ΣΕΜΦΕ
Ασκήσεις στη Συναρτησιακή Ανάλυση Ι
(5ο φυλλάδιο ασκήσεων)

Ασκηση 1. *Έστω $T \in B(X,Y)$. Να δείξετε ότι*

(ι)

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\} \\ &= \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\} \ . \end{aligned}$$

(ιι)

$$\|T\| = \inf\{M > 0 : \|Tx\| \leq M\|x\| \ , \ \textit{για κάθε } x \in X\} \ .$$

Ασκηση 2 (Πολλαπλασιαστικός τελεστής)**.** *Θεωρούμε τον $X = C[a,b]$ εφοδιασμένο με την $\|\cdot\|_\infty$ και $g \in X$. Ορίζουμε $T : X \to X$ με τύπο*

$$Tf(x) = g(x)f(x) \ , \textit{για κάθε } x \in [a,b] \ .$$

Να δείξετε ότι $T \in B(X)$.

Ασκηση 3 (Τελεστής δεξιάς μετατόπισης)**.** *Έστω $S : l^1 \to l^1$ με τύπο*

$$S(x_1, x_2, ...) = (0, x_1, x_2, ...) \ .$$

Να δείξετε ότι ο S είναι φραγμένος και να βρείτε τη νόρμα του.

Ασκηση 4. *Έστω $T : (c_{00}, \|\cdot\|_\infty) \to (c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ με τύπο*

$$T(x) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, ...) \ , \ \textit{για κάθε } x = (x_n) \in c_{00} \ .$$

Δείξτε ότι ο T είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής και βρείτε τη νόρμα του.

Ασκηση 5. *Να δείξετε ότι αν ο X είναι χώρος με νόρμα πεπερασμένης διάστασης, τότε κάθε γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$, όπου Y χώρος με νόρμα, είναι φραγμένος.*

Ασκηση 6. *Έστω $F : C[0,1] \to \mathbb{R}$ με*

$$F(f) = \int_0^1 xf(x)\,dx \ .$$

Να δείξετε ότι το F είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές και υπολογίστε την $\|F\|$.

Ασκηση 7. *Να δείξετε ότι ο $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ είναι διαχωρίσιμος.*