ΣΕΜΦΕ
Συναρτησιακή Ανάλυση Ι
Λύσεις του 3ου φυλλαδίου ασκήσεων

Ασκηση 1. *Να δείξετε ότι ο χώρος*

$$X = \{f \in C([a,b]) : f(a) = 0\}$$

με τη νόρμα $\|\cdot\|_\infty$ *είναι χώρος Banach.*

Λύση. Αν (f_n) μία ακολουθία του X με $f_n \to f$, τότε η (f_n) θα συγκλίνει ομοιόμορφα άρα και κατά σημείο στην f και συνεπώς $f(0) = \lim f_n(0) = 0$. Συνεπώς ο X είναι κλειστός υπόχωρος του $C([a,b])$. Αρα από την άσκηση 5 του φυλ. 2 είναι και ο ίδιος χώρος Banach. □

Ασκηση 2. *Με* l^∞ *συμβολίζουμε τον χώρο των φραγμένων πραγματικών ακολουθιών. Να δείξετε ότι ο* l^∞ *εφοδιασμένος με τη νόρμα*

$$\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|\,, \ \text{για } x = (x_n) \in l^\infty$$

είναι χώρος Banach.

Λύση. Έστω (x_k) μια ακολουθία Cauchy στον l^∞. Αν $\varepsilon > 0$, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$|x_n^k - x_n^l| \le \max_n |x_n^k - x_n^l| = \|x_k - x_l\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}, \ \text{για κάθε } k,l \ge k_0\,, n = 1,2,... \quad (1)$$

Τότε όμως, για κάθε $n = 1,2,...$ η ακολουθία $(x_n^k)_k$ είναι Cauchy στο $\mathbb{R}$. Συνεπώς υπάρχει $x_n \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $x_n^k \to x_n$, καθώς $k \to \infty$, για κάθε $n = 1,2,...$

Παίρνοντας όριο στην (1) για $l \to \infty$ έχουμε ότι

$$|x_n^k - x_n| \le \frac{\varepsilon}{2}, \ \text{για κάθε } k \ge k_0\,, n = 1,2,... \quad (2)$$

Αν $x = (x_n)$ έχουμε ότι

$$\|x_k - x\|_\infty = \max_n |x_n^k - x_n| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \ \text{για κάθε } k \ge k_0\,,$$

και συνεπώς $x_k \to x$ στον l^∞. Επιπλέον από την (2) έχουμε ότι $x - x_{k_0} \in l^\infty$ και άρα

$$x = x - x_{k_0} + x_{k_0} \in l^\infty\,.$$

Επομένως ο l^∞ είναι χώρος Banach. □

Ασκηση 3. *Με* c_0 *συμβολίζουμε τον χώρο των μηδενικών ακολουθιών. Να δειξετε ότι ο* c_0 *εφοδιασμένος με τη νόρμα* $\|\cdot\|_\infty$ *είναι χώρος Banach.*
(Υπόδειξη: να χρησιμοποιήσετε την άσκηση 5 του φυλ. 2)

Λύση. Αφού από την άσκηση 2 του παρόντος φυλλαδίου ο l^∞ είναι χώρος Banach, από την άσκηση 5 του φυλ. 2 αρκεί να δειξουμε ότι ο c_0 είναι κλειστός υπόχωρος του. Έστω λοιπόν μια ακολουθία (x_k) στον c_0 με $x_k \to x$ στην $\|\cdot\|_\infty$. Αν $x_k = (x_n^k)_n$ και $x = (x_n)$ τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$|x_n^k - x_n| \leq \max_n |x_n^k - x_n| = \|x_k - x\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ για κάθε } k \geq k_0, \text{ και κάθε } n = 1, 2, ...$$

Αφού $x_{k_0} = (x_n^{k_0})_n \in c_0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$|x_n^{k_0}| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ για κάθε } n \geq n_0 \,.$$

Επομένως

$$|x_n| \leq |x_n - x_n^{k_0}| + |x_n^{k_0}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ για κάθε } n \geq n_0 \,.$$

Άρα $x_n \to 0$ και συνεπώς $x = (x_n) \in c_0$ από όπου προκύπτει το συμπέρασμα.

□

Ασκηση 4. *Έστω συνάρτηση $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $g(x) > 0$, για κάθε $x \in [0,1]$. Αν $f \in C([0,1])$ θέτουμε*

$$\|f\|_g = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|g(x) \,.$$

(ι) Να δείξετε ότι η $\|\cdot\|_g$ είναι μία νόρμα στον $C([0,1])$.

(ιι) Αν $\inf_{x\in[0,1]} g(x) = m > 0$ και $\sup_{x\in[0,1]} g(x) = M < +\infty$, να δείξετε ότι η $\|\cdot\|_g$ είναι ισοδύναμη νόρμα με την $\|\cdot\|_\infty$.

Λύση.

(ι) Προφανώς $\|f\|_g \geq 0$, για κάθε $f \in C([0,1])$. Επιπλέον αν $\|f\|_g = 0$, τότε $\sup_{x\in[0,1]} |f(x)|g(x) = 0$ και συνεπώς $|f(x)|g(x) = 0$, για κάθε $x \in [0,1]$ το οποίο λόγω της υπόθεσης $g(x) > 0$ μας δίνει ότι $|f(x)| = 0$, για κάθε $x \in [0,1]$, δλδ $f = 0$.
$\|\lambda f\|_g = \sup_{x\in[0,1]} |\lambda f(x)|g(x) = |\lambda| \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|g(x) = |\lambda|\|f\|_g$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και κάθε $f \in C([0,1])$.
Για κάθε $f_1, f_2 \in C([0,1])$ έχουμε οτι

$$\begin{aligned} \|f_1 + f_2\|_g &\leq \sup_{x\in[0,1]} (|f_1(x)| + |f_2(x)|)g(x) \\ &\leq \sup_{x\in[0,1]} |f_1(x)|g(x) + \sup_{x\in[0,1]} |f_2(x)|g(x) \\ &= \|f_1\|_g + \|f_2\|_g \,. \end{aligned}$$

(ιι) Έχουμε ότι $m\|f\|_g \leq \|f\|_\infty \leq M\|f\|_g$, για κάθε $f \in C([0,1])$. Άρα οι νόρμες είναι ισοδύναμες,

□

Ασκηση 5. *Έστω* $X = C^1([-1,1])$. *Θέτουμε* $\|f\|_1 = \|f\|_\infty$, $\|f\|_2 = \|f'\|_\infty$ *και* $\|f\| = \|f\|_1 + \|f\|_2$. *Να δείξετε ότι*

(ι) *ο* $(X, \|\cdot\|_1)$ *είναι χώρος με νόρμα, αλλά δεν είναι χώρος Banach,*

(ιι) $\eta\ \|\cdot\|_2$ *δεν είναι νόρμα στον* X,

(ιιι) *ο* $(X, \|\cdot\|)$ *είναι χώρος Banach.*

Λύση.

(ι) Αν

$$f_n(x) = (x^2 + \frac{1}{n})^{\frac{1}{2}}, n = 1, 2, \ldots \text{ και } f(x) = |x|, \text{ για κάθε } x \in [-1,1],$$

τότε η f_n συγκλίνει ομοιόμορφα στην f, δηλαδή $\|f_n - f\|_1 = \|f_n - f\|_\infty \to 0$, καθώς $n \to +\infty$. Όμως $f \notin X$ και συνεπώς ο X δεν είναι χώρος Banach.

(ιι) Αν $f(x) = c$, για κάθε $x \in [-1,1]$, τότε $\|f\|_2 = \|f'\|_\infty = 0$ ενώ $f \neq 0$. Άρα $\eta\ \|\cdot\|_2$ δεν είναι νόρμα στον X,

(ιιι) Έστω (f_n) Cauchy ακολουθία ως προς την $\|\cdot\|$. Τότε οι (f_n) και η (f_n') είναι Cauchy ακολουθίες με την $\|\cdot\|_\infty$ και συνεπώς $f_n \to f$ και $f_n' \to g$ στον $C([-1,1])$. Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη αρκεί να δείξουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη με $f' = g$.

Προς αυτή τη κατεύθυνση έστω $\varepsilon > 0$ και $t \in [-1,1]$. Αφού η g είναι συνεχής στο $[-1,1]$ θα είναι ομοιόμορφα συνεχής και συνεπώς θα υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$|g(t+s) - g(t)| < \varepsilon, \text{ για κάθε } |s| < \delta.$$

Αν $h \in \mathbb{R}$ με $0 < |h| < \delta$, τότε

$$\begin{aligned} |\frac{f(t+h) - f(t)}{h} - g(t)| &= \lim |\frac{f_n(t+h) - f_n(t)}{h} - g(t)| \\ &= \lim |\frac{1}{h}\int_0^h f_n'(t+s)\,ds - g(t)| \\ &= |\frac{1}{h}\int_0^h (g(t+s) - g(t))\,ds| \\ &\leq \frac{1}{|h|}\varepsilon|h| = \varepsilon. \end{aligned}$$

Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη με $f' = g$. Άρα ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος Banach.

□