ΣΕΜΦΕ
Ασκήσεις στη Συναρτησιακή Ανάλυση Ι
(3ο φυλλάδιο ασκήσεων)

Ασκηση 1. *Να δείξετε ότι ο χώρος*

$$X = \{f \in C([a,b]) : f(a) = 0\}$$

με τη νόρμα $\|\cdot\|_\infty$ *είναι χώρος Banach.*
(Υπόδειξη: να χρησιμοποιήσετε την άσκηση 5 του φυλ. 2)

Ασκηση 2. *Με* l^∞ *συμβολίζουμε τον χώρο των φραγμένων πραγματικών ακολουθιών. Να δείξετε ότι ο* l^∞ *εφοδιασμένος με τη νόρμα*

$$\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|\,, \text{ για } x = (x_n) \in l^\infty$$

είναι χώρος Banach.

Ασκηση 3. *Με* c_0 *συμβολίζουμε τον χώρο των μηδενικών ακολουθιών. Να δειξετε ότι ο* c_0 *εφοδιασμένος με τη νόρμα* $\|\cdot\|_\infty$ *είναι χώρος Banach.*
(Υπόδειξη: να χρησιμοποιήσετε την άσκηση 5 του φυλ. 2)

Ασκηση 4. *Έστω συνάρτηση* $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ *με* $g(x) > 0$, *για κάθε* $x \in [0,1]$. *Αν* $f \in C([0,1])$ *θέτουμε*

$$\|f\|_g = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|g(x)\,.$$

(ι) Να δείξετε ότι η $\|\cdot\|_g$ *είναι μία νόρμα στον* $C([0,1])$.

(ιι) Αν $\inf_{x\in[0,1]} g(x) = m > 0$ *και* $\sup_{x\in[0,1]} g(x) = M < +\infty$, *να δείξετε ότι η* $\|\cdot\|_g$ *είναι ισοδύναμη νόρμα με την* $\|\cdot\|_\infty$.

Ασκηση 5. *Έστω* $X = C^1([-1,1])$. *Θέτουμε* $\|f\|_1 = \|f\|_\infty$, $\|f\|_2 = \|f'\|_\infty$ *και* $\|f\| = \|f\|_1 + \|f\|_2$. *Να δείξετε ότι*

(ι) o $(X, \|\cdot\|_1)$ *είναι χώρος με νόρμα, αλλά δεν είναι χώρος Banach,*

(ιι) η $\|\cdot\|_2$ *δεν είναι νόρμα στον* X,

(ιιι) o $(X, \|\cdot\|)$ *είναι χώρος Banach.*