

ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
3ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Ασκηση 1. Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής. Αν είναι αληθής αποδείξτε την και αν είναι ψευδής δώστε αντιπαράδειγμα.

- (α) Αν $0 < \alpha < 1$ και (x_n) είναι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $|x_{n+1}| \leq \alpha|x_n|$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $x_n \rightarrow 0$.
- (β) Αν $a_n \rightarrow 0$ τότε η $(|a_n|)$ είναι φθίνουσα.
- (γ) Αν η (b_n) έχει θετικούς όρους και είναι γνησίως αύξουσα, τότε $b_n \rightarrow +\infty$.
- (δ) Αν η (γ_n) είναι αύξουσα και δεν είναι άνω φραγμένη, τότε $\gamma_n \rightarrow +\infty$.
- (ε) Αν $y_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $y_n \rightarrow 1$, τότε $y_n^n \rightarrow 1$.

Ασκηση 2. Για καθεμιά από τις παρακάτω ακολουθίες εξετάστε αν συγκλίνει, και αν ναι, βρείτε το όριό της:

$$\alpha_n = \frac{n^3}{4^n}, \quad \beta_n = \frac{n^6}{6^n}, \quad \gamma_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2}$$
$$\delta_n = (\sqrt[n]{n} - 1)^n, \quad \epsilon_n = \sqrt[n]{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}, \quad \zeta_n = \frac{\sin(n^3)}{\sqrt{n}}.$$

Ασκηση 3. Έστω $k \geq 2$ και $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n}.$$

Ασκηση 4. Αποδείξτε ότι αν $a_n \rightarrow a$ και $b_n \rightarrow b$ με $a < b$, τότε υπάρχει n_0 ώστε $a_n < b_n$ για κάθε $n \geq n_0$.

Ασκηση 5. Έστω $(a_n), (b_n)$ δύο ακολουθίες πραγματικών αριθμών με $b_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

- (α) Αν, επιπλέον, η (b_n) είναι φραγμένη, δείξτε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$.
- (β) Δώστε παράδειγμα που να δείχνει ότι αν δεν υποθέσουμε την (b_n) φραγμένη τότε δεν ισχύει απαραίτητα $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$.

Ασκηση 6. Έστω (a_n) φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών που ικανοποιεί την $2a_n \leq a_{n-1} + a_{n+1}$ για κάθε $n = 2, 3, \dots$. Αποδείξτε ότι η ακολουθία $b_n = a_{n+1} - a_n$ συγκλίνει. Μπορείτε να βρείτε το όριό της;

Ασκηση 7. Έστω y θετικός πραγματικός αριθμός. Ορίζουμε μια ακολουθία (a_n) θέτοντας

$$a_n = \frac{[y] + [2y] + \cdots + [ny]}{n^2}$$

όπου $[x]$ είναι το ακέραιο μέρος του x . Αποδείξτε ότι $a_n \rightarrow \frac{y}{2}$.

Ασκηση 8. Αποδείξτε ότι η ακολουθία

$$y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. [Υπόδειξη: Εξετάστε πρώτα αν η (y_n) είναι μονότονη.]