_2=B_2, A_3=B_3\right)$$

Για το γραμμικό συνδυασμό διανυσμάτων ισχύει: $a\vec{A}\pm b\vec{B}=(aA_1\pm bB_1, aA_2\pm bB_2, aA_3\pm bB_3)$, οπότε, επίσης ισχύει: $\left(\vec{A}+\vec{B}\right)=\left(\vec{B}+\vec{A}\right)$ και $\left(\vec{A}+\vec{B}\right)+\vec{C}=\vec{A}+\left(\vec{B}+\vec{C}\right)$

Ορίζουμε, μεταξύ άλλων, τις εξής πράξεις ανάμεσα σε διανύσματα:

Εσωτερικό (βαθμωτό) γινόμενο $\vec{A}\cdot\vec{B}=(A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3)=\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\cos\left(\vec{A},\vec{B}\right)$

<u>Φυσικό νόημα του εσωτερικού γινομένου</u>: το γινόμενο του μέτρου ενός διανύσματος επί την προβολή του άλλου ως προς αυτό, και αντίστροφα.
Για το εσωτερικό γινόμενο ισχύουν οι ιδιότητες:

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}$$

$$\vec{A}\cdot\left(b\vec{B}\pm c\vec{C}\right)=b\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\pm c\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)$$

$$a\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)=\left(a\vec{A}\right)\cdot\vec{B}=\vec{A}\cdot\left(a\vec{B}\right)=\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)a$$

Από την άποψη των εφαρμογών στη φυσική, το εσωτερικό γινόμενο είναι τα κατάλληλο μαθηματικό εργαλείο για τον υπολογισμό, π.χ., του στοιχειώδους έργου μίας δύναμης $\vec{F}=\vec{F}\left(\vec{r}\right)$, η οποία μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της από τη θέση $\vec{r}$ στη θέση $\vec{r}+d\vec{r}$, οπότε : $dW=\vec{F}\left(\vec{r}\right)\cdot d\vec{r}$. Όπως θα δούμε στην αντίστοιχη ενότητα, ολοκληρώνοντας κατάλληλα μπορούμε να υπολογίσουμε το συνολικό έργο.

Εξωτερικό (διανυσματικό) γινόμενο: $\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\end{vmatrix}=\hat{n}\left(\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\right)\sin\left(\vec{A},\vec{B}\right)$,

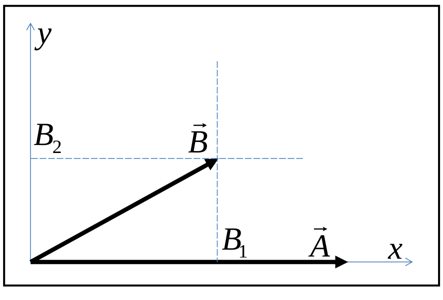
όπου <u>$\hat{n}$: μοναδιαίο διάνυσμα, κάθετο στο επίπεδο των $\left(\vec{A},\vec{B}\right)$, και με φορά τέτοια ώστε, αν μία δεξιόστροφη βίδα, με άξονα κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα διανύσματα $\left(\vec{A},\vec{B}\right)$, περιστραφεί έτσι ώστε να φέρει το $\vec{A}$ να συμπέσει με το $\vec{B}$, τότε να προχωρά κατά τη διεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος $\hat{n}$</u>,

και

$$\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\end{vmatrix}=\hat{i}\begin{vmatrix}A_2 & A_3\\ B_2 & B_3\end{vmatrix}-\hat{j}\begin{vmatrix}A_1 & A_3\\ B_1 & B_3\end{vmatrix}+\hat{k}\begin{vmatrix}A_1 & A_2\\ B_1 & B_2\end{vmatrix}=$$

$$=\hat{i}\left(A_2B_3-A_3B_2\right)-\hat{j}\left(A_1B_3-A_3B_1\right)+\hat{k}\left(A_1B_2-A_2B_1\right)$$

$$=\hat{i}\left(A_2B_3-A_3B_2\right)+\hat{j}\left(A_3B_1-A_1B_3\right)+\hat{k}\left(A_1B_2-A_2B_1\right)$$

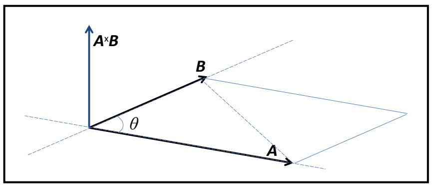


Μία "Απόδειξη" του δεύτερου μέρους των σχέσεων ορισμού του εσωτερικού και του εξωτερικού γινομένου μπορούμε να έχουμε ως εξής:
Αν έχουμε δύο μη-παράλληλα διανύσματα $\vec{A},\vec{B}$, τότε μπορούμε να ορίσουμε το επίπεδο *x-y* να συμπίπτει με το επίπεδο που ορίζουν τα δύο διανύσματα και ο άξονας *x* να συμπίπτει με τη διεύθυνση του διανύσματος $\vec{A}$, έτσι:

$\vec{A}=\left(A_1,0,0\right),\quad \vec{B}=\left(B_1,B_2,0\right)$. Οπότε:

Εσωτερικό γινόμενο: $\vec{A}\cdot\vec{B}=(A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3)=A_1B_1=\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\cos\left(\vec{A},\vec{B}\right)$

Εξωτερικό γινόμενο: $\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ A_1 & 0 & 0\\ B_1 & B_2 & 0\end{vmatrix}=\hat{k}\,A_1B_2=\hat{k}\left(\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\right)\sin\left(\vec{A},\vec{B}\right)$



<u>Φυσικό νόημα του εξωτερικού γινομένου</u>: ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα δύο διανύσματα $\vec{A}$ και $\hat{B}$, με φορά αυτήν προς την οποία προχωρά μία δεξιόστροφη βίδα (μέ άξονα καθετον στα διανύσματα $\vec{A}$ και $\hat{B}$) όταν περιστραφεί έτσι ώστε να στρέψει το $\vec{A}$ παράλληλα στο $\hat{B}$. Το μέτρο του εξωτερικού γινομένου είναι ίσο με το διπλάσιο εμβαδό ενός τριγώνου που ορίζεται από τα δύο διανύσματα $\vec{A}$ και $\hat{B}$, (ισοδύναμα, ίσο με το εμβαδό του παραλληλογράμμου που ορίζεται από τα διανύσματα $\vec{A}$ και $\hat{B}$).

Για το εξωτερικό γινόμενο ισχύει: $\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$

Επίσης ισχύουν οι ιδιότητες :

$\vec{A}\times\left(b\vec{B}\pm c\vec{C}\right)=b\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\pm c\left(\vec{A}\times\vec{C}\right),\qquad a\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\left(a\vec{A}\right)\times\vec{B}=\vec{A}\times\left(a\vec{B}\right)=\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)a$

$\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\vec{B}\cdot\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)-\vec{C}\cdot\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)$ (χρήσιμος μνημονικός κανόνας «abc» = «bac-cab”)

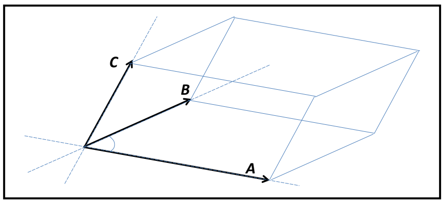
$\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)\neq\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\times\vec{C}\cdot$

Από την άποψη των εφαρμογών στη φυσική, το εξωτερικό γινόμενο είναι τα κατάλληλο μαθηματικό εργαλείο για τον υπολογισμό, π.χ., της ροπής μίας δύναμης, ως προς κάποιο σημείο αναφοράς, $\vec{N}=\vec{r}\times\vec{F}$, αλλά και της στροφορμής σωματιδίου, που βρίσκεται στη θέση $\vec{r}$ και έχει ορμή $\vec{p}$, ως προς κάποιο σύστημα αναφοράς: $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$

Με βάση τα προηγούμενα μπορεί να ορισθεί και το **τριπλό βαθμωτό γινόμενο** $\vec{C}\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)$, το οποίο, σύμφωνα με τους ορισμούς του εσωτερικού και του εξωτερικού γινομένου που προηγούνται, είναι ίσο με:

$$\vec{C}\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\begin{vmatrix}C_1 & C_2 & C_3\\ A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\end{vmatrix}$$

Δεδομένου ότι το εξωτερικό γινόμενο $\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)$ έχει μέτρο ίσο με το εμβαδόν S του



παραλληλογράμμου που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{A}$ και $\hat{B}$, μπορούμε να γράψουμε $\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\hat{n}S$, όπου $\hat{n}$ το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετα σε αυτό το παραλληλόγραμμο. Άρα $\vec{C}\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\vec{C}\cdot\hat{n}S$, αλλά $\vec{C}\cdot\hat{n}$ είναι το ύψος του παραλληλεπιπέδου, που ορίζουν τα τρία διανύσματα, ως προς τη βάση που ορίζουν τα $\vec{A}$ και $\hat{B}$. Επομένως, το τριπλό βαθμωτό γινόμενο είναι ένα μονόμετρο μέγεθος η απόλυτη τιμή του οποίου είναι ίση με τον όγκο του παραλληλεπιπέδου που ορίζουν τα τρία διανύσματα $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$. Το πρόσημο του τριπλού βαθμωτού γινομένου είναι θετικό ή αρνητικό ανάλογα με το αν τα τρία διανύσματα σχηματίζουν δεξιόστροφο ή αριστερόστροφο σύστημα.

Μπορεί να αποδειχτεί ότι: $\vec{C}\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\vec{B}\cdot\left(\vec{C}\times\vec{A}\right)$ (μνημονικός κανόνας: η κυκλική εναλλαγή των διανυσμάτων στο τριπλό βαθμωτό γινόμενο αφήνει αναλλοίωτο το αποτέλεσμα, με την προϋπόθεση ότι δεν αλλάζουν οι σχετικές θέσεις των γινομένων και των παρανθέσεων). [Παρατήρηση: από το γεγονός ότι το αποτέλεσμα είναι βαθμωτό, προκύπτει ότι, ακόμη και αν έλλειπαν οι παρενθέσεις, η ιεραχία των πράξεων είναι καλά ορισμένη]

Διανυσματικές συναρτήσεις μίας βαθμωτής μεταβλητής

Ένα διανυσματικό μέγεθος $\vec{F}$ λέμε ότι είναι διανυσματική συνάρτηση μίας βαθμωτής μεταβλητής *u*, όταν σε κάθε τιμή του *u* μπορεί να αντιστοιχηθεί με μοναδικό τρόπο μία τιμή του $\vec{F}$, και γράφουμε $\vec{F}=\vec{F}(u)$. Ως παραδείγματα διανυσματικών συναρτήσεων με μία ανεξάρτητη βαθμωτή μεταβλητή μπορούμε να αναφέρουμε, την θέση μίας σημειακής μάζας ως συνάρτηση του χρόνου $\vec{r}=\vec{r}(t)$, την ταχύτητά του ως συνάρτηση του χρόνου $\vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}(t)$, που μας δείχνουν, για κάθε χρονική στιγμή, που βρίσκεται και με ποια διανυσματική ταχύτητα κινείται η σημειακή μάζα.

Ισοδύναμα, γράφουμε $\vec{r}=\vec{r}(t)=\hat{x}\,x(t)+\hat{y}\,y(t)+\hat{z}\,z(t)$, όπου οι συναρτήσεις: $x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t)$, είναι βαθμωτές συναρτήσεις μίας βαθμωτής μεταβλητής, με τις γνωστές ιδιότητες.

Παράγωγος διανυσματικής συνάρτησης

Ορίζουμε την παράγωγο της διανυσματικής συνάρτησης $\vec{A}(u)=\left(\hat{i}A_1(u)+\hat{j}A_2(u)+\hat{k}A_3(u)\right)$ μέσω των συνιστωσών της, δηλ., $\dfrac{d\vec{A}}{du}=\lim\limits_{\Delta u\to o}\dfrac{\vec{A}(u+\Delta u)-\vec{A}(u)}{\Delta u}=\left(\hat{i}\,\dfrac{dA_1}{du}+\hat{j}\,\dfrac{dA_2}{du}+\hat{k}\,\dfrac{dA_3}{du}\right)$

Παραδείγματα θα δοθούν στη συνέχεια, με αφορμή το διάνυσμα της ταχύτητας ως χρονικής παραγώγου του διανύμσατος θέσης ενός κινητού.

Παράγωγοι γινομένου διανυσματικών (ή/και βαθμωτών) συναρτήσεων μίας βαθμωτής μεταβλητής

Θεωρούμε διανυσματικές και βαθμωτές συναρτήσεις μίας βαθμωτής μεταβλητής (u):

Βαθμωτή συνάρτηση βαθμωτής μεταβλητής, $\eta=\eta(u)$, (π.χ., $\varphi=\varphi(t)$: η γωνία, ως συνάρτηση του χρόνου, για ένα κινητό που ακολουθεί κυκλική τροχιά, $s=s(t)$: το μήκος μία διαδρομής, ως συνάρτηση του χρόνου, για ένα κινητό που ακολουθεί μία γενικά καμπυλόγραμμη τροχιά, $\rho=\rho(T)$: η πυκνότητα ενός στερεού, υγρού, ή αερίου, ως συνάρτηση της θερμοκρασίας)

Διανυσματική συνάρτηση βαθμωτής μεταβλητής, $\vec{A}=\vec{A}(u)$, (π.χ., $\vec{r}=\vec{r}(t)$: το διάνυσμα θέσης, ως συνάρτηση του χρόνου, $\vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}(t)$: το διάνυσμα της ταχύτητας, ως συνάρτηση του χρόνου)

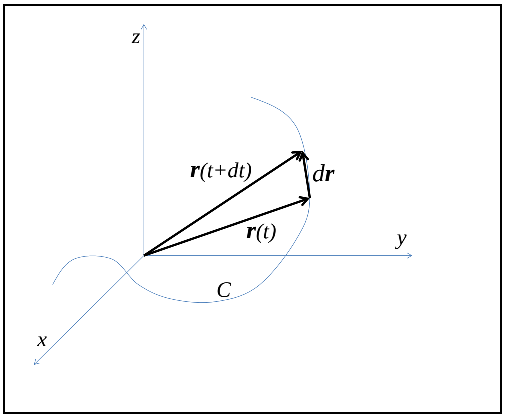
Ορίζουμε την παράγωγο της διανυσματικής συνάρτησης $\vec{A}(u)=\left(\hat{i}A_1(u)+\hat{j}A_2(u)+\hat{k}A_3(u)\right)$ μέσω των συνιστωσών της, δηλ., $\dfrac{d\vec{A}}{du}=\lim\limits_{\Delta u\to o}\dfrac{\vec{A}(u+\Delta u)-\vec{A}(u)}{\Delta u}=\left(\hat{i}\,\dfrac{dA_1}{du}+\hat{j}\,\dfrac{dA_2}{du}+\hat{k}\,\dfrac{dA_3}{du}\right)$

Για την παράγωγο γινομένου συναρτήσεων ισχύει:

$$\frac{d\left(\eta\vec{A}\right)}{du}=\frac{d\left(\eta\right)}{du}\vec{A}+\eta\frac{d\left(\vec{A}\right)}{du}$$

$$\frac{d\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)}{du}=\frac{d\left(\vec{A}\right)}{du}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\frac{d\left(\vec{B}\right)}{du}, \qquad \frac{d\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)}{du}=\frac{d\left(\vec{A}\right)}{du}\times\vec{B}+\vec{A}\times\frac{d\left(\vec{B}\right)}{du}$$

Διανυσματική ταχύτητα και επιτάχυνση



Ας υποθέσουμε ότι ένα κινητό κινείται κατά μήκος της καμπύλης C, και το διάνυσμα θέσης του, κατά τις χρονικές στιγμές t και t+dt, είναι αυτό που φαίνεται στο σχήμα. Ορίζουμε ως διανυσματική ταχύτητα του κινητού, τη χρονική στιγμή t , την χρονική του παράγωγο, σύμφωνα με τη σχέση

$$\vec{\upsilon}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}\left(t+dt\right)-\vec{r}\left(t\right)}{\Delta t}$$

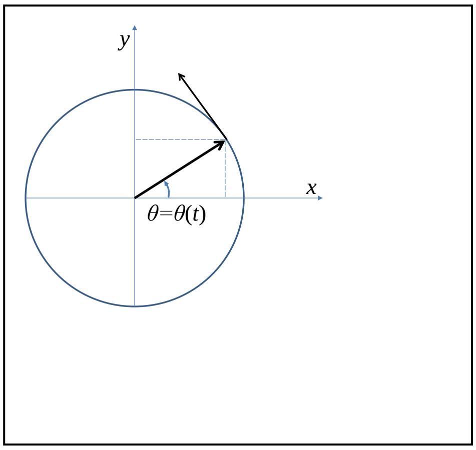
Οπότε, δουλεύοντας με τις συνιστώσες, παίρνουμε

$$\vec{\upsilon}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\left(\hat{x}\frac{dx}{dt}+\hat{y}\frac{dy}{dt}+\hat{z}\frac{dz}{dt}\right)$$

Το διάνυσμα αυτό είναι εφαπτομενικό στην καμπύλη C που αποτελεί την τροχιά του κινητού. Με ανάλογο τρόπο, ορίζουμε την επιτάχυνση του κινητού, σύμφωνα με την σχέση:

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{\upsilon}\left(t+dt\right)-\vec{\upsilon}\left(t\right)}{\Delta t}=\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Ο προσανατολισμός του διανύσματος $\vec{a}$ σε σχέση με την τροχιά C και με τον προσανατολισμό του διανύσματος $\vec{\upsilon}$ εξαρτάται από τη γεωμετρία της τροχιάς και από το ρυθμό κίνησης.



Παράδειγμα 1.2.2.6. Ας θεωρήσουμε την περίπτωση της κυκλικής κίνησης, όπου το κινητό κινείται πάνω σε κυκλική τροχιά ακτίνας R έτσι ώστε η γωνιακή του θέση θ να είναι συνάρτηση του χρόνου.

(α) Περίπτωση ομαλής κυκλικής κίνησης: $\theta=\omega t$ με ω=σταθ.

$$\vec{r}(t)=\hat{x}R\cos\left(\omega t\right)+\hat{y}R\sin\left(\omega t\right)\Rightarrow$$

$$\vec{\upsilon}=\frac{d\vec{r}}{dt}=-\hat{x}\omega R\sin\left(\omega t\right)+\hat{y}\omega R\cos\left(\omega t\right)$$

Φαίνεται ότι $\vec{r}\left(t\right)\cdot\vec{\upsilon}\left(t\right)=0 \quad\Rightarrow\quad \vec{r}\left(t\right)\perp\vec{\upsilon}\left(t\right)$.

Η επιτάχυνση είναι:

$$\vec{a}=\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\frac{d}{dt}\left[-\hat{x}\omega R\sin(\omega t)+\hat{y}\omega R\cos(\omega t)\right]=-\hat{x}\omega^2 R\cos(\omega t)-\hat{y}\omega^2 R\sin(\omega t)=-\omega^2\vec{r}(t)$$

(β) Περίπτωση ομαλά επιταχυνόμενης κυκλικής κίνησης: $\theta=\frac{1}{2}a_\gamma t^2 \Rightarrow \omega=\frac{d\theta}{dt}=a_\gamma t$

Τα διανύσματα θέσης και ταχύτητας είναι :

$$\vec{r}(t)=\hat{x}R\cos\left(\frac{1}{2}a_\gamma t^2\right)+\hat{y}R\sin\left(\frac{1}{2}a_\gamma t^2\right)\Rightarrow\vec{\upsilon}=\frac{d\vec{r}}{dt}=-\hat{x}a_\gamma tR\sin\left(\frac{1}{2}a_\gamma t^2\right)+\hat{y}a_\gamma tR\cos\left(\frac{1}{2}a_\gamma t^2\right)$$

Και εδώ φαίνεται ότι $\vec{r}(t)\cdot\vec{\upsilon}(t)=0 \quad\Rightarrow\quad \vec{r}(t)\perp\vec{\upsilon}(t)$

Η επιτάχυνση, στο ίδιο σύστημα αναφοράς (το καρτεσιανό) γράφεται

$$\vec{a}=\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\frac{d}{dt}\left[-\hat{x}a_\gamma tR\sin\left(\frac{1}{2}a_\gamma t^2\right)+\hat{y}a_\gamma tR\cos\left(\frac{1}{2}a_\gamma t^2\right)\right]=$$

$$=\left[-\hat{x}\left(a_\gamma R\sin\left(\frac{1}{2}a_\gamma t^2\right)+\left(a_\gamma t\right)^2R\cos\left(\frac{1}{2}a_\gamma t^2\right)\right)+\hat{y}\left(a_\gamma R\cos\left(\frac{1}{2}a_\gamma t^2\right)-\left(a_\gamma t\right)^2R\sin\left(\frac{1}{2}a_\gamma t^2\right)\right)\right]$$

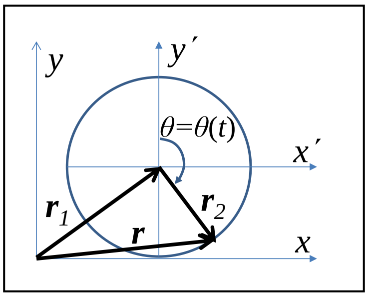
Η τελευταία σχέση μπορεί να αναδιαταχθεί , ώστε να εμφανιστεί με τη μορφή ακτινικής και επιτρόχιας συνιστώσας, ως εξής:

$$\vec{a}=-\hat{x}\left(a_\gamma R\sin\left(\frac{1}{2}a_\gamma t^2\right)\right)\hat{+}\,y\left(a_\gamma R\cos\left(\frac{1}{2}a_\gamma t^2\right)\right)+$$

$$-\hat{x}\left(\left(a_\gamma t\right)^2R\cos\left(\frac{1}{2}a_\gamma t^2\right)\right)-\hat{y}\left(\left(a_\gamma t\right)^2R\sin\left(\frac{1}{2}a_\gamma t^2\right)\right)=\frac{\vec{\upsilon}(t)}{t}-\left(a_\gamma t\right)^2\vec{r}(t)$$

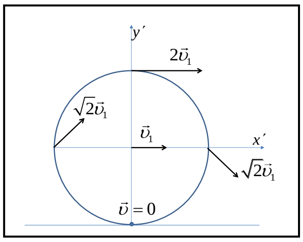
Η τελευταία σχέση $\vec{a}=\frac{\vec{\upsilon}(t)}{t}-\left(a_\gamma t\right)^2\vec{r}(t)$ δείχνει ότι υπάρχει μία συνιστώσα παράλληλη της ταχύτητας $\left(\vec{\upsilon}(t)/t\right)$, άρα επιτρόχια, και μία συνιστώσα παράλληλη της θέσης $-\left(a_\gamma t\right)^2\vec{r}(t)$, άρα ακτινική.

Στα ίδια συμπεράσματα θα μπορέσουμε να καταλήξουμε, με λιγότερους υπολογισμούς, και μάλιστα στην γενικότερη περίπτωση της επίπεδης (όχι αναγκαστικά κυκλικής και ομαλά επιταχυνόμενης) κίνησης, αν εργαστούμε σε ένα περισσότερο βολικό σύστημα συντεταγμένων, όπως είναι το σύστημα των επίπεδων πολικών συντεταγμένων, όπως θα δούμε στην επόμενη ενότητα, (μετά το επόμενο παράδειγμα).



Παράδειγμα 1.2.2.7. Ας μελετήσουμε την περίπτωση της καμπύλης την οποία διαγράφει ένα σημείο της περιφέρειας ενός τροχού ακτίνας R, ο οποίος κυλάει με σταθερή ταχύτητα, παράλληλα στον άξονα-*x*, η οποία είναι γνωστή και ως **κυκλοειδής** τροχιά.

Θα χρησιμοποιήσουμε ένα «ακίνητο» σύστημα αναφοράς (x,y) και ένα «κινούμενο» σύστημα αναφοράς (x',y'), το οποίο κινείται μαζί με το άξονα του τροχού, αλλά παραμένει παράλληλο προς το (x,y). Άρα η θέση ενός σημείου της περιφέρειας μπορεί να περιγραφεί, ως προς το «ακίνητο» σύστημα αναφοράς, με το διάνυσμα $\vec{r}(t)=\vec{r}_1(t)+\vec{r}_2(t)$, όπου



$$\vec{r}_1(t)=\hat{x}(R\omega t)+\hat{y}(R),\qquad \text{και}$$
$$\vec{r}_2(t)=\hat{x}(R\sin(\omega t))+\hat{y}(R\cos(\omega t))$$

Οι προηγούμενες εκφράσεις για τα $\vec{r}_1(t)$ και $\vec{r}_2(t)$ έχουν γραφεί με την υπόθεση ότι παρακολουθούμε την κίνηση του περιφερειακού σημείου το οποίο, κατά την αρχή μέτρησης του χρόνου, διέρχεται από τον κατακόρυφο άξονα $(x_2=0, y_2=R)$

Επομένως, το διάνυσμα $\vec{r}(t)=\vec{r}_1(t)+\vec{r}_2(t)$ είναι $\vec{r}(t)=\hat{x}R(\omega t+\sin(\omega t))+\hat{y}R(1+\cos(\omega t))$,

Η ταχύτητα είναι $\vec{\upsilon}=\dfrac{d\vec{r}(t)}{dt}=\hat{x}R\omega(1+\cos(\omega t))-\hat{y}R\omega(\sin(\omega t))$,

και οι τιμές της, ως προς το «ακίνητο» σύστημα αναφοράς, φαίνονται στο διπλανό διάγραμμα, για χαρακτηριστικά σημεία του κυλιόμενου τροχού

Η επιτάχυνση υπολογίζεται

$$\vec{a}=\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=-\hat{x}R\omega^2(\sin(\omega t))-\hat{y}R\omega^2(\cos(\omega t))=-\omega^2\left[\hat{x}R(\sin(\omega t))+\hat{y}R(\cos(\omega t))\right]=-\omega^2\vec{r}_2$$

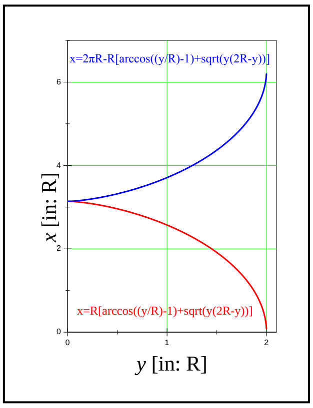
απ' όπου διαπιστώνουμε ότι υπάρχει μόνο η κεντρομόλος επιτάχυνση, όπως αναμένεται από το είδος της κίνησης που υποθέσαμε για τον τροχό.

Αναλυτικός υπολογισμός της τροχιάς ενός κινητού

Η αναλυτική έκφραση μίας τροχιάς μπορεί να προκύψει παραμετρικά με παράμετρο το χρόνο, οπότε αντικαθιστούμε διαδοχικές τιμές του χρόνου στις εκφράσεις των συντεταγμένων $x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t)$ και υλοποιούμε τα σημεία $(x(t),y(t),z(t))$ για κάθε *t*.

Αν θέλουμε της προβολές της τροχιάς στα διάφορα επίπεδα, π.χ., στο επίπεδο (x,y), τότε απαλείφουμε το χρόνο από τις δύο σχέσεις $x=x(t),\quad y=y(t)$ και καταλήγουμε σε μία αναλυτική έκφραση $y=y(x)$, η οποία περιγράφει την προβολή της τροχιάς στο αντίστοιχο επίπεδο.

Στην περίπτωση της **κυκλοειδούς** καμπύλης, από τις σχέσεις $x(t)=R(\omega t+\sin(\omega t))$ και $y(t)=R(1+\cos(\omega t))$ μπορούμε να απαλείψουμε την φάση (ωt)γράφοντας την δεύτερη σχέση



$$\cos(\omega t)=(y/R)-1\Rightarrow\begin{cases}\sin(\omega t)=\sqrt{1-\cos^2(\omega t)}=\sqrt{1-((y/R)-1)^2}\\ \omega t=\arccos((y/R)-1)\end{cases}$$

με την αντικατάσταση των οποίων, στην πρώτη σχέση, $x(t)=R(\omega t+\sin(\omega t))$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}x(y)&=R\left(\arccos((y/R)-1)+\sqrt{1-((y/R)-1)^2}\right),\\&=R\left(\arccos\{(y/R)-1\}\right)+\sqrt{y(2R-y)},\quad 0\le y\le 2R\end{aligned}$$

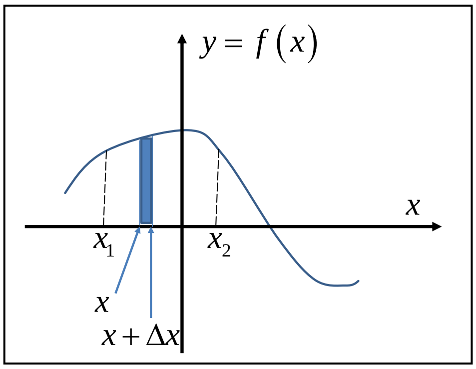
που είναι η αναλυτική έκφραση της κυκλοειδούς καμπύλης..

Σημείωση: Για την ακρίβεια, η παραπάνω έκφραση είναι ο πρώτος κλάδος, (από το πρώτο μέγιστο μέχρι το πρώτο ελάχιστο), δεδομένου ότι η $x=x(y)$ είναι δίτιμη συνάρτηση, ακόμη και μέσα στην πρώτη της περίοδο, μεταξύ των δύο μεγίστων. Ο δεύτερο κλάδος της κυκλοειδούς, (από το πρώτο ελάχιστο μέχρι το επόμενο μέγιστο) δίνεται από την έκφραση :

$$x(y)=R\left(2\pi-\arccos\left((y/R)-1\right)-\sqrt{1-\left((y/R)-1\right)^2}\right), \qquad 0\le y\le 2R$$

Οι δύο κλάδοι της πρώτης περιόδου της κυκλοειδούς καμπύλης, μαζί με τις μαθηματικές τους εκφράσεις, φαίνονται στο διπλανό σχήμα, (πλήρες ανάπτυγμα, βλ. παρακάτω)

Το Ορισμένο Ολοκλήρωμα



Θα εισάγουμε την έννοια του ολοκληρώματος με ένα παράδειγμα που φαίνεται στο διπλανό σχήμα.
Θεωρούμε το γράφημα της συνάρτησης $y=f(x)$ και συμβολίζουμε με $\Delta S=f(x)\Delta x$ το στοιχειώδες εμβαδόν που φαίνεται γραμμοσκιασμένο στο διπλανό σχήμα να οριοθετείται (α) από τον άξονα-*x*, (β) την καμπύλη της συνάρτησης $y=f(x)$ και (γ) τις δύο κατακόρυφες που άγονται από τα σημεία *x* και *x*+Δ*x*.
Το συνολικό αντίστοιχο εμβαδόν προκύπτει από το όριο του αθροίσματος των στοιχειωδών εμβαδών, με την προϋπόθεση ότι το Δ*x* θα τείνει στο μηδέν αποτελώντας διαφορικό *dx* της μεταβλητής x. Το όριο αυτού του αθροίσματος ορίζει το ορισμένο ολοκλήρωμα της συνάρτησης $y=f(x)$, μεταξύ των ορίων ολοκλήρωσης x_1 και x_2.

$$S(x_1,x_2)=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_i \Delta S_i=\int_{x_1}^{x_2} dS=\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$$

Το Αόριστο Ολοκλήρωμα

Ας θεωρήσουμε μία συνάρτηση $S=S(x)$ και την παράγωγό της $\dfrac{dS(x)}{dx}=f(x)$. Σε αυτή την περίπτωση ορίζουμε ως αόριστο ολοκλήρωμα (ή, ως αντιπαράγωγο) της $f(x)$ την $S=S(x)$.
Είναι προφανές ότι και κάθε συνάρτηση $S(x)+C$ είναι επίσης ολοκλήρωμα της $f(x)$, αφού

$$\left[S(x)+C\right]'=S'(x)=f(x)$$

Από το Ορισμένο στο Αόριστο Ολοκλήρωμα

Υπολογίζουμε το διαφορικό της *S*: $dS(x)=\left(\dfrac{dS(x)}{dx}\right)dx=f(x)dx$, και ολοκληρώνουμε

$$dS(x)=f(x)dx\Rightarrow\int dS(x)=\int f(x)dx \quad\Rightarrow S(x)=\int f(x)dx+C$$

Θεωρούμε σταθερό το κάτω άκρο του ορισμένου ολοκληρώματος και υποθέτουμε ότι υπολογίζουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα για διαφορετικές τιμές του άνω άκρου του

$$\int_{x_1}^{x_2} dS = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \quad \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dS = \int_{x_0}^{x} f(x)dx \Rightarrow S(x) - S(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx$$

Επομένως, επιλύοντας ως προς την $S(x)$ και παραγωγίζοντας,

$$S(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx + S(x_0) \Rightarrow \frac{dS(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\int_{x_0}^{x} f(x)dx + S(x_0)\right] = \frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} f(x)dx$$

Δηλ.: το ορισμένο ολοκλήρωμα, ως συνάρτηση του άνω ορίου του, είναι μία συνάρτηση, η παράγωγος της οποίας είναι η ολοκληρωτέα συνάρτηση $f(x)$ του ολοκληρώματος

Από την συνοπτική παρουσίαση που προηγήθηκε προκύπτει ότι, για ένα πρόβλημα που επιλύεται μέσω ολοκληρώματος, οι αρχικές συνθήκες είναι αυτές που καθορίζουν είτε τα αντίστοιχα όρια του ορισμένου ολοκληρώματος είτε την προσθετική σταθερά του αόριστου ολοκληρώματος, καθιστώντας με αυτό τον τρόπο απόλυτα ισοδύναμους τους δύο τρόπους υπολογισμού της λύσης (μέσω ορισμένου, ή μέσω αόριστου ολοκληρώματος.

Για το ολοκλήρωμα ισχύουν δύο θεμελιώδη Θεωρήματα (που θα παρουσιαστούν αναλυτικά στο μάθημα της Ανάλυσης).

1$^{\text{ο}}$ Θεμελιώδες Θεώρημα της Ανάλυσης: Έστω f μία συνάρτηση ολοκληρώσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[a,b]$. Αν c ένας αριθμός εσωτερικός του διαστήματος αυτού, $a \le c \le b$, ορίζουμε μία νέα συνάρτηση $A(x)$ ως εξής: $A(x) = \int_c^x f(t)dt$, αν $a \le x \le b$. Η παράγωγος $A'(x)$ υπάρχει τότε σε κάθε σημείο x του (a,b) όπου η $f(x)$ είναι συνεχής, και για αυτά τα x είναι $A'(x) = f(x)$

2$^{\text{ο}}$ Θεμελιώδες Θεώρημα της Ανάλυσης: Έστω f μία συνάρτηση ολοκληρώσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[a,b]$ και συνεχής στο (a,b). Έστω $P(x)$ τυχούσα παράγουσα της $f(x)$, δηλ., $P'(x) = f(x)$, στο διάστημα (a,b). Αν $a < c < b$, θα είναι $\int_c^t f(t)dt = P(x) - P(c)$

Ιδιότητες Ολοκληρωμάτων

$$\int_a^b \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int_a^b \left(f(x)\right)dx \pm \int_a^b \left(g(x)\right)dx$$

$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx = -A\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^c f(x)dx + A\int_c^b f(x)dx$$

Χρήσιμος Κανόνας - Ολοκλήρωση κατά μέρη

$$\int fdg = fg - \int gdf \quad \Rightarrow$$

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$

Μερικά Χρήσιμα Ολοκληρώματα

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \ne -1,, \qquad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$\int \cos x dx = \sin x + C$, $\int \sin x dx = -\cos x + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$, $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right) + C$,

$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} arc\cot \frac{x}{a} + C$, $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

$\int e^x dx = e^x + C$, $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

Ολοκλήρωμα Διανυσματικής συνάρτησης

Πως υπολγίζουμε το αόριστο ολοκλήρωμα της διανυσματικής συνάρτησης $\vec{f}(u) = f_1(u)\hat{i} + f_2(u)\hat{j} + f_3(u)\hat{k}$;

$$I = \int \vec{f}(u)du = \hat{i}\int f_1(u)du + \hat{j}\int f_2(u)du + \hat{k}\int f_3(u)du$$

Παράδειγμα. Υπολογισμός διαστήματος σε ευθύγραμμη κίνηση με ταχύτητα που είναι συνάρτηση του χρόνου.

Έστω $\upsilon = \upsilon(t)$. Τότε, σε ένα διαφορικό χρονικό διάστημα από *t* μέχρι *t+dt*, μπορούμενα θεωρήσουμε ότι η κίνηση είναι ισοταχής, με στιγμιαία τιμή ταχύτητας $\upsilon = \upsilon(t)$, οπότε το διαφορικό διάστημα που διανύεται μέσα στο dt, είναι $ds = \upsilon(t)dt$, και το συνολικό διάστημα που διανύεται κατά τη διάρκεια του πεπερασμένου χρονικού διαστήματος (t_1, t_2) είναι

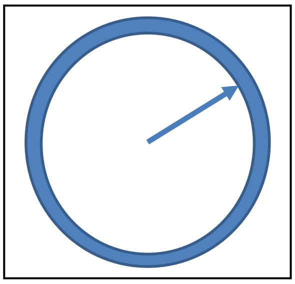
$$s(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} \upsilon(t)dt$$

Παράδειγμα. Υπολογισμός έργου δύναμης παράλληλης στον άξονα-*x*, που το μέτρο της είναι συνάρτηση της θέσης *x*, και μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της από x_1 μέχρι x_1.

Έστω $F = F(x)$. Τότε, κατά τη μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της δύναμης κατα ένα διαφορικό διάστημα από *x* μέχρι *x+dx*, μπορούμενα θεωρήσουμε ότι η δύναμη είναι σταθερή, με στιγμιαία τιμή $F = F(x)$, οπότε το διαφορικό έργο που παράγεται κατά αυτή τη διαφορική μετατόπιση, είναι $dW = F(x)dx$, και το συνολικό έργο που παράγεται κατά την πεπερασμένη μετατόπιση (x_1, x_2) είναι

$$W(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} dW = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx$$

Παράδειγμα. Υπολογισμός εμβαδού διαφορικού κυκλικού δακτυλιδιού ακτίνας R και πλάτους a<<R.



Το διαφορικό εμβαδό που αντιστοιχεί σε μία διαφορική γωνία *dφ* είναι:

$$dS = (Rd\varphi)\alpha$$

Άρα $S = \int dS = \int (Rd\varphi)\alpha = aR\int_0^{2\pi} d\varphi = (2\pi R)a$

Υπολογισμός μήκους επίπεδης καμπύλης

Όταν έχει εκφραστεί αναλυτικά η μορφή μίας καμπύλης στο επίπεδο (x, y) μέσω της σχέσης $y = y(x)$ ή $x = x(y)$, τότε το μήκος αυτής της καμπύλης μπορεί να υπολογιστεί ολοκληρώνοντας στοιχειώδη τμήματα $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$, που αντιστοιχούν σε μετατοπίσεις (dx, dy) οι οποίες είναι εξαρτημένες μέσω των ανωτέρω σχέσεων, οπότε

$$s = \int_{(x_1;y_1)}^{(x_2;y_2)} ds = \int_{(x_1\leftrightarrow y_1)}^{(x_2\leftrightarrow y_2)} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int_{(x_1\leftrightarrow y_1)}^{(x_2\leftrightarrow y_2)} \sqrt{(dx)^2 + \left(\frac{dy}{dx}dx\right)^2} = \int_{(x_1\leftrightarrow y_1)}^{(x_2\leftrightarrow y_2)} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Ο συμβολισμός $(x_1 \leftrightarrow y_1)$, και $(x_2 \leftrightarrow y_2)$ στα όρια του ολοκληρώματος σημαίνει ότι τα μέλη του κάθε ζεύγους $(x \leftrightarrow y)$ είναι εξαρτημένα μεταξύ τους, όπως επίσης και ότι, ανάλογα με τη μορφή των αναλυτικών εκφράσεων $y = y(x)$ και $x = x(y)$, θα μπορούσε να πραγματοποιήσει ολοκλήρωση ως προς dy, επιλέγοντας την μορφή που ολοκληρώνεται αναλυτικά πιο εύκολα. Υπάρχουν επομένως δύο ισοδύναμες εκφράσεις για τον υπολογισμό του μήκους καμπύλης

$$s(x_1, x_2) = \int_{(x_1)}^{(x_2)} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \quad \text{και} \quad s(y_1, y_2) = \int_{(y_1)}^{(y_2)} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy\,.$$

Εφαρμόζοντας αυτές τις σχέσεις στην περίπτωση της κυκλοειδούς καμπύλης, μπορεί να υπολογίσει κανείς ότι το συνολικό μήκος ενός τόξου, ανάμεσα σε δύο διαδοχικές επαφές του ίδιο σημείου της περιφέρειας του κυλιόμενου τροχού με το οριζόντιο επίπεδο επί του οποίου κυλάει, είναι $s = 8R$.

Εναλλακτικά, όταν η μορφή μίας καμπύλης δίδεται με παραμετρική μορφή, όπως συμβαίνει, π.χ., σε προβλήματα κινηματικής ή δυναμικής, με "παράμετρο" τον χρόνο (ο οποίος, στο πλαίσιο αυτών των προβλημάτων είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή του προβλήματος), τότε ο υπολογισμός του μήκους της καμπύλης μπορεί να γίνει με τον εξής τρόπο.
Αν δίδονται (προβλήματα κινηματικής), ή αν έχουν υπολογιστεί (προβλήματα δυναμικής) οι συντεταγμένες ενός κινητού ως συναρτήσεις του χρόνου, $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, τότε το μήκος της καμπύλης την οποία διαγράφει το κινητό κατά την κινησή του, υπολογίζεται ως εξής:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}dt\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}dt\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}dt\right)^2}\,,$$

ή, συναρτήσει των ταχυτήτων:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}\right) dt$$

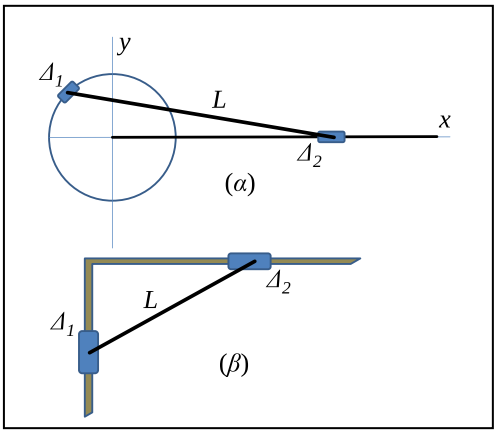
Σύνδεσμοι

Σε αρκετές εφαρμογές της Μηχανικής, διαφορετικά τμήματα ενός μηχανικού συστήματος συνδέονται μεταξύ τους, με κάποιο τρόπο, (π.χ., με μη-εκτατά νήματα, με στερεά ράβδο μέσω αρθρώσεων, με περισσότερες από μία αρθρωτές ράβδους, με μη-εκτατό νήμα μέσω τροχαλίας επί της οποίας δεν ολισθαίνει, κ.ο.κ). Αυτοί οι τρόποι σύνδεσης των επί μέρους τμημάτων, επιβάλουν κάποια σχέση ανάμεσα στις συντεταγμένες των τμημάτων. Η σχέση αυτή διατυπώνεται με μία μαθηματική έκφραση που αναφέρεται ως **σύνδεσμος**.

Παράδειγμα 1.2.2.9 Δύο μηχανικοί «δρομείς» Δ_1 και Δ_2 είναι συνδεδεμένοι αρθρωτά με ράβδο σταθερού μήκους L και κινούνται σε διαφορετικές διαδρομές ο καθένας, σύμφωνα με τα διπλανά σχήματα.

Σχήμα α

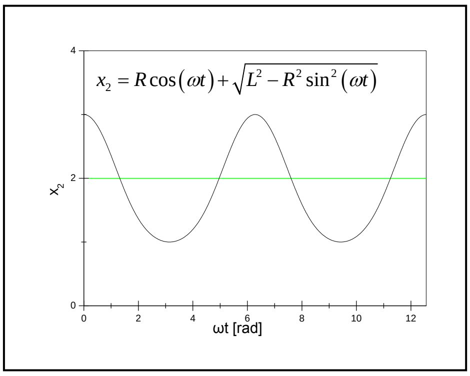
(α₁) Δώστε την χρονική εξάρτηση του διανύσματος θέσης του δρομέα Δ_2 αν ο δρομέας Δ_1 εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση στην περιφέρεια κύκλου ακτίνας R, $(2R < L)$, με γωνιακή ταχύτητα ω. **(α₂)** Δώστε την χρονική εξάρτηση του διανύσματος θέσης του δρομέα Δ_1 αν ο δρομέας Δ_2 εκτελεί παλινδρομική κίνηση της μορφής $x(t) = x_0 + A\cos(\omega t)$. [Διακρίνετε περιπτώσεις για τη σχέση των μεγεθών, x_0, A, L και $2R$].



Σχήμα β

(β) Δώστε την χρονική εξάρτηση του διανύσματος θέσης του δρομέα Δ_1 αν ο δρομέας Δ_2 εκτελεί παλινδρομική κίνηση της μορφής $x(t) = x_0 + A\cos(\omega t)$, [Διακρίνετε περιπτώσεις για τη σχέση των μεγεθών, x_0, A και L].

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



(α₁) Αν (x_1, y_1) και (x_2, y_2) είναι οι συντεταγμένες των δύο φορέων Δ_1 και Δ_2, αντίστοιχα, τότε έχουμε (υποθέτουμε ότι ο Δ_1 ξεκινάει από τη θέση $(x_1 = R, y_1 = 0)$):

$$\vec{r}_1 = \big(x_1 = R\cos(\omega t), y_1 = R\sin(\omega t)\big), \qquad (1)$$

$$\vec{r}_2 = \big(x_2 = x_2(t), y_2 = 0\big) \qquad (2)$$

Σύνδεσμος: $|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = L$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = L \quad \Rightarrow$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = L^2$$

Οπότε, λαμβάνοντας υπόψη μας τις (1) και (2), η τελευταία σχέση γίνεται

$$(x_2 - x_1) = \sqrt{L^2 - y_1^2} \quad \Rightarrow \quad x_2 = x_1 + \sqrt{L^2 - y_1^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x_2 = R\cos(\omega t) + \sqrt{L^2 - R^2\sin^2(\omega t)}}$$

Επομένως, η θέση του δρομέα Δ_2 στον άξονα x είναι μία περιοδική αλλά όχι αρμονική συνάρτηση του χρόνου (όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα)

(α₂) Αν (x_1, y_1) και (x_2, y_2) είναι οι συντεταγμένες των δύο φορέων Δ_1 και Δ_2, αντίστοιχα, τότε έχουμε (υποθέτουμε ότι ο Δ_1 ξεκινάει από τη θέση $(x_1 = R, y_1 = 0)$):

$$\vec{r}_2 = \big(x_2 = x_0 + A\cos(\omega t), y_2 = 0\big) \qquad (1)$$

Σύνδεσμος-1: $\quad x_1^2 + y_1^2 = R^2, \qquad (2)$

Σύνδεσμος-2: $\quad |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = L \qquad (3)$

$$(3) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = L \quad \Rightarrow \quad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = L^2$$

$$\big(x_0 + A\cos(\omega t) - x_1\big)^2 + (y_1)^2 = L^2 \quad \Rightarrow \quad \big(x_0 + A\cos(\omega t)\big)^2 + x_1^2 - 2x_1\big(x_0 + A\cos(\omega t)\big) + (y_1)^2 = L^2$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (2), παίρνουμε

$$-2x_1\left(x_0 + A\cos(\omega t)\right) = L^2 - R^2 - \left(x_0 + A\cos(\omega t)\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1 = \frac{R^2 + \left(x_0 + A\cos(\omega t)\right)^2 - L^2}{2\left(x_0 + A\cos(\omega t)\right)}}$$

Και, από την (2) $\qquad y_1 = \sqrt{R^2 - x_1^2}$

[Διακρίνετε περιπτώσεις για τη σχέση των μεγεθών, x_0, A, L και $2R$].

(β) Αν (x_1, y_1) και (x_2, y_2) είναι οι συντεταγμένες των δύο φορέων Δ$_1$ και Δ$_2$, αντίστοιχα, τότε έχουμε:

$\vec{r}_1 = \left(0, y_1 = y_1(t)\right),$ $\qquad$ (1)

$\vec{r}_2 = \left(x_2 = x_0 + A\cos(\omega t), y_2 = 0\right)$ $\qquad$ (2)

Σύνδεσμος: $\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right| = L$ $\qquad$ (3)

$$(3) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(x_2)^2 + (y_1)^2} = L \quad \Rightarrow \quad (x_2)^2 + (y_1)^2 = L^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y_1 = -\sqrt{L^2 - \left(x_0 + A\cos(\omega t)\right)^2}$$