ΣΕΜΦΕ
Ασκήσεις στη Συναρτησιακή Ανάλυση Ι
(4ο φυλλάδιο ασκήσεων)

Ασκηση 1 (Τελεστής δεξιάς μετατόπισης)**.** *Έστω* $S : l^2 \to l^2$ *με τύπο*

$$S(x_1, x_2, ...) = (0, x_1, x_2, ...) .$$

Να δείξετε ότι ο S *είναι καλά ορισμένος και γραμμικός. Στη συνέχεια να βρείτε τα* $\ker S$ *και* $\operatorname{Im} S$.

Ασκηση 2. *Έστω* $T : l^\infty \to l^\infty$ *με τύπο*

$$T(x) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, ...) , \text{ για κάθε } x = (x_n) \in l^\infty .$$

Να βρείτε τον $\ker T$. *Ποια είναι η διάσταση του;*

Ασκηση 3. *Να δείξετε ότι οι παρακάτω τελεστές είναι γραμμικοί και στη συνέχεια να βρείτε τα* $\ker T$ *και* $\operatorname{Im} T$.

(ι) $T : C([0, 1]) \to \mathbb{R}$, *με τύπο* $Tf = f(0)$.

(ιι) $T : C^1([0, 1]) \to C([0, 1])$, *με τύπο* $Tf = f'$.

Ασκηση 4. *Έστω* $T : X \to Y$ *γραμμικός τελεστής.*

(ι) Να δείξετε ότι $\ker T \subseteq \ker T^2$. *Ισχύει ο αντίστροφος εγκλεισμός; Αν όχι βρείτε ένα αντιπαράδειγμα.*

(ιι) Αν $X = Y$ *να δείξετε ότι* $\ker T = \ker T^2$ *αν και μόνο αν* $\ker T \cap \operatorname{Im} T = \{0\}$.

(Σημείωση: $T^2 = T \circ T$.*)*