

ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
2ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Ασκηση 1. Αποδείξτε ότι τα σύνολα

$$A = \left\{ \frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^3} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$$
$$B = \left\{ \frac{n}{3n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

είναι φραγμένα και βρείτε το supremum και το infimum τους. Εξετάστε αν έχουν μέγιστο ή ελάχιστο στοιχείο. Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Ασκηση 2. Αποδείξτε ότι το σύνολο

$$A = \{ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} : n \geq 1 \}$$

είναι φραγμένο και βρείτε τα $\sup A$ και $\inf A$. Εξετάστε αν το A έχει μέγιστο ή ελάχιστο στοιχείο. Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Ασκηση 3. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή ή λανθασμένη κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις:

- (α) Ένα μη κενό πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ περιέχει πάντα το supremum του.
- (β) Αν $x < M$ για κάθε στοιχείο του μη κενού συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$, τότε $\sup A < M$.
- (γ) Αν A και B είναι μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και ισχύει ότι $\alpha < \beta$ για κάθε $\alpha \in A$ και $\beta \in B$, τότε $\sup A < \inf B$.
- (δ) Αν A και B είναι μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και ισχύει ότι $\sup A \leq \sup B$, τότε υπάρχει στοιχείο του B που είναι άνω φράγμα του συνόλου A .

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Ασκηση 4. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

- (α) Έστω B φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με άπειρα στοιχεία. Τότε, για κάθε $x \in B$ ισχύει $\inf B < x < \sup B$.
- (β) Έστω A, B μη κενά, κάτω φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $A \subseteq B$. Τότε, $\inf A \leq \inf B$.
- (γ) Το σύνολο $\Gamma = \left\{ \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} : n \geq 1 \right\}$ έχει ελάχιστο στοιχείο.
- (δ) Έστω $\Delta \subset (0, +\infty)$ μη κενό σύνολο με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x \in \Delta$ υπάρχει $y \in \Delta$ τέτοιος ώστε $y < \frac{x}{2}$. Τότε, $\inf \Delta = 0$.

Ασκηση 5. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και άνω φραγμένο και $c > 0$. Αποδείξτε ότι $\sup(cA) = c \sup A$, όπου $cA = \{ca : a \in A\}$.

Ασκηση 6. Έστω $A \subseteq (0, +\infty)$ μη κενό με $\inf A = 0$. Αποδείξτε ότι για κάθε $M > 0$ υπάρχει $a \in A$ με $1/a > M$.

Ασκηση 7. Έστω A, B μη κενά, φραγμένα σύνολα πραγματικών αριθμών με $\sup A = \inf B$. Αποδείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $\alpha \in A$ και $\beta \in B$, τέτοια ώστε $\beta - \alpha < \varepsilon$.

[Υπόδειξη: να χρησιμοποιήσετε τον χαρακτηρισμό για τα supremum και infimum ενός υποσυνόλου του $\mathbb{R}$.]

Ασκηση 8. Έστω A, B μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $a \in A$ και για κάθε $b \in B$ ισχύει ότι $a < b$. Αποδείξτε ότι: το A είναι άνω φραγμένο, το B είναι κάτω φραγμένο, και $\sup A \leq \inf B$.

Δώστε παράδειγμα στο οποίο ικανοποιείται η υπόθεση και ισχύει ότι $\sup A = \inf B$.

Ασκηση 9. Δώστε παραδείγματα μη κενών συνόλων $A, B \subseteq \mathbb{R}$ με $A \cap B = \emptyset$ και $\sup A = \inf B$, ένα όπου το κοινό άκρο ανήκει στο $A \cup B$ και ένα όπου δεν ανήκει.