ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 2
Δυναμική

1. Ένα σώμα μάζας m είναι ακίνητο στην αρχή του άξονα x όταν αρχίζει να ασκείται επάνω του η χρονικά μεταβαλλόμενη δύναμη $F(t) = F_0\left(1 - \frac{t}{\tau}\right), t \le \tau$.

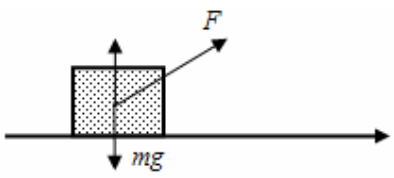
   (α) Να περιγράψετε την κίνηση του σώματος για $\tau > 0$.
   (β) Να βρείτε τη θέση και την ταχύτητα του σώματος συναρτήσει του χρόνου και να τις παραστήσετε γραφικά.
   (γ) Πόση απόσταση θα διανύσει το σώμα μέχρι να μηδενιστεί η δύναμη;
   (δ) Να βρείτε τη μέση ταχύτητα του σώματος στο διάστημα $[0,\tau]$.

   (α) Επιταχυνόμενη για $t \le \tau$, ομαλή για $t > \tau$, (β) $v(t) = \frac{F_0\tau}{m}\left[\frac{t}{\tau} - \frac{1}{2}\left(\frac{t}{\tau}\right)^2\right]$

2. Ένα σώμα μάζας m κινείται σε οριζόντιο επίπεδο x-y χωρίς τριβές. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στην αρχή των αξόνων και έχει ταχύτητα $\vec{v}(0) = v_0\hat{y}$. Αν στο σώμα ασκείται δύναμη $\vec{F} = (k - bt)\hat{x} - bt\,\hat{y}$, με k, b θετικές σταθερές:
   (α) Να υπολογίσετε την ταχύτητα και τη θέση του σώματος συναρτήσει του χρόνου.
   (β) Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των σταθερών k, b, m, v_0 ώστε το σώμα να ξαναπεράσει από την αρχή των αξόνων.

   (α) $\vec{v}(t) = \left(\frac{kt}{m} - \frac{bt^2}{2m}\right)\hat{x} + \left(v_0 - \frac{bt^2}{2m}\right)\hat{y}$, $\vec{r}(t) = \left(\frac{kt^2}{2m} - \frac{bt^3 6}{m}\right)\hat{x} + \left(v_0 t - \frac{bt^3}{6m}\right)\hat{y}$, (β) $2mbv_0 = 3k^2$

3. Τη στιγμή $t = 0$μία δύναμη μέτρου $F = 4t$ (SI) εφαρμόζεται υπό σταθερή γωνία $\theta = 30^\circ$ ως προς το οριζόντιο δάπεδο σε ένα σώμα μάζας $m = 1\,\text{kg}$ που είναι αρχικά ακίνητο. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ σώματος και δαπέδου είναι $\mu \approx \mu_s = 0.8$. Να υπολογίσετε:
   (α) Πότε θα αρχίσει να κινείται το σώμα.
   (β) Την ταχύτητα του σώματος τη στιγμή που εγκαταλείπει το έδαφος.
   (γ) Την απόσταση που θα έχει διανύσει τότε.



   (α) $t_1 = 1.6\,\text{s}$, (β) $29.8\,\text{m/s}$, (γ) $34\,\text{m}$

4. Μία ομογενής αλυσίδα μήκους L ολισθαίνει πάνω σε ένα λείο οριζόντιο τραπέζι και πέφτει από το άκρο του λόγω της βαρύτητας. Υποθέστε ότι το ποσοστό μήκους της αλυσίδας που κρέμεται από το τραπέζι αρχικά είναι f και η αρχική ταχύτητά της είναι μηδέν. Να βρείτε με πόση ταχύτητα εγκαταλείπει το τραπέζι και τον χρόνο που απαιτείται ώστε να πέσει ολόκληρη. Να μελετήσετε το ίδιο πρόβλημα αν υπάρχει τριβή μεταξύ του σώματος και του τραπεζιού, με συντελεστή στατικής τριβής μ_s και τριβής ολίσθησης μ. Πόσο πρέπει να είναι το f ώστε να αρχίσει η πτώση; Με πόση ταχύτητα θα εγκαταλείψει η αλυσίδα το τραπέζι;

   (α) $v = \sqrt{gL\left(1 - f^2\right)}$, (β) $\sqrt{\frac{L}{g}}\ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - f^2}}{f}\right)$, (γ) $f_{\min} = \frac{\mu_s}{1 + \mu_s}$, (δ) $v = \sqrt{gL(1 - f)(1 - \mu + f + \mu f)}$

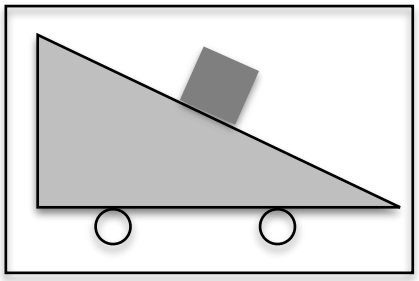
5. Σωματίδιο βάλλεται κατακόρυφα προς τα επάνω, στο ομογενές πεδίο βαρύτητας της Γης, με ταχύτητα υ_0. Κατά την κίνησή του το σώμα δέχεται δύναμη αντίστασης από τον αέρα $\vec{F} = -mk\upsilon\vec{\upsilon}$. Να λύσετε την εξίσωση κίνησης και να βρείτε την ταχύτητα και τη θέση του σώματος συναρτήσει του χρόνου και της απόστασης. Σε πόσο χρόνο και σε ποιο ύψος θα σταματήσει το σώμα;

$$(\alpha)\ \upsilon(t) = \frac{\upsilon_0 - \sqrt{\frac{g}{k}}\tan\left(\sqrt{kg}t\right)}{1 - \sqrt{\frac{k}{g}}\upsilon_0\tan\left(\sqrt{kg}t\right)},\ (\beta)\ \upsilon(y) = \sqrt{\left(\upsilon_0^2 + \frac{g}{k}\right)e^{-2ky} - \frac{g}{k}},\ (\gamma)\ t_0 = \frac{1}{\sqrt{kg}}\arctan\left(\sqrt{\frac{k}{g}}\upsilon_0\right),\ (\delta)\ H = \frac{1}{2k}\ln\left(1 + \frac{k\upsilon_0^2}{g}\right)$$

6. Σώμα μάζας m βάλλεται από τη βάση κεκλιμένου επιπέδου γωνίας θ με ταχύτητα υ_0 προς τα επάνω. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος και επιπέδου είναι μεταβλητός και δίνεται από τη σχέση $\mu(x) = \lambda x, \lambda > 0$, όπου x είναι η απόσταση από τη βάση του επιπέδου.
(α) Βρείτε πόση απόσταση θα διανύσει το σώμα μέχρι να σταματήσει στιγμιαία.
(β) Αν ο συντελεστής στατικής τριβής είναι ίσος με τον συντελεστή τριβής ολίσθησης, βρείτε τη συνθήκη ώστε να επιστρέψει το σώμα στη βάση.

$$(\alpha)\ S = \frac{\tan\theta}{\lambda}\left(\sqrt{1 + \frac{\lambda\cos\theta\,\upsilon_0^2}{g\sin^2\theta}} - 1\right),\ (\beta)\ \upsilon_0^2 \le \frac{3g\sin^2\theta}{\lambda\cos\theta}$$

7. Δίνεται το διπλανό σχήμα. Το αμαξίδιο, μάζας M κινείται προς τα δεξιά με επιτάχυνση α και επάνω στην κεκλιμένη επιφάνεια γωνίας $\theta = 30^\circ$ είναι τοποθετημένο ένα σώμα μάζας m. Ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ σώματος και επιφάνειας είναι $\mu_s = 0.4$.
(α) Ποια είναι η ελάχιστη τιμή της επιτάχυνσης α ώστε το σώμα να παραμείνει προσκολλημένο στην κεκλιμένη επιφάνεια χωρίς να πέσει;
(β) Ποια είναι η μέγιστη τιμή της επιτάχυνσης α για την οποία το σώμα δεν θα κινηθεί προς τα επάνω;

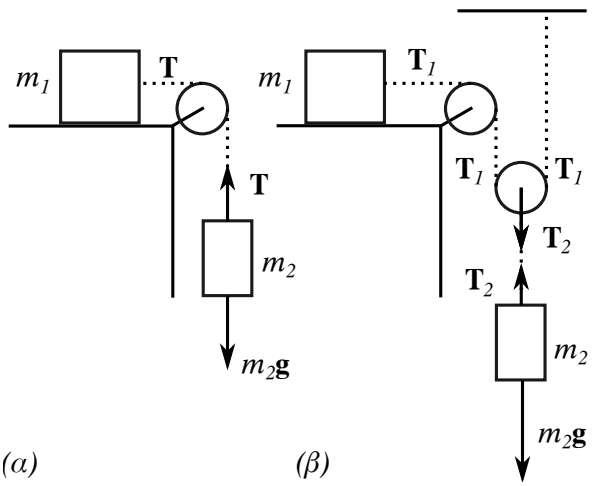


$$(\alpha)\ a_{\min} = 1.5\,\frac{m}{s^2},\ (\beta)\ a_{\max} = 5.8\,\frac{m}{s^2}$$

8. Αν οι τροχαλίες στις παρακάτω διατάξεις είναι αβαρείς και δεν υπάρχουν τριβές, να βρείτε τις επιταχύνσεις των σωμάτων και τις τάσεις των σχοινιών.

$$(\alpha)\ a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}g,\ T = \frac{2m_1m_2g}{m_1 + m_2},$$

$$(\beta)\ a_1 = 2a_2 = \frac{2m_2}{4m_1 + m_2}g,\ T_2 = 2T_1 = \frac{4m_1m_2g}{4m_1 + m_2}$$



(α) (β)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΦΥΣΙΚΗΣ Ι
ΕΝΟΤΗΤΑ 2 ΝΟΜΟΙ ΝΕΥΤΩΝΑ - ΔΥΝΑΜΙΚΗ

1. Α) Πώς θα μετρούσατε το ύψος ενός κτιρίου αν είσαστε στην ταράτσα του μια ηλιόλουστη μέρα και μπορούσατε να χρησιμοποιήσετε μόνο ένα χάρακα και ένα χρονόμετρο; (Χρειάζεται μία απάντηση - Υπάρχουν τουλάχιστον 4 απαντήσεις!).
Β) Εργαζόμενος κοντά στο Βόρειο Πόλο έχει απομακρυνθεί περπατώντας από τη βάση του όταν ξαφνικά ο συντελεστής τριβής μεταξύ των παπουτσιών του και του πάγου γίνεται μηδέν. Πώς θα γυρίσει πίσω; (Χρειάζεται μία απάντηση - Υπάρχουν τουλάχιστον 3 απαντήσεις!).

2. Ενα σώμα μάζας m αφήνεται με μηδενική αρχική ταχύτητα στην επιφάνεια μιας λίμνης (πολύ μεγάλου βάθους) και στη συνέχεια βυθίζεται κατακόρυφα προς τον πυθμένα της λίμνης. Στο σώμα ασκείται το βάρος του $\vec{B} = mg\hat{z}$, η άνωση $\vec{A} = -A\hat{z}$ και μια δύναμη αντίστασης $\vec{F} = -\gamma\vec{u}$ όπου γ είναι μια σταθερά και $\vec{u}$ η ταχύτητα του σώματος. Υποθέτουμε ότι A<mg. (α) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του σώματος σα συνάρτηση του χρόνου t. (β) Να βρείτε τη θέση του σώματος σα συνάρτηση του χρόνου t.

3. Σφαίρα μάζας m εκτοξεύεται από το σημείο (0,0) με αρχική ταχύτητα $\vec{u}_0$ που σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα x. Το σημείο βολής βρίσκεται σε ύψος h από το έδαφος. Κατά την κίνησή της η σφαίρα υφίσταται αντίδραση $-b\vec{u}$ από την ατμόσφαιρα, όπου $\vec{u}$ είναι η ταχύτητα της σφαίρας και b μια θετική σταθερά.
(α) Βρείτε τις συναρτήσεις $u_x(t)$ και $u_y(t)$ κατά την κίνηση της σφαίρας.
(β) Βρείτε τις συντεταγμένες x(t) και y(t) της σφαίρας.
(γ) Γράψετε την εξίσωση που προσδιορίζει την τιμή του χρόνου τ όταν η σφαίρα προσκρούει στο έδαφος, χωρίς να επιχειρήσετε να τη λύσετε. Πόσος είναι ο χρόνος τ στην περίπτωση που ισχύει τ>>m/b;

4. Σωματίδιο μάζας m αφήνεται από την ηρεμία από ύψος H πάνω από οριζόντιο έδαφος να πέσει υπό την επίδραση του βάρους του μέσα σε μέσο που προκαλεί αντίσταση μέτρου mku^2, όπου k θετική σταθερά και u η ταχύτητά του σωματιδίου. Το σωματίδιο χτυπά στο έδαφος και αναπηδά κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα λ φορές την ταχύτητα που είχε ακριβώς πριν έρθει σε επαφή με το έδαφος. Να βρείτε το νέο μέγιστο ύψος h στο οποίο φτάνει το σωματίδιο.

5. Πύραυλος καταναλώνει καύσιμα με σταθερό ρυθμό εκροής μ (μ>0, μ=-dm/dt), εκτοξεύοντας τα καυσαέρια προς τα πίσω με σχετική ταχύτητα u. Ο πύραυλος είναι προσαρμοσμένος (οριζόντια) σε σιδηροδρομικό βαγόνι, που κατά την πυροδότηση βρίσκεται σε ηρεμία και το όλο σύστημα υπόκειται σε αντίσταση –κυ, όπου κ θετική σταθερά και υ η ταχύτητά του.
Α) Θεωρώντας τη μεταβολή της ορμής σε μικρό χρονικό διάστημα Δt, να συνάγετε την εξίσωση κίνησης στη μορφή m du/dm = ;
Β) Με βάση το προηγούμενο να υπολογίσετε το λόγο: m/m_o
Γ) Αν η αντίσταση ήταν $–λυ^2$, το υ ποια μαθηματική σχέση υπακούει πλέον;