

ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
2ο Φυλλάδιο Ασκήσεων (υποδείξεις)

Ασκηση 1. Αποδείξτε ότι τα σύνολα

$$A = \left\{ \frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^3} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$$
$$B = \left\{ \frac{n}{3n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

είναι φραγμένα και βρείτε το supremum και το infimum τους. Εξετάστε αν έχουν μέγιστο ή ελάχιστο στοιχείο. Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Υπόδειξη: Γενικά, αν $A \neq \emptyset$ είναι άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $x \in \mathbb{R}$ τότε τα εξής είναι ισοδύναμα:

- (i) $x = \sup A$.
- (ii) ο x είναι άνω φράγμα του A και για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $a \in A$ τέτοιο ώστε $x - \epsilon < a$.
- (iii) ο x είναι άνω φράγμα του A και υπάρχει ακολουθία (a_n) στοιχείων του A τέτοια ώστε $a_n \rightarrow x$.

Συνεπώς, για να αιτιολογήσουμε ότι κάποιος $x \in \mathbb{R}$ είναι το supremum του A , αρκεί να ελέγξουμε ότι ικανοποιεί το (ii) ή το (iii). Συνήθως, είναι ευκολότερο να δουλέψουμε με το (iii).

Μια άλλη παρατήρηση είναι ότι αν το A έχει μέγιστο στοιχείο τότε αυτό είναι το supremum του A (εξηγήστε γιατί). Επίσης, λόγω της τελευταίας παρατήρησης, αν με κάποιον τρόπο βρούμε το supremum του A και αυτό δεν ανήκει στο A , τότε το A δεν έχει μέγιστο στοιχείο.

Αντίστοιχες παρατηρήσεις ισχύουν για το infimum και το ελάχιστο στοιχείο ενός συνόλου.

(α) Για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $\frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^3} \leq \frac{1}{1^2} + \frac{1}{1^3} = 2$. Αυτό δείχνει ότι ο 2 είναι το μέγιστο στοιχείο του A , και έπεται ότι $2 = \sup A$.

Ο 0 είναι κάτω φράγμα του A διότι $\frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^3} > 0$ για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$. Επίσης, αν ορίσουμε $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}$, τότε η (a_n) είναι ακολουθία στοιχείων του A και $a_n \rightarrow 0$. Από τον χαρακτηρισμό (iii) του infimum, $0 = \inf A$. Όμως, $0 \notin A$, άρα το A δεν έχει ελάχιστο στοιχείο.

(β) Θα δείξουμε ότι το supremum του B είναι ο $\frac{1}{3}$ χρησιμοποιώντας τον χαρακτηρισμό (ii) του supremum. Παρατηρούμε ότι ο $\frac{1}{3}$ είναι άνω φράγμα του συνόλου αφού

$$\frac{n}{3n+1} < \frac{n}{3n} = \frac{1}{3} \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Έστω $\epsilon > 0$. Πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$\frac{n}{3n+1} > \frac{1}{3} - \epsilon \iff \frac{1}{3(3n+1)} < \epsilon \iff n > \frac{1}{9\epsilon} - \frac{1}{3}.$$

Τέτοιος $n \in \mathbb{N}$ όμως υπάρχει λόγω της Αρχιμήδειας ιδιότητας. Συνεπώς, $\sup B = \frac{1}{3}$. Αφού $\frac{1}{3} \notin B$, το B δεν έχει μέγιστο στοιχείο.

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι $\frac{1}{3 \cdot 1 + 1} = \frac{1}{4} \leq \frac{n}{3n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (παρατηρήστε ότι, ισοδύναμα, $3n+1 \leq 4n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$). Συνεπώς, ο $\frac{1}{4}$ είναι το ελάχιστο στοιχείο του B , και έπεται ότι $\frac{1}{4} = \inf B$. $\square$

Ασκηση 2. Αποδείξτε ότι το σύνολο

$$A = \{\sqrt{n+1} - \sqrt{n} : n \geq 1\}$$

είναι φραγμένο και βρείτε τα $\sup A$ και $\inf A$. Εξετάστε αν το A έχει μέγιστο ή ελάχιστο στοιχείο. Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Υπόδειξη: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι

$$0 < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} - 1.$$

Από αυτές τις ανισότητες βλέπουμε αρχικά ότι ο $\sqrt{2} - 1$ είναι το μέγιστο στοιχείο του A , και έπεται ότι $\sup A = \sqrt{2} - 1$.

Από τις ίδιες ανισότητες βλέπουμε ότι ο 0 είναι κάτω φράγμα του A και επίσης, αν θέσουμε $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ τότε η (a_n) είναι ακολουθία στοιχείων του A και $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \rightarrow 0$. Από τον χαρακτηρισμό του infimum μέσω ακολουθιών (το (iii) στην Άσκηση 4) συμπεραίνουμε ότι $\inf A = 0$. Τέλος, αφού $0 \notin A$, το A δεν έχει ελάχιστο στοιχείο. $\square$

Άσκηση 3. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή ή λανθασμένη κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις:

- (α) Ένα μη κενό πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ περιέχει πάντα το supremum του.
- (β) Αν $x < M$ για κάθε στοιχείο του μη κενού συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$, τότε $\sup A < M$.
- (γ) Αν A και B είναι μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και ισχύει ότι $\alpha < \beta$ για κάθε $\alpha \in A$ και $\beta \in B$, τότε $\sup A < \inf B$.
- (δ) Αν A και B είναι μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και ισχύει ότι $\sup A \leq \sup B$, τότε υπάρχει στοιχείο του B που είναι άνω φράγμα του συνόλου A .

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Υπόδειξη: (α) Σωστή, αφού κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει μέγιστο στοιχείο το οποίο είναι και το supremum του.

(β) Λάθος, αφού για παράδειγμα $\sup [0, 1) = 1$. Αν επιλέξουμε $M = 1$ τότε $x < M$ για κάθε $x \in [0, 1)$, όμως $\sup [0, 1) = 1 = M$.

(γ) Λάθος, αφού για παράδειγμα $\sup [0, 1) = 1 = \inf (1, 2]$ ενώ για κάθε $\alpha \in [0, 1)$ και $\beta \in (1, 2]$ ισχύει ότι $\alpha < 1 < \beta$.

(δ) Λάθος. Παίρνουμε για παράδειγμα $A = B = [0, 1)$. Έχουμε $\sup A = 1 = \sup B$ αλλά δεν υπάρχει στοιχείο του $B = A$ που να είναι άνω φράγμα του A . $\square$

Άσκηση 4. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

- (α) Έστω B φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με άπειρα στοιχεία. Τότε, για κάθε $x \in B$ ισχύει $\inf B < x < \sup B$.
- (β) Έστω A, B μη κενά, κάτω φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $A \subseteq B$. Τότε, $\inf A \leq \inf B$.
- (γ) Το σύνολο $\Gamma = \left\{ \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} : n \geq 1 \right\}$ έχει ελάχιστο στοιχείο.
- (δ) Έστω $\Delta \subset (0, +\infty)$ μη κενό σύνολο με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x \in \Delta$ υπάρχει $y \in \Delta$ τέτοιος ώστε $y < \frac{x}{2}$. Τότε, $\inf \Delta = 0$.

Υπόδειξη: (α) Λάθος. Παίρνουμε για παράδειγμα το σύνολο $B = \{-1\} \cup \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{2\}$. Το B έχει άπειρα στοιχεία και έχει ελάχιστο στοιχείο το -1 και μέγιστο στοιχείο το 2. Ειδικότερα, είναι φραγμένο και $\inf B = -1$, $\sup B = 2$.

Δεν ισχύει ότι $-1 < x$ για κάθε $x \in B$ γιατί αυτή η ανισότητα θα έπρεπε να ισχύει και για τον $x = -1 \in B$. Επίσης, δεν ισχύει ότι $x < \sup B$ για κάθε $x \in B$ γιατί αυτή η ανισότητα θα έπρεπε να ισχύει και για τον $x = 2 \in B$.

(β) Λάθος. Αν πάρουμε $A = [0, 1]$ και $B = [-1, 2]$ τότε $A \subseteq B$ και $\inf A = 0 > -1 = \inf B$.

Αντιθέτως, αν A, B είναι μη κενά, κάτω φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με $A \subseteq B$ τότε ισχύει (πάντοτε) ότι $\inf B \leq \inf A$. Για να το δείξουμε αυτό, αρκεί να δείξουμε ότι ο $\inf B$ είναι κάτω φράγμα του A . Τότε, αφού ο $\inf A$ είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του A , αναγκαστικά έχουμε ότι $\inf B \leq \inf A$.

Για να δούμε ότι ο $\inf B$ είναι κάτω φράγμα του A , θεωρούμε τυχόν $x \in A$. Αφού $A \subseteq B$ έχουμε ότι $x \in B$, και αφού ο $\inf B$ είναι κάτω φράγμα του B συμπεραίνουμε ότι $\inf B \leq x$.

(γ) Λάθος. Παρατηρούμε ότι $\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή ο 0 είναι κάτω φράγμα του Γ και $0 \notin \Gamma$. Επίσης, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\frac{1}{N} < \varepsilon$ (από την Αρχιμήδεια ιδιότητα) και τότε

$$\frac{1}{2^N} - \frac{1}{3^N} < \frac{1}{2^N} = \frac{1}{(1+1)^N} \leq \frac{1}{N+1} < \frac{1}{N} < \varepsilon,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε και την ανισότητα Bernoulli για να δούμε ότι $2^N \geq N+1$. Αφού $\frac{1}{2^N} - \frac{1}{3^N} \in \gamma$, δείξαμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x \in \Gamma$ τέτοιος ώστε $x < \varepsilon$.

Τώρα, από τον ε -χαρακτηρισμό του infimum έχουμε ότι $0 = \inf \Gamma$, και αφού $0 \notin \Gamma$ έχουμε τελικά ότι το Γ δεν έχει ελάχιστο στοιχείο.

(δ) Σωστό. Αφού $\Delta \subset (0, +\infty)$, για κάθε $x \in \Delta$ έχουμε $x > 0$, άρα ο 0 είναι κάτω φράγμα του Δ . Έστω τώρα $x_0 \in \Delta$ (οποιοδήποτε). Εφαρμόζοντας την υπόθεση βρίσκουμε $x_1 \in \Delta$ τέτοιο ώστε $x_1 < \frac{x_0}{2}$. Εφαρμόζοντας πάλι την υπόθεση (για το x_1 αυτή τη φορά) βρίσκουμε $x_2 \in \Delta$ τέτοιο ώστε $x_2 < \frac{x_1}{2} < \frac{x_0}{2^2}$. Συνεχίζοντας έτσι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ βρίσκουμε $x_n \in \Delta$ τέτοιο ώστε

$$x_n < \frac{x_0}{2^n}$$

(δείξτε το με επαγωγή). Αφού $2^n > n$, έπεται ότι

$$x_n < \frac{x_0}{n}.$$

Έστω τώρα $\varepsilon > 0$. Από την Αρχιμήδεια ιδιότητα, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{x_0}{n} < \varepsilon$, άρα $x_n < \varepsilon$ (και $x_n \in \Delta$).

Είδαμε ότι ο 0 είναι κάτω φράγμα του Δ και ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x \in \Delta$ τέτοιο ώστε $x < \varepsilon$. Από τον ε -χαρακτηρισμό του infimum έπεται ότι $0 = \inf \Delta$. $\square$

Άσκηση 5. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και άνω φραγμένο και $c > 0$. Αποδείξτε ότι $\sup(cA) = c \sup A$, όπου $cA = \{ca : a \in A\}$.

Υπόδειξη: Θέτουμε $s = \sup A$. Για κάθε $a \in A$ ισχύει ότι $a \leq s$ και, επειδή $c > 0$, έχουμε $ca \leq cs$. Αυτό δείχνει ότι ο cs είναι άνω φράγμα του cA , άρα $\sup(cA) \leq cs$.

Έστω τώρα $\varepsilon > 0$. Αφού $s = \sup A$, από τον ε -χαρακτηρισμό του supremum υπάρχει $a \in A$ τέτοιο ώστε

$$s - \frac{\varepsilon}{c} < a \leq s.$$

Πολλαπλασιάζοντας με $c > 0$ βρίσκουμε ότι

$$cs - \varepsilon < ca \leq cs.$$

Επειδή $ca \in cA$, για κάθε $\varepsilon > 0$ βρήκαμε στοιχείο του cA μεγαλύτερο από $cs - \varepsilon$. Συνεπώς, από τον ίδιο χαρακτηρισμό συμπεραίνουμε ότι $\sup(cA) = cs = c \sup A$. $\square$

Άσκηση 6. Έστω $A \subseteq (0, +\infty)$ μη κενό με $\inf A = 0$. Αποδείξτε ότι για κάθε $M > 0$ υπάρχει $a \in A$ με $1/a > M$.

Υπόδειξη: Έστω $M > 0$. Αφού $\inf A = 0$, από τον ε -χαρακτηρισμό του infimum, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $a \in A$ τέτοιο ώστε $a < \varepsilon$.

Επιλέγουμε $\varepsilon = \frac{1}{M} > 0$. Τότε, υπάρχει $a \in A$ με

$$0 < a < \frac{1}{M},$$

όπου χρησιμοποιήσαμε και το ότι $A \subseteq (0, +\infty)$. Αντιστρέφοντας την τελευταία ανισότητα, παίρνουμε $\frac{1}{a} > M$, όπως θέλαμε. $\square$

Άσκηση 7. Έστω A, B μη κενά, φραγμένα σύνολα πραγματικών αριθμών με $\sup A = \inf B$. Αποδείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $\alpha \in A$ και $\beta \in B$, τέτοια ώστε $\beta - \alpha < \varepsilon$.

[Υπόδειξη: να χρησιμοποιήσετε τον χαρακτηρισμό για τα supremum και infimum ενός υποσυνόλου του $\mathbb{R}$.]

Υπόδειξη: Θέτουμε $x = \sup A = \inf B$. Έστω $\varepsilon > 0$. Από τον χαρακτηρισμό για τα sup και inf ενός υποσυνόλου του $\mathbb{R}$ υπάρχουν $\alpha \in A$ και $\beta \in B$ τέτοια ώστε

$$\alpha > \sup A - \varepsilon/2 = x - \varepsilon/2 \text{ και } \beta < \inf B + \varepsilon/2 = x + \varepsilon/2.$$

Οπότε, έχουμε ότι $\beta - \alpha < (x + \varepsilon/2) - (x - \varepsilon/2) = \varepsilon$. □

Άσκηση 8. Έστω A, B μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $a \in A$ και για κάθε $b \in B$ ισχύει ότι $a < b$. Αποδείξτε ότι: το A είναι άνω φραγμένο, το B είναι κάτω φραγμένο, και $\sup A \leq \inf B$.

Δώστε παράδειγμα στο οποίο ικανοποιείται η υπόθεση και ισχύει ότι $\sup A = \inf B$.

Υπόδειξη: Έστω $a_0 \in A$ και $b_0 \in B$. Από την υπόθεση, για κάθε $a \in A$ έχουμε $a < b_0$, άρα το A είναι άνω φραγμένο από τον b_0 . Όμοια, για κάθε $b \in B$ έχουμε $a_0 < b$, άρα το B είναι κάτω φραγμένο από τον a_0 .

Αν δείξουμε ότι ο $\inf B$ είναι άνω φράγμα του A τότε, αφού ο $\sup A$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A , θα έχουμε ότι $\sup A \leq \inf B$.

Δείχνουμε ότι ο $\inf B$ είναι άνω φράγμα του A δείχνοντας ότι για κάθε $a \in A$ ισχύει ότι $a \leq \inf B$: Έστω $a \in A$. Από την υπόθεση, για κάθε $b \in B$ ισχύει ότι $a < b$. Έρα, ο a είναι κάτω φράγμα του B . Αφού ο $\inf B$ είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του B , συμπεραίνουμε ότι $a \leq \inf B$.

Ένα παράδειγμα συνόλων A και B που ικανοποιούν την υπόθεση αλλά ισχύει $\sup A = \inf B$ είναι να πάρουμε $A = (0, 1)$ και $B = (1, 2)$. Για κάθε $a \in A$ έχουμε $a < 1 < b$, όμως $\sup A = 1 = \inf B$. □

Άσκηση 9. Δώστε παραδείγματα μη κενών συνόλων $A, B \subseteq \mathbb{R}$ με $A \cap B = \emptyset$ και $\sup A = \inf B$, ένα όπου το κοινό άκρο ανήκει στο $A \cup B$ και ένα όπου δεν ανήκει.

Υπόδειξη: Για την πρώτη περίπτωση παίρνουμε $A = (0, 1]$ και $B = (1, 2)$. Τα σύνολα είναι μη κενά και ξένα μεταξύ τους, ενώ $\sup A = 1 = \inf B$. Επιπλέον, το κοινό άκρο 1 ανήκει στο A , άρα και στο $A \cup B$.

Για τη δεύτερη περίπτωση παίρνουμε $A = (0, 1)$ και $B = (1, 2)$. Πάλι έχουμε $A \cap B = \emptyset$ και $\sup A = 1 = \inf B$, αλλά τώρα $1 \notin A \cup B$. □