

ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
1ο Φυλλάδιο Ασκήσεων (υποδείξεις)

Άσκηση 1. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει ρητός αριθμός α τέτοιος ώστε $\alpha^2 = 3$.

Υπόδειξη: Έστω ότι υπάρχουν φυσικοί αριθμοί m, n (μπορούμε να υποθέσουμε ότι έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη τον 1) τέτοιοι ώστε

$$\frac{m^2}{n^2} = 3.$$

Τότε $m^2 = 3n^2$, δηλαδή ο m^2 είναι πολλαπλάσιο του 3. Ισχυριζόμαστε ότι τότε και ο m είναι πολλαπλάσιο του 3. Πράγματι, αν αυτό δεν συμβαίνει τότε ο m θα είναι της μορφής $3k + 1$ ή $3k + 2$. Τότε όμως $(3k + 1)^2 = 3(3k^2 + 2k) + 1$ ή $(3k + 2)^2 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$ αντίστοιχα. Δηλαδή ο m^2 δεν είναι πολλαπλάσιο του 3, άτοπο.

Επομένως $m = 3k$, για κάποιον φυσικό k , απ' όπου έπεται ότι $3n^2 = m^2 = 9k^2$. Τότε $n^2 = 3k^2 \implies$ ο n^2 άρα και ο n θα είναι πολλαπλάσια του 3. Αυτό είναι άτοπο αφού έχουμε υποθέσει ότι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των m και n είναι ο 1. $\square$

Άσκηση 2. (α) Αποδείξτε ότι ο αριθμός $\sqrt{10}$ είναι άρρητος.

(β) Αποδείξτε ότι ο αριθμός $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ είναι άρρητος.

Υπόδειξη: (α) Εργαζόμαστε με απαγωγή σε άτοπο, όπως στην προηγούμενη άσκηση. Υποθέτουμε ότι $\sqrt{10} = \frac{m}{n}$, όπου m, n είναι θετικοί ακέραιοι με $\gcd(m, n) = 1$. Υψώνοντας στο τετράγωνο παίρνουμε

$$m^2 = 10n^2.$$

Άρα ο m^2 είναι άρτιος, επομένως και ο m είναι άρτιος (εξηγήστε γιατί το τετράγωνο περιττού αριθμού είναι περιττός). Γράφουμε $m = 2k$ και αντικαθιστούμε στην προηγούμενη ισότητα:

$$4k^2 = 10n^2 \implies 2k^2 = 5n^2.$$

Το αριστερό μέλος είναι άρτιο. Επειδή ο 5 είναι περιττός, συμπεραίνουμε ότι ο n^2 , και επομένως ο n , είναι άρτιος. Αυτό αντιφάσκει με την υπόθεση ότι $\gcd(m, n) = 1$.

(β) Αξιοποιούμε το αποτέλεσμα της πρώτης άσκησης, ότι ο $\sqrt{3}$ είναι άρρητος. Υποθέτουμε, προς άτοπο, ότι

$$r = \sqrt{3} + \sqrt{5} \in \mathbb{Q}.$$

Επειδή $r > 0$, ο αριθμός $2/r$ είναι επίσης ρητός. Παρατηρούμε ότι, πολλαπλασιάζοντας με τη συζυγή παράσταση, έχουμε

$$(\sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{5} - \sqrt{3}) = 5 - 3 = 2.$$

Συνεπώς,

$$\sqrt{5} - \sqrt{3} = \frac{2}{r} \in \mathbb{Q}.$$

Αφαιρούμε αυτή την ισότητα από τη σχέση $r = \sqrt{3} + \sqrt{5}$, και έχουμε

$$2\sqrt{3} = r - \frac{2}{r}.$$

Το δεξιό μέλος είναι ρητός αριθμός. Τότε ο $\sqrt{3}$ είναι ρητός (εξηγήστε γιατί) και καταλήγουμε σε άτοπο. $\square$

Άσκηση 3. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή αποδείξτε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Υπόδειξη: Εφαρμόζουμε μαθηματική επαγωγή ως προς n . Ονομάζουμε $P(n)$ την ισότητα

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Βάση της επαγωγής: Για $n = 1$, το αριστερό μέλος είναι 2, ενώ το δεξιό είναι $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3} = 2$.

Επαγωγικό βήμα: Υποθέτουμε ότι η $P(k)$ ισχύει για κάποιον $k \geq 1$. Για να αποδείξουμε την $P(k+1)$, προσθέτουμε τον επόμενο όρο $(k+1)(k+2)$ και χρησιμοποιούμε την επαγωγική υπόθεση:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 + \cdots + k(k+1) + (k+1)(k+2) &= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) \\ &= (k+1)(k+2) \left(\frac{k}{3} + 1 \right). \end{aligned}$$

Βγάζουμε κοινό παρονομαστή μέσα στην παρένθεση και ελέγχουμε ότι παίρνουμε ακριβώς

$$\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3},$$

δηλαδή το δεξιό μέλος της $P(k+1)$. Αυτό ολοκληρώνει το επαγωγικό βήμα. $\square$

Άσκηση 4. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή αποδείξτε ότι, για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύουν οι ανισότητες

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$$

και

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

Υπόδειξη: (α) Για $n = 1$ ζητάμε να ισχύει η ανισότητα $1 < 2\sqrt{1}$, δηλαδή $1 < 2$ που ισχύει.

Υποθέτουμε ότι, για κάποιον $k \geq 1$ έχουμε $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{k}$ και θα δείξουμε ότι

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1}.$$

Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}},$$

συνεπώς (εξηγήστε γιατί) αρκεί να δείξουμε ότι $2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1}$. Η τελευταία ανισότητα είναι ισοδύναμη με την $2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) > \frac{1}{\sqrt{k+1}}$. Όμως, πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας με τη συζυγή παράσταση βλέπουμε ότι

$$2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = \frac{2}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} > \frac{2}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

(β) Για $n = 1$ ζητάμε να ισχύει η ανισότητα $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{4}}$, η οποία ισχύει ως ισότητα.

Υποθέτουμε ότι, για κάποιον $k \geq 1$ έχουμε $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2k-1}{2k} \leq \frac{1}{\sqrt{3k+1}}$ και θα δείξουμε ότι

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} \leq \frac{1}{\sqrt{3k+4}}.$$

Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} \leq \frac{1}{\sqrt{3k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2},$$

συνεπώς (εξηγήστε γιατί) αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{1}{\sqrt{3k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} \leq \frac{1}{\sqrt{3k+4}}$. Η τελευταία ανισότητα είναι ισοδύναμη με την $1 + \frac{3}{3k+1} = \frac{3k+4}{3k+1} \leq \left(\frac{2k+2}{2k+1}\right)^2 = \frac{4k^2+8k+4}{4k^2+4k+1} = 1 + \frac{4k+3}{4k^2+4k+1}$. Αρκεί λοιπόν να ελέγξουμε ότι $3(4k^2+4k+1) \leq (3k+1)(4k+3)$. Η τελευταία ανισότητα είναι ισοδύναμη με την $12k^2+12k+3 < 12k^2+13k+3$, η οποία ισχύει αφού $k > 0$. $\square$

Άσκηση 5. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή αποδείξτε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}.$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιούμε μαθηματική επαγωγή. Έστω $P(n)$ η πρόταση

$$1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}.$$

Βάση της επαγωγής: Για $n = 1$, η σχέση γράφεται

$$1 + 3 = \frac{3^2 - 1}{2} = 4,$$

οπότε ισχύει.

Επαγωγικό βήμα: Υποθέτουμε ότι για κάποιον $k \geq 1$ ισχύει η $P(k)$, δηλαδή

$$1 + 3 + \dots + 3^k = \frac{3^{k+1} - 1}{2}.$$

Στο άθροισμα για $k+1$ εμφανίζεται ένας μόνο επιπλέον όρος, ο 3^{k+1} . Επομένως, από την επαγωγική υπόθεση,

$$\begin{aligned} 1 + 3 + \dots + 3^k + 3^{k+1} &= \frac{3^{k+1} - 1}{2} + 3^{k+1} \\ &= \frac{3^{k+1} - 1 + 2 \cdot 3^{k+1}}{2}. \end{aligned}$$

Συνδυάζουμε τους όρους που περιέχουν 3^{k+1} και χρησιμοποιούμε την $3 \cdot 3^{k+1} = 3^{k+2}$. Έτσι καταλήγουμε στη σχέση

$$1 + 3 + \dots + 3^{k+1} = \frac{3^{k+2} - 1}{2},$$

που είναι ακριβώς η $P(k+1)$. $\square$

Άσκηση 6. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή αποδείξτε ότι το πλήθος των υποσυνόλων ενός συνόλου με n στοιχεία είναι ίσο με 2^n .

Υπόδειξη: Θέλουμε να δείξουμε με επαγωγή ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει η πρόταση

$\Pi(n)$: Αν το S έχει n στοιχεία τότε το S έχει ακριβώς 2^n υποσύνολα.

Αν $n = 1$ τότε το S είναι μονοσύνολο και έχει ακριβώς δύο υποσύνολα, το $\emptyset$ και το S . Συνεπώς, η $\Pi(1)$ αληθεύει.

Υποθέτουμε ότι η $\Pi(k)$ αληθεύει. Έστω $S = \{x_1, \dots, x_k, x_{k+1}\}$ ένα σύνολο με $(k+1)$ στοιχεία. Θεωρούμε το σύνολο

$$T = S \setminus \{x_{k+1}\} = \{x_1, \dots, x_k\}.$$

Το T έχει k στοιχεία, οπότε έχει 2^k υποσύνολα. Τώρα, κάθε υποσύνολο του S θα περιέχει ή δεν θα περιέχει το x_{k+1} . Τα υποσύνολα του S που δεν περιέχουν το x_{k+1} είναι ακριβώς τα υποσύνολα του T , δηλαδή το πλήθος τους είναι 2^k . Από την άλλη πλευρά, κάθε υποσύνολο του S που περιέχει το x_{k+1} προκύπτει από

κάποιο υποσύνολο του T με την προσθήκη του x_{k+1} (αντίστροφα, κάθε υποσύνολο του T προκύπτει από κάποιο υποσύνολο του S που περιέχει το x_{k+1} με την αφαίρεση του x_{k+1}). Δηλαδή, το πλήθος των υποσυνόλων του S που περιέχουν το x_{k+1} είναι 2^k (όσα είναι τα υποσύνολα του T). Έπεται ότι το συνολικό πλήθος των υποσυνόλων του S είναι

$$2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}.$$

Δηλαδή, η $\Pi(k+1)$ αληθεύει.

Συνεπώς, η $\Pi(n)$ αληθεύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$. □

Άσκηση 7. Αποδείξτε ότι κάθε ακέραιος $n \geq 2$ έχει έναν πρώτο διαιρέτη $p \leq \sqrt{n}$, εκτός αν ο ίδιος ο n είναι πρώτος.

Υπόδειξη: Αποδείξτε ξεχωριστά τις δύο κατευθύνσεις της ισοδυναμίας.

Πρώτη κατεύθυνση: Έστω ότι ο $n \geq 2$ είναι πρώτος. Ο μοναδικός θετικός πρώτος διαιρέτης του είναι ο ίδιος ο n . Ελέγχουμε ότι $n > \sqrt{n}$ όταν $n > 1$. Άρα κανένας πρώτος διαιρέτης του n δεν μπορεί να είναι μικρότερος ή ίσος του $\sqrt{n}$.

Αντίστροφη κατεύθυνση: Υποθέτουμε ότι ο n δεν είναι πρώτος, δηλαδή είναι σύνθετος, αφού $n \geq 2$. Τότε μπορούμε να γράψουμε

$$n = ab, \quad 2 \leq a \leq b < n,$$

με a, b φυσικούς αριθμούς. Εφόσον $a \leq b$, έχουμε

$$a^2 \leq ab = n \implies a \leq \sqrt{n}.$$

Κάθε ακέραιος $a \geq 2$ έχει τουλάχιστον έναν πρώτο διαιρέτη p . Επιλέγουμε έναν τέτοιο p και παρατηρούμε ότι

$$p \mid a, \quad a \mid n, \quad p \leq a \leq \sqrt{n}.$$

Άρα $p \mid n$ και $p \leq \sqrt{n}$. Αυτό δείχνει ότι, αν ο n δεν έχει πρώτο διαιρέτη μικρότερο ή ίσο του $\sqrt{n}$, τότε είναι αναγκαστικά πρώτος (εξηγήστε γιατί). □