ΣΕΜΦΕ
Συναρτησιακή Ανάλυση Ι
Λύσεις του 4ου φυλλαδίου ασκήσεων

Ασκηση 1 (Τελεστής δεξιάς μετατόπισης)**.** *Έστω* $S : l^2 \to l^2$ *με τύπο*

$$S(x_1, x_2, ...) = (0, x_1, x_2, ...) .$$

Να δείξετε ότι ο S *είναι καλά ορισμένος και γραμμικός. Στη συνέχεια να βρείτε τα* $\ker S$ *και* $\operatorname{Im} S$.

Λύση. Κατάρχήν

$$\|Sx\|_2 = (\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2)^{\frac{1}{2}} = \|x\|_2$$

και συνεπώς $Sx \in l^2$. Η γραμμικότητα είναι άμεση. Επιπλέον εύκολα βλέπουμε ότι $\ker S = \{0\}$ και $\operatorname{Im} S = \{x = (x_n) : x_1 = 0\}$. □

Ασκηση 2. *Έστω* $T : l^\infty \to l^\infty$ *με τύπο*

$$T(x) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, ...) , \text{ για κάθε } x = (x_n) \in l^\infty .$$

Να βρείτε τον $\ker T$. *Ποια είναι η διάσταση του;*

Λύση. Αν $x = (x_n) \in \ker T$, τότε $x_1 = x_2 = x_3 = ...$ και συνεπώς

$$\ker S = \{x = (x_n) : x_n = c, \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}\} ,$$

δηλαδή ο πυρήνας του S περιέχει τις σταθερές ακολουθίες. Η διάσταση του είναι 1 αφού κάθε στοιχείο του είναι της μορφής $c(1, 1, 1, ...), c \in \mathbb{R}$. □

Ασκηση 3. *Να δείξετε ότι οι παρακάτω τελεστές είναι γραμμικοί και στη συνέχεια να βρείτε τα* $\ker T$ *και* $\operatorname{Im} T$.

(ι) $T : C([0, 1]) \to \mathbb{R}$, *με τύπο* $Tf = f(0)$.

(ιι) $T : C^1([0, 1]) \to C([0, 1])$, *με τύπο* $Tf = f'$.

Λύση.

(ι) Έχουμε ότι $T(f + g) = (f + g)(0) = f(0) + g(0) = Tf + Tg$ και $T(\lambda f) = (\lambda f)(0) = \lambda f(0) = \lambda Tf$, για κάθε $f, g \in C([0, 1])$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ και συνεπώς ο T είναι γραμμικός. Αν $f \in \ker T$, τότε $f(0) = 0$ και συνεπώς

$$\ker T = \{f \in C([0, 1]) : f(0) = 0\} .$$

Αφού για κάθε $c \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι $c = f(0)$, για $f(t) = c , t \in [0, 1]$, έχουμε ότι $\operatorname{Im} T = \mathbb{R}$.

(ιι) Το ότι ο T είναι γραμμικός προκύπτει από τη γραμμικότητα της παραγώγου. Αν $f \in \ker T$, τότε $f' = 0$ και συνεπώς

$$\ker T = \{f \in C([0,1]) : f = \text{ σταθερή}\} .$$

Τέλος $\operatorname{Im} T = C([0,1])$ αφού για κάθε $g \in C([0,1])$ αν $f(x) = \int_0^x g(t)\,dt$, τότε έχουμε ότι $Tf = g$.

□

Ασκηση 4. *Έστω $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής.*

(ι) Να δείξετε ότι $\ker T \subseteq \ker T^2$. Ισχύει ο αντίστροφος εγκλεισμός; Αν όχι βρείτε ένα αντιπαράδειγμα.

(ιι) Αν $X = Y$ να δείξετε ότι $\ker T = \ker T^2$ αν και μόνο αν $\ker T \cap \operatorname{Im} T = \{0\}$.

(Σημείωση: $T^2 = T \circ T$.)

Λύση.

(ι) Αν $x \in \ker T$, τότε $Tx = 0$ και προφανώς $T^2x = T(Tx) = 0$, οπότε $x \in \ker T^2$. Ο αντίστροφος εγκλεισμός δεν ισχύει. Ένα αντιπαράδειγμα είναι ο τελεστής $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ που προκύπτει από τον πίνακα

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

αφού $\ker T = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : y = 0 \right\}$ ενώ $\ker T^2 = \mathbb{R}^2$.

(ιι) Αν $T^2x = 0$, τότε $T(Tx) = 0$ και συνεπώς $Tx \in \ker T \cap \operatorname{Im} T = \{0\}$. Οπότε $Tx = 0$, δλδ $x \in \ker T$ και συνεπώς $\ker T^2 \subseteq \ker T$. Ο αντίστροφος εγκλεισμός ισχύει από το (ι).

□