Μιγαδικοί Αριθμοί

Μια σύντομη εισαγωγή

Βασίλειος Γρηγοριάδης
Επίκουρος Καθηγητής ΣΕΜΦΕ - ΕΜΠ

12 Οκτωβρίου 2026

Περιεχόμενα

Εισαγωγή **1**

1 Πώς προέκυψε η ανάγκη για μιγαδικούς αριθμούς **2**

2 Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών **3**

3 Παραδείγματα μιγαδικών αριθμών **4**

4 Η μορφή $x + yi$ **5**

5 Πράξεις με μιγαδικούς αριθμούς: μέτρο, συζυγής και αντίστροφος **6**

6 Η γεωμετρία του $\mathbb{C}$ **9**

7 Πολική μορφή **13**

8 Ρίζες της μονάδας **21**

Παράρτημα Α: Ύπαρξη και Μοναδικότητα του $\mathbb{C}$ **26**

Παράρτημα Β: Υποδείξεις και Λύσεις των Ασκήσεων **42**

Εισαγωγή

Οι μιγαδικοί αριθμοί αποτελούν μια επέκταση των πραγματικών αριθμών: περιέχουν όλους τους πραγματικούς αριθμούς, αλλά και νέους αριθμούς που μας επιτρέπουν να λύνουμε εξισώσεις οι οποίες δεν έχουν λύσεις στο $\mathbb{R}$. Επίσης, οι μιγαδικοί αριθμοί εμφανίζονται φυσικά σε πολλές περιοχές των μαθηματικών και των εφαρμογών. Αναφέρουμε ενδεικτικά τη γραμμική άλγεβρα, τις διαφορικές εξισώσεις, την ανάλυση Fourier, την

κβαντική μηχανική, τη θεωρία σημάτων και την υδροδυναμική. Στη ναυπηγική, για παράδειγμα, χρησιμοποιούνται στη μελέτη κυμάτων και ταλαντώσεων, όπου είναι χρήσιμο να περιγράφονται ταυτόχρονα το πλάτος και η φάση μιας αρμονικής κίνησης.

Στόχος αυτών των σημειώσεων είναι να παρουσιάσουν κάποια βασικά εισαγωγικά στοιχεία των μιγαδικών αριθμών: πράξεις με αυτούς, αναπαράσταση στο $\mathbb{R}^2$, γεωμετρική ερμηνεία και πολική μορφή. Επίσης, δίνονται κάποιες ασκήσεις, ενώ παρατίθενται και δύο παραρτήματα. Το πρώτο παράρτημα είναι κάπως πιο θεωρητικό και αφορά την ύπαρξη και μοναδικότητα του αριθμητικού συστήματος των μιγαδικών αριθμών και το δεύτερο παράρτημα έχει τις λύσεις των ασκήσεων.

1 Πώς προέκυψε η ανάγκη για μιγαδικούς αριθμούς

Η ανάγκη για τους μιγαδικούς αριθμούς δεν εμφανίστηκε αρχικά από μια αφηρημένη επιθυμία να "επεκτείνουμε" τους πραγματικούς αριθμούς. Ένα από τα ιστορικά κίνητρα προέκυψε κατά τη μελέτη των κυβικών εξισώσεων, δηλαδή εξισώσεων τρίτου βαθμού.

Παράδειγμα 1.1. Θεωρούμε την εξίσωση

$$x^3 = 15x + 4. \tag{E1}$$

Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι

$$x = 4$$

είναι μια πραγματική λύση της εξίσωσης.

Για κυβικές εξισώσεις αυτού του τύπου υπάρχει αλγεβρικός τύπος επίλυσης. Αυτός ο τύπος είναι εξαιρετικά σύνθετος και δεν θα τον δώσουμε. Αρκούμαστε να αναφέρουμε ότι αν τον εφαρμόσουμε στην εξίσωση (E1) οδηγούμαστε στην έκφραση

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}. \tag{E2}$$

Παρουσιάζεται λοιπόν ένα παράδοξο: η εξίσωση έχει την πραγματική λύση $x = 4$, αλλά ο τύπος μάς αναγκάζει να συναντήσουμε την τετραγωνική ρίζα αρνητικής ποσότητας, κάτι που φυσικά δεν υπάρχει στο $\mathbb{R}$.

Τον 16ο αιώνα ο Rafael Bombelli μελέτησε τέτοιες εκφράσεις και πρότεινε την ύπαρξη του "φανταστικού" αριθμού $\sqrt{-1}$. Δηλαδή ενός αριθμού που το τετράγωνό του είναι ίσο με -1, και που "αλληλεπιδρά" με τους πραγματικούς αριθμούς με τις συνήθεις αλγεβρικές ιδιότητες. Ας συμβολίσουμε αυτόν τον αριθμό με i. Τότε

$$i^2 = -1,$$

και το $11i$ είναι μία τετραγωνική ρίζα του -121, αφού

$$(11i)^2 = 121 \cdot i^2 = 121 \cdot (-1) = -121.$$

Παρατηρούμε τώρα ότι

$$\begin{aligned}(2+i)^3 &= 8 + 12i + 6i^2 + i^3 = 8 + 12i + 6 \cdot (-1) + i \cdot i^2 \\ &= 8 - 6 + 12i - i = 2 + 11i,\end{aligned}$$

οπότε το $2+i$ είναι μία κυβική ρίζα του $2+11i$. Αντίστοιχα,

$$(2-i)^3 = 2-11i,$$

οπότε το $2-i$ είναι μία κυβική ρίζα του $2-11i$. Επιλέγοντας αυτές τις δύο κυβικές ρίζες στην (Ε2) παίρνουμε

$$x = (2+i)+(2-i) = 4.$$

Δηλαδή ανακτήσαμε μία από τις λύσεις της εξίσωσης (Ε1)!

Βλέπουμε λοιπόν ότι, παρόλο που τα δεδομένα και η λύση σε ένα πρόβλημα μπορεί να είναι πραγματικοί αριθμοί, για να φτάσουμε στη λύση ενδέχεται να χρειαστεί να κινηθούμε εκτός του $\mathbb{R}$.

Το πιο πάνω παράδειγμα μας οδηγεί στο ακόλουθο πρόβλημα:

Μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα αριθμητικό σύστημα που να περιέχει τους πραγματικούς αριθμούς και έναν αριθμό i με $i^2 = -1$;

Η απάντηση είναι θετική. Το σύστημα αυτό είναι το σύνολο των *μιγαδικών αριθμών*, το οποίο συμβολίζουμε με $\mathbb{C}$.

2 Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών

Θέλουμε τώρα να περιγράψουμε τι εννοούμε με τον όρο *μιγαδικοί αριθμοί*.

Ορισμός 2.1 (Χωρίς πλήρη αυστηρότητα). Λέμε ότι ένα σύνολο $\mathbb{C}$ αποτελεί ένα *σύστημα μιγαδικών αριθμών* αν μπορούν να οριστούν σε αυτό δύο πράξεις $+$ και $\cdot$ με τις ακόλουθες ιδιότητες.

(α) Το $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ικανοποιεί τους ίδιους *αλγεβρικούς κανόνες* για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό όπως το $\mathbb{R}$: οι πράξεις είναι προσεταιριστικές και αντιμεταθετικές, ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα, υπάρχουν ουδέτερα και αντίθετα στοιχεία, και κάθε μη μηδενικό στοιχείο έχει πολλαπλασιαστικό αντίστροφο.

(β) Ισχύει

$$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C},$$

και οι πράξεις του $\mathbb{C}$ επεκτείνουν τις συνηθισμένες πράξεις του $\mathbb{R}$. Επιτρέπουμε η πιο πάνω συμπερίληψη να προκύπτει μέσω της ταύτισης του $\mathbb{R}$ με ένα "αντίτυπό" του, π.χ. με το σύνολο όλων των ζευγών της μορφής $(x, 0)$, όπου $x \in \mathbb{R}$. (Αποφεύγουμε την αυστηρή διατύπωση.)

Σημείωση. Από τις ιδιότητες (α) και (β) προκύπτει ότι τα ουδέτερα στοιχεία της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού είναι οι πραγματικοί αριθμοί 0 και 1, αντίστοιχα.

(γ) Υπάρχει ένα στοιχείο $i \in \mathbb{C}$ τέτοιο ώστε

$$i \cdot i = -1.$$

(δ) Το $\mathbb{C}$ είναι το "μικρότερο δυνατό" σύνολο με τις παραπάνω ιδιότητες. (Αποφεύγουμε την αυστηρή διατύπωση.)

Τα στοιχεία ενός συστήματος μιγαδικών αριθμών τα ονομάζουμε *μιγαδικοί αριθμοί*.

Η ιδιότητα (β) σημαίνει, για παράδειγμα, ότι αν θεωρήσουμε τους πραγματικούς αριθμούς 5 και 6 ως στοιχεία του $\mathbb{C}$, τότε η πρόσθεσή τους μέσα στο $\mathbb{C}$ εξακολουθεί να δίνει το αποτέλεσμα 11. Με τον ίδιο τρόπο, κάθε πράξη που γίνεται αποκλειστικά μεταξύ πραγματικών αριθμών δίνει το ίδιο αποτέλεσμα είτε εργαζόμαστε στο $\mathbb{R}$ είτε στο $\mathbb{C}$.

Η ιδιότητα (δ) εκφράζει ότι δεν θέλουμε να προσθέσουμε αυθαίρετα νέα στοιχεία. Ξεκινάμε από τους πραγματικούς αριθμούς, προσθέτουμε ένα στοιχείο i με $i^2 = -1$ και στη συνέχεια δεχόμαστε μόνο όσα στοιχεία επιβάλλονται από τους συνήθεις αλγεβρικούς κανόνες.

Ένα τέτοιο σύνολο πράγματι υπάρχει και θα το αποδείξουμε αυτό στο Παράρτημα στο τέλος αυτών των σημειώσεων. Στην επόμενη ενότητα βλέπουμε ποια συγκεκριμένη μορφή έχουν τα στοιχεία αυτού του συνόλου.

3 Παραδείγματα μιγαδικών αριθμών

Από τον ορισμό του $\mathbb{C}$ μπορούμε ήδη να κατασκευάσουμε πολλά παραδείγματα μιγαδικών αριθμών. Καταρχάς, επειδή $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, κάθε πραγματικός αριθμός είναι και μιγαδικός. Για παράδειγμα οι αριθμοί

$$5, \qquad -\frac{1}{3}, \qquad \sqrt{2}$$

είναι στοιχεία του $\mathbb{C}$.

Εφόσον $i \in \mathbb{C}$, μπορούμε επίσης να τον πολλαπλασιάσουμε με πραγματικούς αριθμούς. Έτσι τα

$$i, \qquad 3i, \qquad -i, \qquad 2i$$

είναι μιγαδικοί αριθμοί. Γενικότερα, για κάθε $y \in \mathbb{R}$ ο αριθμός yi ανήκει στο $\mathbb{C}$.

Στη συνέχεια μπορούμε να προσθέσουμε τις δύο προηγούμενες κατηγορίες μιγαδικών αριθμών. Παίρνουμε έτσι αριθμούς όπως

$$1 + 3i, \qquad -\frac{1}{3} + 8i, \qquad \sqrt{2} - i,$$

και γενικότερα αριθμούς της μορφής

$$x + yi, \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

Μπορούμε να πάρουμε και πιο σύνθετες αλγεβρικές παραστάσεις, για παράδειγμα το γινόμενο μέσα στο $\mathbb{C}$ του $(1 + 3i)$ με το i, ή το γινόμενο το $(1 + 3i)$ με το $(5 + 4i)$, για να δημιουργήσουμε και άλλα παραδείγματα μιγαδικών αριθμών. Παρατηρούμε όμως ότι

$$(1 + 3i)i = i + 3i^2 = -3 + i,$$

ενώ

$$\begin{aligned}(1 + 3i)(5 + 4i) &= 5 + 4i + 15i + 12i^2 \\ &= -7 + 19i.\end{aligned}$$

Βλέπουμε ότι τα πιο πάνω ανάγονται στη μορφή $x + yi$. Πιο κάτω αποδεικνύουμε ότι αυτό ισχύει για όλους τους μιγαδικούς αριθμούς.

4 Η μορφή $x + yi$

Θεώρημα 4.1. *Κάθε μιγαδικός αριθμός $z \in \mathbb{C}$ γράφεται με μοναδικό τρόπο στη μορφή*

$$z = x + yi, \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

Απόδειξη χωρίς πλήρη αυστηρότητα. Θεωρούμε το υποσύνολο

$$K = \{x + yi : x, y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C}.$$

Το K περιέχει το $\mathbb{R}$: απλά θέτουμε $y = 0$. Επίσης περιέχει και το i: θέτουμε $x = 0$ και $y = 1$.

Αν πάρουμε δύο στοιχεία του K και τα προσθέσουμε ή τα πολλαπλασιάσουμε μπορούμε να δούμε ότι πάλι παίρνουμε ένα στοιχείο της μορφής $a + bi$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$, δηλαδή ένα στοιχείο του K. Επομένως η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός του $\mathbb{C}$ είναι πράξεις στο K. Επιπλέον αποδεικνύεται εύκολα ότι ικανοποιούνται οι γνωστές αλγεβρικές ιδιότητες που αναφέρονται στο (α) του Ορισμού 2.1. Το μόνο σημείο που δεν είναι εντελώς άμεσο είναι το αντίστροφο στοιχείο για τον πολλαπλασιασμό: παρατηρούμε ότι αν $x + yi \neq 0$, τότε δεν γίνεται να έχουμε $x = y = 0$. Οπότε διαιρώντας τον μιγαδικό αριθμό $x + (-y)i = x - yi$ με τον $x^2 + y^2 > 0$ παίρνουμε

$$\frac{x - yi}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{-y}{x^2 + y^2} i \in K$$

καθώς και

$$(x + yi) \cdot \frac{x - yi}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 - (yi)^2}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 - y^2 \cdot (-1)}{x^2 + y^2} = 1.$$

Με άλλα λόγια για κάθε $z \in K$ με $z \neq 0$ υπάρχει $w \in K$ με $zw = wz = 1$.

Άρα το K με τις πράξεις που παίρνει από το $\mathbb{C}$, ικανοποιεί τις ιδιότητες (α)–(γ) του ορισμού των μιγαδικών αριθμών. Από την ιδιότητα (δ) του $\mathbb{C}$ προκύπτει ότι $\mathbb{C} \subseteq K$. Επειδή ήδη $K \subseteq \mathbb{C}$, έχουμε

$$K = \mathbb{C}.$$

Επομένως κάθε $z \in \mathbb{C}$ έχει τη μορφή $x + yi$ για κάποια $x, y \in \mathbb{R}$.

Για τη μοναδικότητα, έστω

$$x + yi = u + vi, \qquad x, y, u, v \in \mathbb{R}.$$

Τότε

$$(x - u) + (y - v)i = 0.$$

Αν $y - v \neq 0$, θα είχαμε

$$i = -\frac{x - u}{y - v} \in \mathbb{R},$$

πράγμα αδύνατο, αφού κανένας πραγματικός αριθμός δεν έχει τετράγωνο ίσο με -1. Επομένως $y = v$ και στη συνέχεια $x = u$.

Σημείωση. Ο λόγος που αναφέρουμε ότι η απόδειξη γίνεται "χωρίς πλήρη αυστηρότητα" είναι ότι ο Ορισμός 2.1 έχει διατυπωθεί σκόπιμα με κάποια ελευθερία, ιδιαίτερα ως προς τις ιδιότητες (β) και (δ). Στο Παράρτημα Α θα δώσουμε την πλήρως αυστηρή διατύπωση και θα συμπληρώσουμε αυστηρά την απόδειξη αυτού του αποτελέσματος. □

Ορισμός 4.2. Αν

$$z = x + yi, \qquad x, y \in \mathbb{R},$$

τότε ο x λέγεται *πραγματικό μέρος* του z και ο y λέγεται *φανταστικό μέρος* του z. Συμβολίζουμε

$$\operatorname{Re} z = x, \qquad \operatorname{Im} z = y.$$

Η μοναδικότητα της παραπάνω αναπαράστασης εξασφαλίζει ότι οι ποσότητες $\operatorname{Re} z$ και $\operatorname{Im} z$ είναι καλά ορισμένες.

5 Πράξεις με μιγαδικούς αριθμούς: μέτρο, συζυγής και αντίστροφος

Από τους συνήθεις αλγεβρικούς κανόνες και τη σχέση $i^2 = -1$ προκύπτει ότι

$$\begin{cases} (x + yi) + (u + vi) = (x + u) + (y + v)i \\ \\ (x + yi)(u + vi) = (xu - yv) + (xv + yu)i. \end{cases} \tag{E3}$$

Έτσι, οι πράξεις μεταξύ μιγαδικών αριθμών ανάγονται σε πράξεις μεταξύ πραγματικών αριθμών.

Ορισμός 5.1. Αν

$$z = x + yi,$$

ορίζουμε το *μέτρο* του z ως

$$\boxed{|z| = \sqrt{x^2 + y^2}\,.}$$

Δηλαδή

$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}\,.$$

Παράδειγμα 5.2. Έχουμε

$$|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$|1 - i| = \sqrt{1 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$|-2i| = \sqrt{0 + (-2)^2} = 2.$$

Η ονομασία "μέτρο" θα γίνει πιο φυσική στην επόμενη ενότητα, όπου θα δούμε τη γεωμετρική ερμηνεία των μιγαδικών αριθμών.

Ορισμός 5.3. Αν

$$z = x + yi,$$

ο *συζυγής* του z είναι ο μιγαδικός αριθμός

$$\boxed{\overline{z} = x - yi\,.}$$

Δηλαδή

$$\overline{z} = \operatorname{Re} z - (\operatorname{Im} z)\, i$$

Παράδειγμα 5.4. Έχουμε:

$$\overline{(1 + 3i)} = 1 - 3i, \qquad \overline{(-2 - i)} = -2 + i, \qquad \overline{5} = 5.$$

Η βασική σχέση μεταξύ ενός μιγαδικού αριθμού, του συζυγούς του και του μέτρου του είναι η ακόλουθη.

Πρόταση 5.5. *Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ισχύει*

$$\boxed{z\overline{z} = |z|^2 \, .}$$

Απόδειξη. Αν $z = x + yi$, τότε

$$z\overline{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 - y^2 i^2 = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

□

Η προηγούμενη ταυτότητα μάς δίνει αμέσως έναν χρήσιμο τύπο για τον πολλαπλασιαστικό αντίστροφο.

Πρόταση 5.6. *Αν $z \neq 0$, τότε*

$$\boxed{z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \, .}$$

Ισοδύναμα, αν $z = x + yi \neq 0$, τότε

$$\frac{1}{x + yi} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2} \, .$$

Απόδειξη. Αφού $z \neq 0$, έχουμε $|z|^2 > 0$. Με εφαρμογή της Πρότασης 5.5 παίρνουμε

$$z\frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{z\overline{z}}{|z|^2} = 1.$$

□

Παράδειγμα 5.7. Για τον αριθμό $1 + i$ έχουμε

$$|1 + i|^2 = 2, \qquad \overline{(1 + i)} = 1 - i,$$

και επομένως

$$\frac{1}{1 + i} = \frac{1 - i}{2}.$$

Ο πιο πάνω αριθμός στη μορφή $x + yi$ είναι φυσικά ο $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} \cdot i$ αλλά συνηθίζουμε να αφήνουμε τη μορφή $\dfrac{1 - i}{2}$.

Όμοια βρίσκουμε,

$$\frac{1}{3 - 4i} = \frac{\overline{3 - 4i}}{3^2 + (-4)^2} = \frac{3 + 4i}{25} \, .$$

Μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε τον αντίστροφο πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας ταυτόχρονα με τον συζυγή μιγαδικό αριθμό –στην ουσία επαναλαμβάνουμε την απόδειξη της Πρότασης 5.6:

$$\frac{1}{1 + i} = \frac{1 - i}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{1 - i}{1 - i^2} = \frac{1 - i}{1 + 1} = \frac{1 - i}{2} \, .$$

Ο ίδιος τρόπος υπολογισμού χρησιμοποιείται και για τη διαίρεση δύο μιγαδικών αριθμών. Για παράδειγμα,

$$\frac{1+2i}{3-i} = \frac{(1+2i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{1+7i}{10}\,.$$

Μπορούμε φυσικά να πούμε και ότι

$$\frac{1+2i}{3-i} = (1+2i)\cdot(3-i)^{-1} = \cdots = \frac{1+7i}{10}$$

αλλά στην ουσία ο υπολογισμός του $(3-i)^{-1}$ συνιστά επανάληψη της πιο πάνω διαδικασίας.

Γενικότερα, αν $w \neq 0$, τότε

$$\frac{z}{w} = \frac{z\overline{w}}{|w|^2}\,.$$

Ασκήσεις

Άσκηση 5.1. Για καθέναν από τους παρακάτω μιγαδικούς αριθμούς να υπολογίσετε το μέτρο, τον συζυγή και τον αντίστροφο:

$$\text{(α) } z = 2-i, \qquad \text{(β) } z = -1+2i, \qquad \text{(γ) } z = 3i, \qquad \text{(δ) } z = -2.$$

Άσκηση 5.2. Να υπολογίσετε τα παρακάτω πηλίκα και να γράψετε το αποτέλεσμα στη μορφή $x+yi$, όπου $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\text{(α) } \frac{2+i}{1-i}\,, \qquad \text{(β) } \frac{1-2i}{2+i}\,, \qquad \text{(γ) } \frac{3+4i}{1+2i}\,, \qquad \text{(δ) } \frac{i}{1+i}\,.$$

Άσκηση 5.3. Έστω

$$z = 1-2i.$$

Να υπολογίσετε:

$$\text{(α) } z+\overline{z}, \qquad \text{(β) } z-\overline{z}, \qquad \text{(γ) } z\overline{z},$$

$$\text{(δ) } \frac{z}{\overline{z}}, \qquad \text{(ε) } \frac{1}{z}+\frac{1}{\overline{z}}\,.$$

Άσκηση 5.4. Έστω

$$z = 1+i, \qquad w = 1-2i.$$

Να υπολογίσετε και να γράψετε στη μορφή $x+yi$ τις παραστάσεις

$$\text{(α) } z\overline{w}, \qquad \text{(β) } \overline{z}\,w, \qquad \text{(γ) } \frac{z}{\overline{w}}\,, \qquad \text{(δ) } \frac{z+\overline{w}}{\overline{z}+w}\,.$$

Άσκηση 5.5. Έστω $z = x+yi \in \mathbb{C}$. Να δείξετε ότι

$$z+\overline{z} = 2\,\mathrm{Re}\,z$$

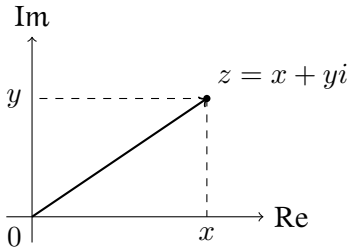
και

$$z-\overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}\,z.$$

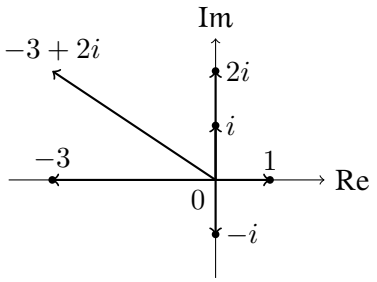
Στη συνέχεια, αν $z \neq 0$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{\overline{z}} \qquad \text{και} \qquad \frac{1}{z}-\frac{1}{\overline{z}}$$

εκφράζοντας το αποτέλεσμα μέσω των $\mathrm{Re}\,z$, $\mathrm{Im}\,z$ και $|z|$.



Σχήμα 1: Ο μιγαδικός αριθμός $z = x + yi$ ως σημείο και ως διάνυσμα.



Σχήμα 2: Παραδείγματα μιγαδικών αριθμών στο επίπεδο.

Άσκηση 5.6. Να βρείτε τον μιγαδικό αριθμό z αν

$$z + \overline{z} = 6 \qquad \text{και} \qquad z - \overline{z} = -4i.$$

6 Η γεωμετρία του $\mathbb{C}$

Η αναπαράσταση

$$z = x + yi$$

μας επιτρέπει να συνδέσουμε τους μιγαδικούς αριθμούς με τη γεωμετρία του επιπέδου. Επειδή οι αριθμοί $x, y \in \mathbb{R}$ καθορίζονται μοναδικά από τον z, μπορούμε να αντιστοιχίσουμε στον μιγαδικό αριθμό $z = x + yi$ το σημείο

$$(x, y)$$

του επιπέδου, βλ. Σχήμα 1.

Ισοδύναμα, μπορούμε να θεωρήσουμε το διάνυσμα με αρχή το $(0, 0)$ και τέλος το (x, y).

Με αυτόν τον τρόπο ο ίδιος μιγαδικός αριθμός μπορεί να θεωρηθεί ταυτόχρονα ως αριθμός, ως σημείο του επιπέδου και ως διάνυσμα με αρχή το 0.

Μερικά απλά παραδείγματα φαίνονται στο επόμενο σχήμα. Οι μιγαδικοί αριθμοί

$$i, \qquad 2i, \qquad -3, \qquad 1, \qquad -i, \qquad -3 + 2i$$

αντιστοιχούν στα σημεία

$$(0, 1), \qquad (0, 2), \qquad (-3, 0), \qquad (1, 0), \qquad (0, -1), \qquad (-3, 2)$$

αντίστοιχα, βλ. Σχήμα 2.

Γεωμετρική ερμηνεία της πρόσθεσης

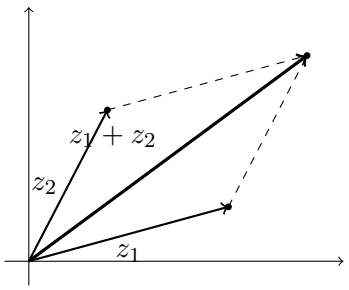
Έστω

$$z_1 = x_1 + y_1 i, \qquad z_2 = x_2 + y_2 i.$$

Τότε

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i.$$

Αυτός είναι ακριβώς ο γνωστός κανόνας πρόσθεσης διανυσμάτων. Επομένως η πρόσθεση μιγαδικών αριθμών έχει ως γεωμετρική ερμηνεία τον κανόνα του παραλληλογράμμου, βλ. Σχήμα 3.



Σχήμα 3: Η πρόσθεση μιγαδικών αριθμών και ο κανόνας του παραλληλογράμμου.

Γεωμετρική ερμηνεία του μέτρου

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα, το μήκος του διανύσματος που αντιστοιχεί στον

$$z = x + yi$$

είναι

$$\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Επομένως, από τον ορισμό του μέτρου,

$$\boxed{|z| = \text{απόσταση του } z \text{ από το } 0.}$$

Έτσι εξηγείται και η ονομασία *μέτρο* του μιγαδικού αριθμού.

Γεωμετρική ερμηνεία του πολλαπλασιασμού

Η γεωμετρική σημασία του πολλαπλασιασμού είναι πιο ενδιαφέρουσα. Αρχίζουμε με τον πολλαπλασιασμό επί i.

Ας δούμε πρώτα δύο πολύ απλά παραδείγματα:

$$(2i)i = 2i^2 = -2$$

και

$$(-2)i = -2i.$$

Στο μιγαδικό επίπεδο, ο αριθμός $2i$ αντιστοιχεί στο σημείο $(0, 2)$ και, μετά από πολλαπλασιασμό επί i, μεταφέρεται στο σημείο $(-2, 0)$. Αντίστοιχα, ο αριθμός -2 αντιστοιχεί στο σημείο $(-2, 0)$ και, μετά από πολλαπλασιασμό επί i, μεταφέρεται στο σημείο $(0, -2)$, βλ. Σχήμα 4.

Και στα δύο παραδείγματα βλέπουμε ότι ο πολλαπλασιασμός επί i περιστρέφει το αντίστοιχο διάνυσμα κατά γωνία $\pi/2$. Ας εξετάσουμε ένα παράδειγμα στο οποίο ο μιγαδικός αριθμός δεν βρίσκεται πάνω σε κάποιον από τους δύο άξονες.

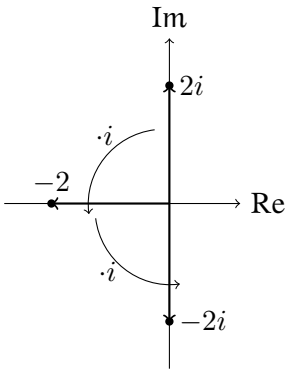
Για

$$z = 1 + i$$

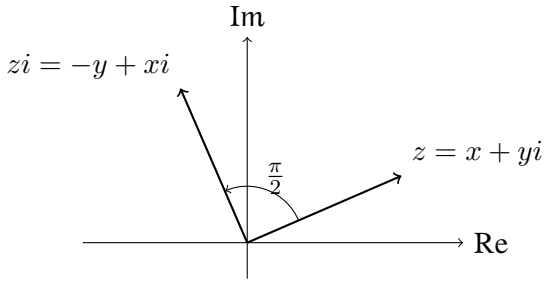
έχουμε

$$zi = (1 + i)i = i + i^2 = -1 + i.$$

Έτσι, το σημείο $(1, 1)$ μεταφέρεται στο σημείο $(-1, 1)$, δηλαδή και πάλι το αντίστοιχο διάνυσμα περιστρέφεται κατά γωνία $\pi/2$.



Σχήμα 4: Παραδείγματα πολλαπλασιασμού επί i: $2i \mapsto -2$ και $-2 \mapsto -2i$.



Σχήμα 5: Ο πολλαπλασιασμός επί i αντιστοιχεί σε περιστροφή κατά $\pi/2$.

Γενικότερα, αν

$$z = x + yi,$$

τότε

$$zi = (x + yi)i = -y + xi.$$

Επομένως το σημείο

$$(x, y)$$

μεταφέρεται στο σημείο

$$(-y, x),$$

που είναι ακριβώς το αποτέλεσμα περιστροφής του (x, y) κατά γωνία $\pi/2$ γύρω από το 0, με τη θετική φορά μέτρησης των γωνιών, βλ. Σχήμα 5.

Ο πολλαπλασιασμός επί i είναι μια ιδιαίτερα απλή περίπτωση της γεωμετρικής συμπεριφοράς του πολλαπλασιασμού μιγαδικών αριθμών. Για να πάρουμε μια πρώτη εικόνα του γενικού κανόνα, θεωρούμε ξανά

$$z = 1 + i.$$

Ο αριθμός z έχει μέτρο

$$|z| = \sqrt{2}$$

και το αντίστοιχο διάνυσμα σχηματίζει γωνία $\pi/4$ με τον θετικό πραγματικό άξονα. Τώρα

$$z^2 = (1 + i)^2 = 2i.$$

Το μέτρο του $2i$ είναι

$$2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2},$$

ενώ η γωνία που σχηματίζει με τον θετικό πραγματικό ημιάξονα είναι

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}.$$

Το παράδειγμα αυτό αποτελεί ειδική περίπτωση του γενικού γεωμετρικού κανόνα:

Πρόταση 6.1. *Έστω $z, w \in \mathbb{C}$, με $z, w \neq 0$. Τότε*

$$|zw| = |z|\,|w|.$$

Επιπλέον, αν θ και ϕ είναι γωνίες που σχηματίζουν αντίστοιχα τα διανύσματα των z και w με τον θετικό πραγματικό ημιάξονα, τότε $\theta + \phi$ είναι μια αντίστοιχη γωνία για τον zw.

Απόδειξη για το μέτρο. Παρατηρούμε πρώτα ότι, αν $z = x + yi$ και $w = u + vi$, τότε από άμεσο υπολογισμό προκύπτει

$$\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}.$$

Επομένως:

$$|zw|^2 = zw\,\overline{zw} = zw\,\overline{z}\,\overline{w} = (z\overline{z})(w\overline{w}) = |z|^2|w|^2,$$

και επομένως

$$|zw| = |z|\,|w|.$$

□

Η δεύτερη ιδιότητα της Πρότασης 6.1, που αφορά τις γωνίες, θα αποδειχθεί στην επόμενη ενότητα, αφού εισαγάγουμε την πολική μορφή των μιγαδικών αριθμών.

Η γεωμετρική εικόνα του πολλαπλασιασμού μπορεί λοιπόν να συνοψιστεί ως εξής:

Στον πολλαπλασιασμό μιγαδικών αριθμών τα μήκη πολλαπλασιάζονται και οι γωνίες προστίθενται.

Αυτό υποδεικνύει ότι, εκτός από τις καρτεσιανές συντεταγμένες x και y, είναι φυσικό να περιγράφουμε έναν μιγαδικό αριθμό χρησιμοποιώντας το μέτρο του και τη γωνία του. Η περιγραφή αυτή οδηγεί στην *πολική μορφή*.

Ασκήσεις

Άσκηση 6.1. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς

$$z_1 = 1 + 2i, \qquad z_2 = 3 - i.$$

Να παραστήσετε στο μιγαδικό επίπεδο τα σημεία που αντιστοιχούν στους z_1, z_2 και $z_1 + z_2$, και να επαληθεύσετε γεωμετρικά τον κανόνα του παραλληλογράμμου.

Άσκηση 6.2. Έστω

$$z = x + yi, \qquad w = u + vi.$$

Να δείξετε ότι η απόσταση των σημείων του μιγαδικού επιπέδου που αντιστοιχούν στους z και w είναι

$$|z - w|.$$

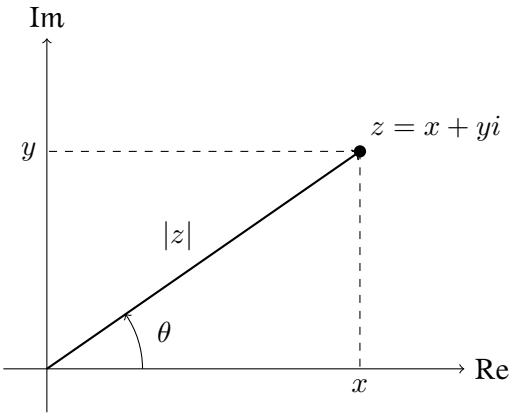
Στη συνέχεια να υπολογίσετε την απόσταση των μιγαδικών αριθμών

$$z = 1 + 2i, \qquad w = -2 + i.$$

Άσκηση 6.3. Έστω $z = x + yi$. Να περιγράψετε γεωμετρικά στο μιγαδικό επίπεδο τις απεικονίσεις

$$z \longmapsto \overline{z}, \qquad z \longmapsto -z, \qquad z \longmapsto iz.$$

Δηλαδή, για καθεμία από αυτές να εξηγήσετε πώς μετακινείται το σημείο που αντιστοιχεί στον z.



Σχήμα 6: Περιγραφή ενός μιγαδικού αριθμού μέσω του μέτρου και μιας γωνίας.

Άσκηση 6.4. Χρησιμοποιώντας τη γεωμετρική ερμηνεία του μέτρου, να περιγράψετε γεωμετρικά τα σύνολα των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν:

$$\text{(α)} \quad |z - (1 + i)| = 2,$$

$$\text{(β)} \quad |z - 1| = |z + 1|.$$

Στην περίπτωση (α) να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα του αντίστοιχου γεωμετρικού σχήματος.

7 Πολική μορφή

Έστω

$$z = x + yi \neq 0.$$

Στο μιγαδικό επίπεδο ο z αντιστοιχεί στο σημείο (x, y) ή, ισοδύναμα, στο διάνυσμα με αρχή το 0 και τέλος το (x, y).

Το σημείο αυτό μπορεί να περιγραφεί όχι μόνο από τις καρτεσιανές συντεταγμένες x, y, αλλά και από δύο γεωμετρικά μεγέθη:

- την απόστασή του από το 0, δηλαδή το μέτρο $|z|$,
- τη γωνία που σχηματίζει το αντίστοιχο διάνυσμα με τον θετικό πραγματικό ημιάξονα.

Ως θετική φορά μέτρησης των γωνιών θεωρούμε τη φορά αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού.

Όρισμα

Ορισμός 7.1. Έστω $z \neq 0$. Κάθε γωνία θ που σχηματίζει το διάνυσμα του z με τον θετικό πραγματικό άξονα λέγεται *όρισμα* του z.

Το όρισμα δεν είναι μοναδικό. Αν θ είναι ένα όρισμα του z, τότε όρισμα είναι και κάθε γωνία

$$\theta + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Για παράδειγμα, για τον αριθμό i ένα όρισμα είναι το $\pi/2$, αλλά ορίσματα είναι επίσης οι γωνίες

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Αν θέλουμε να επιλέξουμε ένα συγκεκριμένο όρισμα, περιοριζόμαστε σε ένα διάστημα μήκους 2π.

Ορισμός 7.2. Το μοναδικό όρισμα του $z \neq 0$ που ανήκει στο διάστημα

$$(-\pi, \pi]$$

λέγεται *κύριο όρισμα* του z και συμβολίζεται

$$\operatorname{Arg} z.$$

Για παράδειγμα,

$$\operatorname{Arg}(1) = 0, \qquad \operatorname{Arg}(i) = \frac{\pi}{2}, \qquad \operatorname{Arg}(-i) = -\frac{\pi}{2}, \qquad \operatorname{Arg}(-1) = \pi.$$

Το διάστημα $(-\pi, \pi]$ είναι ημι-κλειστό επειδή οι γωνίες π και $-\pi$ περιγράφουν την ίδια κατεύθυνση. Αν περιλαμβάναμε και τα δύο άκρα, η επιλογή δεν θα ήταν μοναδική.

Η πολική μορφή

Θεωρούμε ένα $z \in \mathbb{C}$ με $z \neq 0$ και ένα όρισμα θ του z. Από το σχήμα έχουμε

$$x = |z| \cos\theta, \qquad y = |z| \sin\theta.$$

Επομένως

$$z = x + yi = |z| \cos\theta + i|z| \sin\theta,$$

δηλαδή

$$\boxed{z = |z|(\cos\theta + i \sin\theta).}$$

Η παραπάνω έκφραση λέγεται *πολική μορφή* του μιγαδικού αριθμού z.

Παράδειγμα 7.3. Για

$$z = 1 + i$$

έχουμε

$$|z| = \sqrt{2}, \qquad \operatorname{Arg} z = \frac{\pi}{4}.$$

Άρα

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Παράδειγμα 7.4. Για

$$z = -1 + i$$

έχουμε

$$|z| = \sqrt{2}, \qquad \operatorname{Arg} z = \frac{3\pi}{4}.$$

Επομένως

$$-1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

Στον υπολογισμό του ορίσματος είναι σημαντικό να λαμβάνουμε υπόψη σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται το σημείο (x, y).

Ο συμβολισμός του Euler

Χρησιμοποιούμε τον *συμβολισμό του Euler* και αντί για $\cos\theta + i\sin\theta$ γράφουμε $e^{i\theta}$. Με άλλα λόγια θέτουμε

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta\,.}$$

Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε έναν οποιονδήποτε νέο συμβολισμό για την ποσότητα $\cos\theta + i\sin\theta$. Όμως η επιλογή του εκθετικού συμβολισμού εκφράζει μια βαθύτερη αλήθεια: αν αναπτύξουμε τα $\cos\theta$ και $\sin\theta$ στις δυναμοσειρές τους, πολλαπλασιάσουμε το $\sin\theta$ με i, και μετά κάνουμε την πρόσθεση $\cos\theta + i\sin\theta$, τότε η σειρά που θα βρούμε συμφωνεί με τη σειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\theta)^n}{n!}$, δηλαδή με την τιμή της δυναμοσειράς της εκθετικής συνάρτησης e^x για $x = i\theta$. (Επειδή οι σχετικές σειρές συγκλίνουν απολύτως, οπότε επιτρέπεται ο διαχωρισμός σε άρτιους και περιττούς όρους.)

Με αυτόν τον συμβολισμό η πολική μορφή γράφεται απλά

$$\boxed{z = |z|e^{i\theta}, \qquad z \neq 0,}$$

όπου το θ είναι ένα οποιοδήποτε όρισμα του z. Ειδικότερα έχουμε

$$\boxed{z = |z|e^{i\operatorname{Arg} z}, \qquad z \neq 0,}$$

Παρατηρούμε ότι $|e^{i\theta}| = 1$ για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$ και ότι ο συντελεστής είναι μοναδικός στην πιο πάνω γραφή: δηλαδή αν έχουμε $z = re^{i\theta}$ με $r > 0$ και $\theta \in \mathbb{R}$, τότε

$$|z| = |r\cos\theta + ir\sin\theta| = r.$$

Επιπλέον το θ είναι αναγκαστικά ένα όρισμα του z. Με άλλα λόγια για κάθε $z \neq 0$, $r > 0$, και $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{z = re^{i\theta} \quad \Longrightarrow \quad r = |z| \;\text{ και }\; \theta = \operatorname{Arg} z + 2k\pi, \text{ για κάποιο } k \in \mathbb{Z}.}$$

Παρατηρούμε επίσης ότι, αν

$$r, \rho > 0$$

και

$$re^{i\theta} = \rho e^{i\phi},$$

τότε, συγκρίνοντας τα μέτρα των δύο μελών, παίρνουμε

$$r = \rho.$$

Επομένως

$$e^{i\theta} = e^{i\phi},$$

και άρα

$$\theta - \phi = 2k\pi \qquad \text{για κάποιο } k \in \mathbb{Z}.$$

Συνεπώς

$$\boxed{re^{i\theta} = \rho e^{i\phi} \quad \Longleftrightarrow \quad r = \rho \ \text{ και } \theta - \phi = 2k\pi \text{ για κάποιο } k \in \mathbb{Z}.}$$

Πολλαπλασιασμός στην πολική μορφή

Έστω

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta), \qquad w = s(\cos\phi + i\sin\phi),$$

όπου $r = |z|$ και $s = |w|$. Τότε

$$\begin{aligned} zw &= rs(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\phi + i\sin\phi) \\ &= rs\Big(\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi \\ &\qquad + i(\sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi)\Big). \end{aligned}$$

Σε αυτό το σημείο χρησιμοποιούμε τις τριγωνομετρικές ταυτότητες:

$$\begin{aligned} \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi &= \cos(\theta+\phi) \\ \sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi &= \sin(\theta+\phi), \end{aligned}$$

τις οποίες παίρνουμε δεδομένες εδώ.

Επομένως,

$$\boxed{zw = rs\big(\cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi)\big).}$$

Με τον συμβολισμό του Euler,

$$\boxed{re^{i\theta}\, se^{i\phi} = rs\, e^{i(\theta+\phi)}.}$$

Ολοκλήρωση της απόδειξης της Πρότασης 6.1. Αν θ είναι ένα όρισμα του z και ϕ ένα όρισμα του w, η παραπάνω ισότητα δείχνει ότι το $\theta + \phi$ είναι ένα όρισμα του zw. Αυτό αποδεικνύει και τη δεύτερη ιδιότητα της πρότασης. □

Παρατήρηση. Αυτό δεν σημαίνει απαραίτητα ότι

$$\operatorname{Arg}(zw) = \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w,$$

αφού το δεξί μέλος μπορεί να μη βρίσκεται στο $(-\pi, \pi]$. Το $\operatorname{Arg}(zw)$ προκύπτει από το $\operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w$ προσθέτοντας ή αφαιρώντας, αν χρειάζεται, ένα ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π.

Παράδειγμα 7.5. Θεωρούμε

$$z = 1 + i, \qquad w = i.$$

Έχουμε

$$z = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}, \qquad w = e^{i\pi/2}.$$

Επομένως

$$zw = \sqrt{2}\, e^{i(\pi/4+\pi/2)} = \sqrt{2}\, e^{i3\pi/4}.$$

Πράγματι, σε καρτεσιανή μορφή,

$$zw = (1 + i)i = -1 + i.$$

Στο παράδειγμα αυτό βλέπουμε άμεσα και τις δύο ιδιότητες του πολλαπλασιασμού. Για τα μέτρα έχουμε

$$|zw| = \sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot 1 = |z|\,|w|,$$

ενώ για τα κύρια ορίσματα

$$\operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}\,.$$

Επειδή

$$\frac{3\pi}{4} \in (-\pi, \pi],$$

το άθροισμα αυτό είναι ήδη το κύριο όρισμα του γινομένου. Άρα

$$\operatorname{Arg}(zw) = \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w = \frac{3\pi}{4}\,.$$

Παράδειγμα 7.6. Ας δούμε τώρα τι συμβαίνει όταν το άθροισμα των κύριων ορισμάτων βγαίνει έξω από το διάστημα $(-\pi, \pi]$.

Θεωρούμε

$$z = w = -1 + i.$$

Έχουμε

$$z = w = \sqrt{2}\, e^{i3\pi/4}\,,$$

και επομένως

$$zw = 2e^{i(3\pi/4+3\pi/4)} = 2e^{i3\pi/2}\,.$$

Τα μέτρα και πάλι πολλαπλασιάζονται:

$$|zw| = 2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = |z|\,|w|.$$

Για τα κύρια ορίσματα όμως έχουμε

$$\operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w = \frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{2},$$

και τώρα

$$\frac{3\pi}{2} > \pi.$$

Η γωνία $3\pi/2$ είναι πράγματι ένα όρισμα του zw, αλλά δεν είναι το κύριο όρισμά του. Αφαιρώντας 2π παίρνουμε

$$\frac{3\pi}{2} - 2\pi = -\frac{\pi}{2},$$

που ανήκει στο $(-\pi, \pi]$. Επομένως

$$2e^{i3\pi/2} = 2e^{-i\pi/2} = -2i,$$

και

$$\operatorname{Arg}(zw) = -\frac{\pi}{2}.$$

Πράγματι, ο ίδιος υπολογισμός σε καρτεσιανή μορφή δίνει

$$(-1+i)^2 = -2i.$$

Έτσι, στο παράδειγμα αυτό,

$$\operatorname{Arg}(zw) = \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w - 2\pi.$$

Παράδειγμα 7.7. Η ίδια διαδικασία ισχύει φυσικά και όταν εμφανίζονται αρνητικά ορίσματα. Θεωρούμε

$$z = -1 + i, \qquad w = 1 - i.$$

Τότε

$$z = \sqrt{2}\, e^{i3\pi/4}, \qquad w = \sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}.$$

Επομένως

$$zw = 2e^{i(3\pi/4 - \pi/4)} = 2e^{i\pi/2} = 2i.$$

Εδώ

$$\operatorname{Arg} z = \frac{3\pi}{4}, \qquad \operatorname{Arg} w = -\frac{\pi}{4},$$

οπότε

$$\operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Το αποτέλεσμα ανήκει ήδη στο $(-\pi, \pi]$, και συνεπώς

$$\operatorname{Arg}(zw) = \frac{\pi}{2}.$$

Για τα μέτρα έχουμε, όπως αναμενόταν,

$$|zw| = 2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = |z|\,|w|.$$

Αντίστροφος και διαίρεση στην πολική μορφή

Ο κανόνας του πολλαπλασιασμού μάς επιτρέπει να περιγράψουμε πολύ εύκολα και τον αντίστροφο ενός μη μηδενικού μιγαδικού αριθμού.

Έστω

$$z = re^{i\theta}, \qquad r = |z| > 0.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\left(re^{i\theta}\right)\left(\frac{1}{r}e^{-i\theta}\right) = e^{i(\theta-\theta)} = e^0 = 1.$$

Άρα

$$\boxed{z^{-1} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}.}$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι κατά τη μετάβαση από τον z στον z^{-1} το μέτρο αντιστρέφεται,

$$|z^{-1}| = \frac{1}{|z|},$$

ενώ το όρισμα αλλάζει πρόσημο. Συγκεκριμένα, αν θ είναι ένα όρισμα του z, τότε $-\theta$ είναι ένα όρισμα του z^{-1}.

Για το κύριο όρισμα χρειάζεται και εδώ η συνηθισμένη προσοχή στο διάστημα $(-\pi, \pi]$. Αν

$$\operatorname{Arg} z \in (-\pi, \pi),$$

τότε

$$\operatorname{Arg}(z^{-1}) = -\operatorname{Arg} z.$$

Στην ειδική περίπτωση $\operatorname{Arg} z = \pi$, ο αριθμός z βρίσκεται στον αρνητικό πραγματικό ημιάξονα, δηλαδή είναι αρνητικός πραγματικός αριθμός. Συνεπώς το ίδιο ισχύει και για τον z^{-1}. Άρα

$$\operatorname{Arg}(z^{-1}) = \pi$$

και όχι $-\pi$, αφού $-\pi \notin (-\pi, \pi]$.

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε εύκολα και το πηλίκο δύο μιγαδικών αριθμών. Έστω

$$z = re^{i\theta}, \qquad w = se^{i\phi}, \qquad z, w \neq 0.$$

Τότε

$$w^{-1} = \frac{1}{s} e^{-i\phi},$$

και άρα

$$\frac{z}{w} = zw^{-1} = re^{i\theta}\,\frac{1}{s}e^{-i\phi}.$$

Επομένως

$$\boxed{\frac{re^{i\theta}}{se^{i\phi}} = \frac{r}{s}e^{i(\theta-\phi)}.}$$

Από πάνω προκύπτει η γνωστή ιδιότητα ότι το μέτρο ενός πηλίκου είναι το πηλίκο των μέτρων

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}, \qquad z, w \neq 0$$

καθώς και ότι ένα όρισμα του πηλίκου είναι η διαφορά των ορισμάτων $\theta - \phi$.

Δυνάμεις και ο τύπος του de Moivre

Εφαρμόζοντας επανειλημμένα τον κανόνα του πολλαπλασιασμού παίρνουμε, για $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta}.}$$

Ισοδύναμα,

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).}$$

Η τελευταία ταυτότητα είναι γνωστή ως *τύπος του de Moivre*.

Ασκήσεις

Άσκηση 7.1. Για καθέναν από τους παρακάτω μιγαδικούς αριθμούς να υπολογίσετε το μέτρο και το κύριο όρισμά του και να τον γράψετε σε πολική μορφή:

$$(\alpha)\ 1+i, \qquad (\beta)\ 1-i, \qquad (\gamma)\ -1+i,$$
$$(\delta)\ -\sqrt{3}+i, \qquad (\varepsilon)\ -2i, \qquad (\sigma\tau)\ -3.$$

Άσκηση 7.2. Να γράψετε στη μορφή $x+yi$ τους μιγαδικούς αριθμούς

$$(\alpha)\ 2e^{i\pi/3}, \qquad (\beta)\ 3e^{-i\pi/2}, \qquad (\gamma)\ 4e^{i3\pi/4}, \qquad (\delta)\ \sqrt{2}\,e^{-i\pi/4}.$$

Άσκηση 7.3. Για κάθε έναν από τους παρακάτω μιγαδικούς αριθμούς να βρείτε όλα τα ορίσματά του και το κύριο όρισμά του:

$$(\alpha)\ i, \qquad (\beta)\ -1, \qquad (\gamma)\ 1-i, \qquad (\delta)\ -1-i.$$

Άσκηση 7.4. Έστω

$$z = 2e^{i\pi/3}, \qquad w = 3e^{-i\pi/4}.$$

Χωρίς να μετατρέψετε αρχικά τους z, w στη μορφή $x+yi$, να υπολογίσετε σε πολική μορφή:

$$(\alpha)\ zw, \qquad (\beta)\ \frac{z}{w}, \qquad (\gamma)\ z^{-1}.$$

Για καθένα από τα αποτελέσματα να προσδιορίσετε επίσης το μέτρο και το κύριο όρισμα.

Άσκηση 7.5. Έστω

$$z = e^{i3\pi/4}, \qquad w = e^{i2\pi/3}.$$

Να υπολογίσετε το zw σε πολική μορφή και να βρείτε το $\operatorname{Arg}(zw)$.

Να συγκρίνετε το αποτέλεσμα με το

$$\operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w.$$

Γιατί οι δύο ποσότητες δεν είναι ίσες;

Άσκηση 7.6. Έστω $z \neq 0$. Να δείξετε ότι

$$\frac{z}{|z|}$$

έχει μέτρο 1.

Αν θ είναι ένα όρισμα του z, να δείξετε επίσης ότι

$$\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}.$$

Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά τον αριθμό $z/|z|$ στο μιγαδικό επίπεδο.

Άσκηση 7.7. Χρησιμοποιώντας τον τύπο του de Moivre, να υπολογίσετε:

$$(\alpha)\ (1+i)^8, \qquad (\beta)\ (1-i)^6, \qquad (\gamma)\ (\sqrt{3}+i)^5.$$

Στους υπολογισμούς να γράψετε πρώτα τον αντίστοιχο μιγαδικό αριθμό σε πολική μορφή.

8 Ρίζες της μονάδας

Η πολική μορφή επιτρέπει να λύσουμε πολύ εύκολα εξισώσεις της μορφής

$$z^n = 1, \tag{E4}$$

όπου $n = 1, 2, \ldots$.

Οι λύσεις αυτής της εξίσωσης λέγονται *n-οστές ρίζες της μονάδας*.

Στη συνέχεια παίρνουμε ένα $n = 1, 2, \ldots$ και επιλύουμε την εξίσωση. Παίρνουμε μια λύση z της (E4) και γράφουμε

$$z = re^{i\theta}.$$

Τότε

$$z^n = r^n e^{in\theta}.$$

Για να ισχύει

$$z^n = 1,$$

πρέπει καταρχάς

$$|z|^n = |z^n| = 1 \quad \text{και άρα} \quad |z| = r = 1.$$

Επιπλέον,

$$z^n = r^n e^{in\theta} = e^{in\theta} = 1.$$

Αυτό σημαίνει ότι το $n\theta$ είναι όρισμα του μιγαδικού αριθμού 1, ισοδύναμα

$$n\theta = \operatorname{Arg} 1 + 2k\pi = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Επομένως

$$\theta = \frac{2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Έχουμε λοιπόν αποδείξει:

$$z^n = 1 \quad \Longrightarrow \quad z = e^{2k\pi i/n} \text{ για κάποιο } k \in \mathbb{Z}.$$

Το αντίστροφο είναι προφανές καθώς

$$\left(e^{2k\pi i/n}\right)^n = e^{2k\pi i} = 1.$$

Άρα οι n-οστές ρίζες της μονάδας είναι ακριβώς οι μιγαδικοί αριθμοί $e^{2k\pi i/n}$, $k \in \mathbb{Z}$. Εκ πρώτης όψεως φαίνονται άπειροι πολλοί αριθμοί αλλά υπάρχουν επαναλήψεις. Για να το δούμε αυτό παρατηρούμε ότι για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ και για κάθε ακέραιο πολλαπλάσιο $l \cdot n$ του n έχουμε

$$\frac{2(k + l \cdot n)\pi}{n} = \frac{2k\pi}{n} + \frac{2ln\pi}{n} = \frac{2k\pi}{n} + 2l\pi.$$

Προκύπτει ότι οι τιμές των $e^{2k\pi i/n}$ για $k \in \mathbb{Z}$ επαναλαμβάνονται κάθε φορά που προσθέτουμε στο k ένα ακέραιο πολλαπλάσιο του n. Άρα οι διαφορετικές τιμές των $e^{2k\pi i/n}$ λαμβάνονται για τα k μέσα σε ένα διάστημα ακεραίων μήκους n. Για χάρη απλότητας παίρνουμε το διάστημα ακεραίων $\{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Επίσης, για τα $k = 0, 1, \ldots, n-1$, οι τιμές των $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ διαφέρουν ανά δύο: Αν

$$e^{2k\pi i/n} = e^{2m\pi i/n},$$

τότε

$$\frac{2(k-m)\pi}{n} = 2\ell\pi$$

για κάποιο $\ell \in \mathbb{Z}$, άρα $k - m = \ell n$. Για $k, m \in \{0, \ldots, n-1\}$ αυτό αναγκάζει $k = m$.

Επομένως οι λύσεις της (E4), δηλαδή οι n-οστές ρίζες της μονάδας είναι ακριβώς οι μιγαδικοί αριθμοί

$$\boxed{z_k = e^{2k\pi i/n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.}$$

Ισοδύναμα,

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Γεωμετρικά οι n-οστές ρίζες είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες πάνω στον μοναδιαίο κύκλο και οι γωνίες δύο διαδοχικών ριζών διαφέρουν κατά $\dfrac{2\pi}{n}$.

Παράδειγμα 8.1. Για $n = 4$ η εξίσωση

$$z^4 = 1$$

έχει τέσσερις λύσεις. Από τον γενικό τύπο

$$z_k = e^{2k\pi i/4} = e^{k\pi i/2}, \qquad k = 0, 1, 2, 3,$$

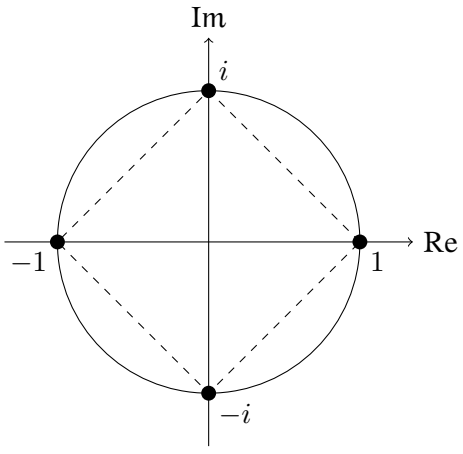
παίρνουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}
z_0 &= e^{i\cdot 0} = \cos 0 + i\sin 0 = 1,\\
z_1 &= e^{i\pi/2} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i,\\
z_2 &= e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1,\\
z_3 &= e^{i3\pi/2} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i.
\end{aligned}$$

Επομένως οι τέταρτες ρίζες της μονάδας είναι

$$1, \qquad i, \qquad -1, \qquad -i.$$

Γεωμετρικά βρίσκονται πάνω στον μοναδιαίο κύκλο και αποτελούν τις κορυφές ενός τετραγώνου, βλ. Σχήμα 7.



Σχήμα 7: Οι τέταρτες ρίζες της μονάδας.

Παράδειγμα 8.2. Για $n = 3$ η εξίσωση

$$z^3 = 1$$

έχει τρεις λύσεις. Από τον γενικό τύπο

$$z_k = e^{2k\pi i/3}, \qquad k = 0, 1, 2,$$

παίρνουμε

$$z_0 = e^{i\cdot 0} = \cos 0 + i \sin 0 = 1,$$

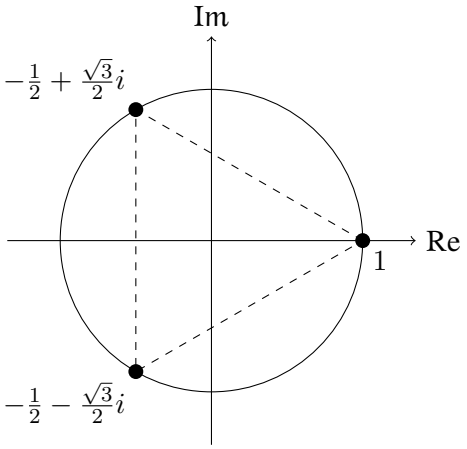
$$z_1 = e^{2\pi i/3} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i,$$

$$z_2 = e^{4\pi i/3} = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

Επομένως οι κυβικές ρίζες της μονάδας είναι

$$1, \qquad -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i, \qquad -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

Γεωμετρικά βρίσκονται πάνω στον μοναδιαίο κύκλο και αποτελούν τις κορυφές ενός ισόπλευρου τριγώνου, βλ. Σχήμα 8.



Σχήμα 8: Οι κυβικές ρίζες της μονάδας.

Ασκήσεις

Άσκηση 8.1. Να βρείτε όλες τις έκτες ρίζες της μονάδας, δηλαδή όλες τις λύσεις της εξίσωσης

$$z^6 = 1.$$

Να τις γράψετε τόσο σε πολική μορφή όσο και στη μορφή $x + yi$, και να τις παραστήσετε στο μιγαδικό επίπεδο.

Άσκηση 8.2. Να βρείτε όλες τις λύσεις της εξίσωσης

$$z^3 = 8.$$

Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι

$$z^3 = 8 \iff \left(\frac{z}{2}\right)^3 = 1.$$

Άσκηση 8.3. Να βρείτε όλες τις λύσεις της εξίσωσης

$$z^4 = 16.$$

Να τις γράψετε στη μορφή $x + yi$ και να τις παραστήσετε στο μιγαδικό επίπεδο.

Άσκηση 8.4. Να βρείτε όλες τις λύσεις της εξίσωσης

$$z^3 = -8.$$

Να τις γράψετε σε πολική μορφή και στη μορφή $x + yi$.

Υπόδειξη: Γράψτε

$$z = re^{i\theta} \text{ και } -8 = 8e^{i\pi}.$$

Τότε

$$z^3 = -8 \quad \Longrightarrow \quad r^3 e^{i3\theta} = 8e^{i\pi}.$$

Θυμηθείτε ότι, αν

$$\rho e^{i\alpha} = se^{i\beta}, \qquad \rho, s > 0,$$

τότε

$$\rho = s \qquad \text{και} \qquad \alpha - \beta = 2k\pi$$

για κάποιο $k \in \mathbb{Z}$. Αυτή η μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί και στις προηγούμενες δύο ασκήσεις.

Άσκηση 8.5. Να βρείτε όλες τις λύσεις της εξίσωσης

$$z^4 = -16.$$

Να προσδιορίσετε το μέτρο και ένα όρισμα καθεμιάς από τις λύσεις.

Άσκηση 8.6. Έστω ω μια κυβική ρίζα της μονάδας διαφορετική από το 1. Χρησιμοποιώντας την παραγοντοποίηση

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1),$$

να δείξετε ότι

$$1 + \omega + \omega^2 = 0.$$

Άσκηση 8.7. Να λύσετε στο $\mathbb{C}$ την εξίσωση

$$(1 + i)z^2 + (3 - 3i)z - (4 + 2i) = 0.$$

Υπόδειξη: Για μια εξίσωση

$$az^2 + bz + c = 0, \qquad a \neq 0,$$

πολλαπλασιάστε με $4a$ και χρησιμοποιήστε την ταυτότητα

$$4a(az^2 + bz + c) = (2az + b)^2 - (b^2 - 4ac).$$

Στην παρούσα εξίσωση θα χρειαστεί να βρείτε τις τετραγωνικές ρίζες ενός μιγαδικού αριθμού.

Άσκηση 8.8. Να δείξετε ότι αν z_0 είναι μία λύση της εξίσωσης

$$z^n = a, \qquad a \neq 0,$$

και ξ είναι οποιαδήποτε n-οστή ρίζα της μονάδας, τότε ο μιγαδικός αριθμός

$$z_0\xi$$

είναι επίσης λύση της ίδιας εξίσωσης.

Τι συμπέρασμα μπορείτε να βγάλετε για τη σχέση μεταξύ των λύσεων της $z^n = a$ και των n-οστών ριζών της μονάδας;

Παράρτημα Α: Ύπαρξη και Μοναδικότητα του $\mathbb{C}$

Σημείωση. Το Παράρτημα αυτό απευθύνεται κυρίως σε όσα άτομα επιθυμούν να εμβαθύνουν περισσότερο στα θεμέλια των μιγαδικών αριθμών. Η μελέτη του δεν είναι απαραίτητη για την κατανόηση και χρήση του υλικού του κυρίως κειμένου.

Θα εξετάσουμε δύο θεμελιώδη ζητήματα που αφήσαμε ανοιχτά στο κυρίως κείμενο: αν ένα σύστημα μιγαδικών αριθμών με τις ιδιότητες που απαιτήσαμε πράγματι υπάρχει και κατά ποια έννοια είναι μοναδικό. Στην πορεία θα επιστρέψουμε επίσης σε ορισμένα σημεία στα οποία, για λόγους απλότητας, αποφύγαμε προηγουμένως την πλήρη μαθηματική αυστηρότητα.

Ύπαρξη των μιγαδικών αριθμών

Η μορφή $x + yi$ καθώς και οι εξισώσεις (Ε3) στην Ενότητα 5 υποδεικνύουν μια φυσική κατασκευή του $\mathbb{C}$: κάθε στοιχείο του καθορίζεται από ένα ζεύγος (x, y) πραγματικών αριθμών, ενώ οι πράξεις ανάμεσα σε αυτά τα ζεύγη υπαγορεύονται από τις αντίστοιχες πράξεις των μιγαδικών αριθμών.

Αυτό μας οδηγεί να θεωρήσουμε το σύνολο $\mathbb{R}^2$ και να ορίσουμε πάνω του κατάλληλες πράξεις. Θα δείξουμε ότι με αυτές τις πράξεις το $\mathbb{R}^2$ ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες που απαιτήσαμε από το $\mathbb{C}$ στον Ορισμό 2.1.

Σε δεύτερο βήμα θα δείξουμε ότι η συγκεκριμένη κατασκευή δεν αποτελεί ουσιαστικά κάποια αυθαίρετη επιλογή: οποιοδήποτε άλλο αριθμητικό σύστημα ικανοποιεί τις ίδιες απαιτήσεις είναι "ισόμορφο" με αυτό.

Θεώρημα Α.1 (Ύπαρξη των μιγαδικών αριθμών). *Υπάρχει ένα σύνολο $\mathbb{C}$ με δύο πράξεις $+$ και $\cdot$ που ικανοποιεί τις ιδιότητες (α)–(δ) του Ορισμού 2.1.*

Απόδειξη χωρίς πλήρη αυστηρότητα. Θεωρούμε το σύνολο

$$C_0 = \mathbb{R}^2$$

και ορίζουμε σε αυτό δύο πράξεις ως εξής:

$$(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$$

και

$$(x, y) \cdot (u, v) = (xu - yv, xv + yu).$$

Οι πράξεις αυτές έχουν επιλεγεί έτσι ώστε να αντιστοιχούν ακριβώς στις γνωστές πράξεις των παραστάσεων $x + yi$. Πράγματι,

$$(x + yi) + (u + vi) = (x + u) + (y + v)i$$

και

$$(x + yi)(u + vi) = (xu - yv) + (xv + yu)i.$$

Αποδεικνύεται με άμεσους υπολογισμούς ότι οι παραπάνω πράξεις είναι προσεταιριστικές και αντιμεταθετικές και ότι ο πολλαπλασιασμός είναι επιμεριστικός ως προς την πρόσθεση. Οι σχετικές επαληθεύσεις αφήνονται ως άσκηση.

Το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης είναι το

$$(0,0),$$

το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού είναι το

$$(1,0),$$

και το αντίθετο του (x,y) ως προς την πρόσθεση είναι το

$$(-x,-y).$$

Μένει να ελέγξουμε ότι κάθε μη μηδενικό στοιχείο έχει πολλαπλασιαστικό αντίστροφο. Αν

$$(x,y) \neq (0,0),$$

τότε

$$x^2+y^2>0.$$

Θέτουμε

$$(u,v)=\left(\frac{x}{x^2+y^2},-\frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

Τότε

$$\begin{aligned}(x,y)(u,v) &= \left(\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2},\frac{-xy+xy}{x^2+y^2}\right)\\ &= (1,0).\end{aligned}$$

Άρα το (u,v) είναι ο πολλαπλασιαστικός αντίστροφος του (x,y).

Οι πραγματικοί αριθμοί μπορούν τώρα να θεωρηθούν ως τα στοιχεία της μορφής

$$(x,0), \qquad x\in\mathbb{R}.$$

Πράγματι,

$$(x,0)+(u,0)=(x+u,0)$$

και

$$(x,0)(u,0)=(xu,0),$$

οπότε οι πράξεις πάνω σε αυτά τα στοιχεία συμπίπτουν με τις συνήθεις πράξεις των πραγματικών αριθμών.

Θέτουμε τώρα

$$i_0=(0,1).$$

Τότε

$$i_0^2=(0,1)(0,1)=(-1,0),$$

δηλαδή, με την παραπάνω ταύτιση των πραγματικών αριθμών με τα στοιχεία $(x,0)$,

$$i_0^2=-1.$$

Τέλος, κάθε στοιχείο $(x,y)\in C_0$ γράφεται στη μορφή

$$(x,y)=(x,0)+(y,0)i_0.$$

Επομένως όλα τα στοιχεία του C_0 προκύπτουν από τους πραγματικούς αριθμούς και το i_0 χρησιμοποιώντας τις πράξεις που έχουμε ορίσει. Με αυτή την έννοια το C_0 δεν περιέχει επιπλέον αυθαίρετα στοιχεία, οπότε ικανοποιείται και η ιδιότητα (δ) του Ορισμού 2.1.

Άρα το $C_0 = \mathbb{R}^2$, με τις παραπάνω πράξεις, αποτελεί ένα σύνολο με όλες τις ιδιότητες που απαιτήσαμε από τους μιγαδικούς αριθμούς. Μπορούμε επομένως να πάρουμε

$$\mathbb{C} = C_0.$$

Σημείωση. Όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.1 ο λόγος που αναφέρουμε ότι η απόδειξη γίνεται "χωρίς πλήρη αυστηρότητα" είναι η ελεύθερη διατύπωση στον Ορισμό 2.1, ιδιαίτερα ως προς τις ιδιότητες (β) και (δ). Στη συνέχεια θα επανέλθουμε με την πλήρως αυστηρή απόδειξη αυτού του αποτελέσματος. □

Είναι το $\mathbb{C}$ το $\mathbb{R}^2$; Στην παραπάνω κατασκευή πήραμε

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2,$$

εφοδιάζοντας το $\mathbb{R}^2$ με τις κατάλληλες πράξεις. Είναι εύλογο να αναρωτηθεί κανείς γιατί δεν το κάναμε αυτό από την αρχή, ώστε να μη χρειαστεί να δώσουμε έναν γενικό ορισμό για τους μιγαδικούς αριθμούς και στη συνέχεια να αποδείξουμε τη μορφή $x + yi$, βλ. Ορισμό 2.1 και Θεώρημα 4.1.

Αυτό μπορεί πράγματι να γίνει και αποτελεί μια απολύτως έγκυρη μαθηματική οδό για την κατασκευή των μιγαδικών αριθμών. Όμως με αυτή την προσέγγιση οι έννοιες και τα θεωρήματα που αναπτύσσουμε διατυπώνονται, αρχικά τουλάχιστον, για αυτή τη συγκεκριμένη κατασκευή.

Για να δούμε τι σημαίνει αυτό, παρατηρούμε ότι υπάρχουν ποικίλες κατασκευές των μιγαδικών αριθμών στις οποίες δεν ισχύει κυριολεκτικά $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$: μπορούμε να έχουμε ένα σύνολο $K \neq \mathbb{R}^2$, εφοδιασμένο με δύο πράξεις $+$ και $\cdot$ και με ένα κατάλληλο στοιχείο j με $j^2 = -1$, το οποίο ικανοποιεί τις ιδιότητες (α)–(δ) του Ορισμού 2.1. Μάλιστα πιο κάτω θα δούμε ένα παράδειγμα μιας τέτοιας κατασκευής, βλ. Άσκηση Α.2.

Αν είχαμε ξεκινήσει αποκλειστικά από τον ορισμό $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, οι έννοιες που θα είχαμε εισαγάγει θα ήταν αρχικά διατυπωμένες για τη συγκεκριμένη αυτή υλοποίηση. Για παράδειγμα, σε μια διαφορετική κατασκευή K, ποιο θα ήταν το αντίστοιχο του μέτρου $|z|$ ή του συζυγούς $\overline{z}$; Και, αφού ορίζαμε τις αντίστοιχες έννοιες, γιατί θα έπρεπε να εξακολουθεί να ισχύει, για παράδειγμα, η ταυτότητα

$$z\overline{z} = |z|^2;$$

Θα χρειαζόταν ένα επιπλέον βήμα για να δείξουμε ότι οι έννοιες και τα αποτελέσματα που αναπτύξαμε χρησιμοποιώντας το $\mathbb{R}^2$ δεν εξαρτώνται ουσιαστικά από αυτή τη συγκεκριμένη κατασκευή, αλλά μεταφέρονται σε οποιαδήποτε άλλη κατασκευή ικανοποιεί τις ίδιες βασικές ιδιότητες.

Αυτό είναι όντως εφικτό: μπορούμε να περάσουμε σε μια περιγραφή ανεξάρτητη από τη συγκεκριμένη κατασκευή. Στην ουσία, αυτό είναι ακριβώς το επιπλέον βήμα που έχουμε ήδη ενσωματώσει στην προσέγγισή μας. Πρώτα περιγράψαμε τις ιδιότητες που θέλουμε να έχει το $\mathbb{C}$ και στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας μόνο αυτές τις ιδιότητες, αποδείξαμε τη μορφή $x+yi$ και ορίσαμε το μέτρο, τον συζυγή και τις υπόλοιπες βασικές έννοιες. Έτσι τα αποτελέσματα που αποδείξαμε δεν αποτελούν ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της κατασκευής $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, αλλά συνέπειες των ιδιοτήτων που απαιτήσαμε από τους μιγαδικούς αριθμούς. Οι

ίδιες έννοιες και οι ίδιες αποδείξεις εφαρμόζονται επομένως σε οποιαδήποτε κατασκευή $(K, +, \cdot)$ που ικανοποιεί τα (α)–(δ) του Ορισμού 2.1.

Μπορούμε επομένως να επιλέξουμε την ιδιαίτερα φυσική υλοποίηση

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$$

και να εργαζόμαστε με αυτή. Όμως η δυνατότητα αυτής της ταύτισης δεν προκύπτει από το γεγονός ότι κατασκευάσαμε ένα συγκεκριμένο σύστημα μιγαδικών αριθμών χρησιμοποιώντας το $\mathbb{R}^2$. Προκύπτει από τον Ορισμό 2.1 και το Θεώρημα 4.1: κάθε μιγαδικός αριθμός γράφεται με μοναδικό τρόπο ως

$$x + yi, \qquad x, y \in \mathbb{R},$$

και επομένως αντιστοιχεί σε ένα μοναδικό ζεύγος $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Επιπλέον, από τους αλγεβρικούς κανόνες του Ορισμού 2.1, οι πράξεις πάνω στα στοιχεία $x + yi$ αντιστοιχούν ακριβώς στις πράξεις που ορίσαμε πάνω στο $\mathbb{R}^2$. Με αυτή την έννοια μπορούμε, χωρίς απώλεια γενικότητας, να ταυτίζουμε το $\mathbb{C}$ με το $\mathbb{R}^2$ εφοδιασμένο με τις παραπάνω πράξεις.

Χρειάζεται, τέλος, προσοχή όταν προσθέτουμε κάποια εξωτερική δομή στη συγκεκριμένη υλοποίηση. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε το $\mathbb{R}^2$ ως ένα συγκεκριμένο επίπεδο μέσα στο $\mathbb{R}^3$, η θέση αυτού του επιπέδου μέσα στον μεγαλύτερο χώρο δεν αποτελεί κατ᾽ ανάγκη ιδιότητα του αφηρημένου $\mathbb{C}$.

Μοναδικότητα και τακτοποίηση των εκκρεμοτήτων

Έχουμε πλέον αποδείξει ότι ένα αριθμητικό σύστημα με τις ιδιότητες που απαιτήσαμε από το $\mathbb{C}$ πράγματι υπάρχει. Απομένει να εξετάσουμε κατά ποια έννοια είναι *μοναδικό*: αν κατασκευάσουμε τους μιγαδικούς αριθμούς με κάποιον διαφορετικό τρόπο, παίρνουμε ουσιαστικά το ίδιο αριθμητικό σύστημα;

Η μοναδικότητα που αναζητούμε εδώ δεν είναι μοναδικότητα με την κυριολεκτική συνολοθεωρητική έννοια. Δεν απαιτούμε δηλαδή δύο κατασκευές των μιγαδικών αριθμών να αποτελούνται από ακριβώς τα ίδια στοιχεία. Επιτρέπουμε να αντικαταστήσουμε ένα αριθμητικό σύστημα από ένα "αντίτυπό" του, αρκεί να υπάρχει μία αντιστοιχία μεταξύ των δύο που να διατηρεί πλήρως τις αριθμητικές πράξεις.

Αυτό δεν αποτελεί κάποια ιδιομορφία των μιγαδικών αριθμών. Η ίδια λογική εμφανίζεται ήδη στα γνωστά μας αριθμητικά συστήματα. Για παράδειγμα, στην απόδειξη της ύπαρξης του $\mathbb{C}$ θεωρήσαμε μέσα στο $\mathbb{R}^2$ το σύνολο

$$\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$$

ως ένα αντίτυπο του $\mathbb{R}$ και ταυτίσαμε τον πραγματικό αριθμό x με το ζεύγος $(x, 0)$. Τα δύο σύνολα δεν είναι κυριολεκτικά ίσα, αλλά από αριθμητική άποψη συμπεριφέρονται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο.

Για να διατυπώσουμε με ακρίβεια τι σημαίνει ότι δύο τέτοια αριθμητικά συστήματα έχουν την ίδια δομή, χρειαζόμαστε την έννοια του ομομορφισμού.

Ορισμός Α.2. Έστω K και L δύο αριθμητικά συστήματα εφοδιασμένα με πρόσθεση και πολλαπλασιασμό και τα οποία ικανοποιούν τις αλγεβρικές ιδιότητες που περιγράφονται στο (α) του Ορισμού 2.1.

Μια απεικόνιση

$$\phi : K \longrightarrow L$$

λέγεται *ομομορφισμός* αν για κάθε $x, y \in K$ ισχύει

$$\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$$

και

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y).$$

Με άλλα λόγια, ένας ομομορφισμός είναι μια απεικόνιση που διατηρεί την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό. Αν επιπλέον είναι ένα-προς-ένα, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε το K ως ένα αντίτυπο του $\phi[K]$ μέσα στο L.

Με τον όρο *εμφύτευση* θα εννοούμε έναν ομομορφισμό που είναι ένα-προς-ένα συνάρτηση.

Πριν προχωρήσουμε στη μοναδικότητα του $\mathbb{C}$, πρέπει τώρα να τακτοποιήσουμε κάποιες εκκρεμότητες. Στον Ορισμό 2.1 αποφύγαμε σκόπιμα την πλήρως αυστηρή διατύπωση των ιδιοτήτων (β) και (δ), ώστε να μη διακόψουμε την ανάπτυξη του κυρίως κειμένου με ορολογία από την αφηρημένη άλγεβρα. Για τον ίδιο λόγο, η χρήση της ιδιότητας (δ) στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.1 δεν ήταν πλήρως τυπική.

Τώρα θα διατυπώσουμε αυτές τις ιδιότητες με πλήρη μαθηματική ακρίβεια και θα δούμε ότι τα αποτελέσματα που χρησιμοποιήσαμε προηγουμένως δικαιολογούνται πλήρως. Η ίδια διατύπωση θα μας επιτρέψει στη συνέχεια να αποδείξουμε και τη μοναδικότητα του $\mathbb{C}$.

Ορισμός Α.3 (Αυστηρός ορισμός των μιγαδικών αριθμών). Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{R}$, εφοδιασμένο με τις συνήθεις πράξεις $+_{\mathbb{R}}$ και $\cdot_{\mathbb{R}}$. Έστω επίσης ένα σύνολο $\mathbb{C}$.

Λέμε ότι το $\mathbb{C}$ αποτελεί ένα *σύστημα μιγαδικών αριθμών* αν μπορούν να οριστούν σε αυτό δύο πράξεις $+$ και $\cdot$ με τις ακόλουθες ιδιότητες.

(1) Οι πράξεις $+$ και $\cdot$ ικανοποιούν τις συνήθεις αλγεβρικές ιδιότητες:

- η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός είναι προσεταιριστικές και αντιμεταθετικές πράξεις,
- υπάρχει ουδέτερο στοιχείο $0_{\mathbb{C}}$ για την πρόσθεση και ουδέτερο στοιχείο $1_{\mathbb{C}} \neq 0_{\mathbb{C}}$ για τον πολλαπλασιασμό,
- κάθε στοιχείο $z \in \mathbb{C}$ έχει αντίθετο ως προς την πρόσθεση,
- κάθε $z \in \mathbb{C}$ με $z \neq 0_{\mathbb{C}}$ έχει πολλαπλασιαστικό αντίστροφο,
- ο πολλαπλασιασμός είναι επιμεριστικός ως προς την πρόσθεση.

(2) Υπάρχει μια εμφύτευση

$$\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$

και ένα στοιχείο $i \in \mathbb{C}$ τέτοια ώστε:

(α)

$$i \cdot i = \phi(-1_{\mathbb{R}}),$$

όπου $1_{\mathbb{R}}$ είναι το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού $\cdot_{\mathbb{R}}$ και $-1_{\mathbb{R}}$ το αντίθετό του ως προς την πρόσθεση $+_{\mathbb{R}}$.

(β) Αν K είναι οποιοδήποτε άλλο σύνολο εφοδιασμένο με πράξεις $+_K$ και $\cdot_K$ που ικανοποιούν τις ιδιότητες του (1), και αν υπάρχουν μια εμφύτευση

$$\psi : \mathbb{R} \longrightarrow K$$

καθώς και ένα στοιχείο $j \in K$ τέτοια ώστε

$$j \cdot_K j = \psi(-1_{\mathbb{R}}),$$

τότε υπάρχει εμφύτευση

$$\tau : \mathbb{C} \longrightarrow K$$

τέτοια ώστε

$$\tau(\phi(x)) = \psi(x) \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Ας εξηγήσουμε λίγο τη σημασία των παραπάνω ιδιοτήτων.

Την εμφύτευση ϕ που εμφανίζεται στο (2) την έχουμε ήδη συναντήσει στην απόδειξη του Θεωρήματος Α.1. Εκεί, για την κατασκευή $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, θεωρήσαμε την απεικόνιση

$$\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad \phi(x) = (x, 0).$$

Οι σχέσεις

$$(x, 0) + (u, 0) = (x + u, 0)$$

και

$$(x, 0) \cdot (u, 0) = (xu, 0)$$

λένε ακριβώς ότι

$$\phi(x +_{\mathbb{R}} u) = \phi(x) + \phi(u)$$

και

$$\phi(x \cdot_{\mathbb{R}} u) = \phi(x) \cdot \phi(u).$$

Άρα η ϕ είναι ομομορφισμός. Επειδή είναι προφανώς και ένα-προς-ένα, είναι εμφύτευση. Με αυτόν τον τρόπο η αυστηρή διατύπωση εκφράζει ακριβώς αυτό που προηγουμένως περιγράφαμε ως "ταύτιση" του $\mathbb{R}$ με το αντίτυπο

$$\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$$

μέσα στο $\mathbb{R}^2$.

Η ιδιότητα (2β) δίνει τώρα ακριβές μαθηματικό περιεχόμενο στη φράση ότι το $\mathbb{C}$ είναι το "μικρότερο δυνατό" αριθμητικό σύστημα με τις ιδιότητες που ζητήσαμε. Πράγματι, έστω ότι έχουμε ένα άλλο σύστημα K που ικανοποιεί το (1), περιέχει μέσω της εμφύτευσης

$$\psi : \mathbb{R} \longrightarrow K$$

ένα αντίτυπο των πραγματικών αριθμών και περιέχει ένα στοιχείο j με

$$j^2 = \psi(-1_{\mathbb{R}}).$$

Τότε η (2β) εξασφαλίζει την ύπαρξη εμφύτευσης

$$\tau : \mathbb{C} \longrightarrow K$$

η οποία συμφωνεί με τις δύο εμφυτεύσεις των πραγματικών αριθμών:

$$\tau(\phi(x)) = \psi(x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Αν τώρα ταυτίσουμε το $\mathbb{R}$ με τις εικόνες $\phi[\mathbb{R}] \subseteq \mathbb{C}$ και $\psi[\mathbb{R}] \subseteq K$, η τελευταία σχέση γράφεται απλούστερα ως

$$\tau(x) = x \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δηλαδή η τ διατηρεί τους πραγματικούς αριθμούς σταθερούς. Επειδή η τ είναι εμφύτευση, μπορούμε επίσης να ταυτίσουμε το $\mathbb{C}$ με την εικόνα $\tau[\mathbb{C}] \subseteq K$. Με αυτές τις ταυτίσεις, η ιδιότητα (2β) λέει ουσιαστικά ότι

$$\mathbb{C} \subseteq K.$$

Αυτό είναι ακριβώς το αυστηρό νόημα του ότι το $\mathbb{C}$ δεν περιέχει περισσότερα στοιχεία από όσα επιβάλλονται από την παρουσία του $\mathbb{R}$ και μιας τετραγωνικής ρίζας του -1.

Με τον αυστηρό αυτό ορισμό μπορούμε τώρα να επιστρέψουμε στις εκκρεμότητες που αφήσαμε στο κυρίως κείμενο.

Στην απόδειξη του Θεωρήματος Α.1 έχουμε ήδη ουσιαστικά επαληθεύσει ότι η απεικόνιση

$$\phi(x) = (x, 0)$$

είναι εμφύτευση και ότι το στοιχείο

$$i = (0, 1)$$

ικανοποιεί την ιδιότητα (2α). Αυτό που απομένει να αποδειχθεί με πλήρη αυστηρότητα είναι ότι η συγκεκριμένη κατασκευή $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ ικανοποιεί και την ιδιότητα (2β).

Στη συνέχεια θα επιστρέψουμε στο Θεώρημα 4.1 και θα δώσουμε την πλήρως αυστηρή διατύπωση και απόδειξή του.

Αυστηρή συμπλήρωση της απόδειξης του Θεωρήματος Α.1. Στην αρχική απόδειξη έχουμε ήδη δείξει ότι στο $\mathbb{R}^2$, με τις πράξεις

$$(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$$

και

$$(x, y) \cdot (u, v) = (xu - yv, xv + yu),$$

ικανοποιούνται οι αλγεβρικές ιδιότητες του (1) του Ορισμού Α.3.

Έχουμε επίσης δει ότι η απεικόνιση

$$\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad \phi(x) = (x, 0),$$

είναι εμφύτευση. Πράγματι, είναι προφανώς ένα-προς-ένα και

$$\phi(x +_{\mathbb{R}} u) = (x + u, 0) = (x, 0) + (u, 0) = \phi(x) + \phi(u),$$

ενώ

$$\phi(x \cdot_{\mathbb{R}} u) = (xu, 0) = (x, 0) \cdot (u, 0) = \phi(x) \cdot \phi(u).$$

Επιπλέον, αν

$$i = (0, 1),$$

τότε

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = \phi(-1_{\mathbb{R}}),$$

οπότε ικανοποιείται και η ιδιότητα (2α).

Απομένει να επαληθεύσουμε την ιδιότητα (2β).

Έστω λοιπόν K ένα σύνολο εφοδιασμένο με πράξεις $+_K$ και $\cdot_K$ που ικανοποιούν τις ιδιότητες του (1), και έστω

$$\psi : \mathbb{R} \longrightarrow K$$

μια εμφύτευση. Υποθέτουμε επίσης ότι υπάρχει $j \in K$ τέτοιο ώστε

$$j \cdot_K j = \psi(-1_{\mathbb{R}}).$$

Πρέπει να κατασκευάσουμε μια εμφύτευση

$$\tau : \mathbb{R}^2 \longrightarrow K$$

η οποία να ικανοποιεί

$$\tau(\phi(x)) = \psi(x) \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Ορίζουμε

$$\tau(x, y) = \psi(x) +_K \psi(y) \cdot_K j.$$

Θα δείξουμε πρώτα ότι η τ είναι ομομορφισμός. Για την πρόσθεση έχουμε

$$\begin{aligned}
\tau\big((x, y) + (u, v)\big) &= \tau(x + u, y + v) \\
&= \psi(x + u) +_K \psi(y + v) \cdot_K j \\
&= \psi(x) +_K \psi(u) +_K \big(\psi(y) +_K \psi(v)\big) \cdot_K j \\
&= \big(\psi(x) +_K \psi(y) \cdot_K j\big) +_K \big(\psi(u) +_K \psi(v) \cdot_K j\big) \\
&= \tau(x, y) +_K \tau(u, v).
\end{aligned}$$

Για τον πολλαπλασιασμό, χρησιμοποιώντας ότι η ψ είναι ομομορφισμός και ότι

$$j^2 = \psi(-1_{\mathbb{R}}),$$

παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\tau(x, y) \cdot_K \tau(u, v) &= \big(\psi(x) +_K \psi(y)j\big)\big(\psi(u) +_K \psi(v)j\big) \\
&= \psi(x)\psi(u) +_K \psi(x)\psi(v)j +_K \psi(y)\psi(u)j +_K \psi(y)\psi(v)j^2 \\
&= \psi(xu) +_K \psi(xv)j +_K \psi(yu)j +_K \psi(yv)\psi(-1_{\mathbb{R}}).
\end{aligned}$$

Επειδή η ψ είναι εμφύτευση, από τις ιδιότητες των ομομορφισμών (βλ. Άσκηση A.1) έχουμε

$$\psi(-1_{\mathbb{R}}) = -1_K,$$

και επομένως

$$\psi(yv)\psi(-1_{\mathbb{R}}) = \psi(-yv).$$

Άρα

$$\begin{aligned}
\tau(x, y) \cdot_K \tau(u, v) &= \psi(xu - yv) +_K \psi(xv + yu)j \\
&= \tau(xu - yv, xv + yu) \\
&= \tau\big((x, y) \cdot (u, v)\big).
\end{aligned}$$

Επομένως η τ είναι ομομορφισμός.

Μένει να δείξουμε ότι είναι ένα-προς-ένα. Έστω

$$\tau(x, y) = \tau(u, v).$$

Τότε

$$\psi(x-u) +_K \psi(y-v)j = 0_K.$$

Αν $y - v \neq 0$, τότε, επειδή η ψ είναι εμφύτευση,

$$\psi(y-v) \neq 0_K$$

και επομένως έχει πολλαπλασιαστικό αντίστροφο στο K. Θα είχαμε τότε από τις ιδιότητες των εμφυτεύσεων (βλ. Άσκηση Α.1) ότι

$$j = -\psi(x-u)\,\psi(y-v)^{-1} = \psi\left(-\frac{x-u}{y-v}\right) = \psi(r),$$

όπου $r = -\frac{x-u}{y-v} \in \mathbb{R}$. Δηλαδή το j θα ανήκε στην εικόνα $\psi[\mathbb{R}]$ και θα είχαμε

$$\psi(r^2) = j^2 = \psi(-1_{\mathbb{R}}).$$

Τέλος, επειδή η ψ είναι ένα-προς-ένα,

$$r^2 = -1,$$

πράγμα αδύνατο στο $\mathbb{R}$.

Άρα αναγκαστικά

$$y = v.$$

Η σχέση

$$\psi(x-u) +_K \psi(y-v)j = 0_K$$

δίνει τότε

$$\psi(x-u) = 0_K.$$

Επειδή η ψ είναι ένα-προς-ένα και $\psi(0_{\mathbb{R}}) = 0_K$, παίρνουμε

$$x = u.$$

Επομένως η τ είναι ένα-προς-ένα και άρα είναι εμφύτευση.

Τέλος, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$\tau(\phi(x)) = \tau(x,0) = \psi(x) +_K \psi(0_{\mathbb{R}})j = \psi(x).$$

Άρα

$$\tau \circ \phi = \psi,$$

όπως απαιτεί η ιδιότητα (2β).

Επομένως η κατασκευή $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες του Ορισμού Α.3, και έτσι η απόδειξη του Θεωρήματος Α.1 ολοκληρώνεται με πλήρη αυστηρότητα. □

Θεώρημα Α.4 (Αυστηρή μορφή του Θεωρήματος 4.1). *Έστω $\mathbb{C}$ ένα σύστημα μιγαδικών αριθμών με την έννοια του Ορισμού Α.3, με εμφύτευση*

$$\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$

και στοιχείο $i \in \mathbb{C}$ όπως στον ίδιο ορισμό.

Τότε κάθε $z \in \mathbb{C}$ γράφεται με μοναδικό τρόπο στη μορφή

$$z = \phi(x) + \phi(y)i, \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

Αν ταυτίσουμε το $\mathbb{R}$ με το αντίτυπό του $\phi[\mathbb{R}] \subseteq \mathbb{C}$, η παραπάνω γραφή παίρνει τη γνωστή μορφή

$$z = x + yi, \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

Απόδειξη. Στην αρχική απόδειξη θεωρήσαμε το σύνολο

$$K = \{x + yi : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Επομένως εδώ θα θεωρήσουμε το σύνολο

$$L = \{\phi(x) + \phi(y)i : x, y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C}.$$

Όπως και στην περίπτωση του K, το σύνολο L, με τις πράξεις που κληρονομεί από το $\mathbb{C}$, ικανοποιεί τις αλγεβρικές ιδιότητες του (1).

Επίσης η ϕ παίρνει προφανώς τιμές στο L και συνεπώς είναι εμφύτευση από το $\mathbb{R}$ στο L. Επιπλέον,

$$i \in L$$

και

$$i^2 = \phi(-1_{\mathbb{R}}).$$

Μπορούμε επομένως να εφαρμόσουμε την ιδιότητα (2β) του Ορισμού Α.3 στο αριθμητικό σύστημα L. Παίρνουμε έτσι μια εμφύτευση

$$\tau : \mathbb{C} \longrightarrow L$$

τέτοια ώστε

$$\tau(\phi(x)) = \phi(x) \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δηλαδή η τ διατηρεί σταθερό το αντίτυπο των πραγματικών αριθμών μέσα στο $\mathbb{C}$.

Παρατηρούμε τώρα ότι

$$\tau(i)^2 = \tau(i^2) = \tau\big(\phi(-1_{\mathbb{R}})\big) = \phi(-1_{\mathbb{R}}) = i^2.$$

Άρα

$$\tau(i)^2 - i^2 = 0,$$

οπότε

$$(\tau(i) - i)(\tau(i) + i) = 0.$$

Από τις αλγεβρικές ιδιότητες του $\mathbb{C}$ προκύπτει ότι ένα γινόμενο είναι μηδέν μόνο αν ένας από τους δύο παράγοντες είναι μηδέν. Συνεπώς

$$\tau(i) = i \qquad \text{ή} \qquad \tau(i) = -i.$$

Έστω τώρα $z \in \mathbb{C}$. Επειδή

$$\tau(z) \in L,$$

υπάρχουν $x, y \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\tau(z) = \phi(x) + \phi(y)i.$$

Αν $\tau(i) = i$, τότε

$$\tau\big(\phi(x) + \phi(y)i\big) = \phi(x) + \phi(y)i = \tau(z).$$

Επειδή η τ είναι ένα-προς-ένα,

$$z = \phi(x) + \phi(y)i.$$

Αν, αντίθετα, $\tau(i) = -i$, τότε

$$\tau\big(\phi(x) - \phi(y)i\big) = \phi(x) + \phi(y)i = \tau(z),$$

και πάλι, επειδή η τ είναι ένα-προς-ένα,

$$z = \phi(x) - \phi(y)i.$$

Επειδή $-y \in \mathbb{R}$, και αυτή η τελευταία έκφραση είναι της μορφής

$$\phi(u) + \phi(v)i, \qquad u, v \in \mathbb{R}.$$

Άρα κάθε $z \in \mathbb{C}$ γράφεται στη μορφή

$$z = \phi(x) + \phi(y)i, \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

Απομένει η μοναδικότητα αυτής της γραφής. Έστω

$$\phi(x) + \phi(y)i = \phi(u) + \phi(v)i.$$

Τότε

$$\phi(x - u) + \phi(y - v)i = 0_{\mathbb{C}}.$$

Αν $y - v \neq 0$, επειδή η ϕ είναι εμφύτευση, από τις ιδιότητες των εμφυτεύσεων, βλ. Άσκηση A.1, παίρνουμε

$$i = -\phi(x - u)\,\phi(y - v)^{-1} = \phi\left(-\frac{x - u}{y - v}\right) = \phi(r),$$

όπου

$$r = -\frac{x - u}{y - v} \in \mathbb{R}.$$

Άρα το i θα ανήκε στην εικόνα $\phi[\mathbb{R}]$ και θα είχαμε

$$\phi(r^2) = i^2 = \phi(-1_{\mathbb{R}}).$$

Επειδή η ϕ είναι ένα-προς-ένα, θα προέκυπτε

$$r^2 = -1,$$

πράγμα αδύνατο στο $\mathbb{R}$.

Άρα

$$y = v,$$

και στη συνέχεια

$$\phi(x - u) = 0_{\mathbb{C}}.$$

Επειδή η ϕ είναι ένα-προς-ένα και

$$\phi(0_{\mathbb{R}}) = 0_{\mathbb{C}},$$

παίρνουμε

$$x = u.$$

Επομένως κάθε $z \in \mathbb{C}$ γράφεται με μοναδικό τρόπο στη μορφή

$$z = \phi(x) + \phi(y)i, \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

Με την παραπάνω ταύτιση του $\mathbb{R}$ με το αντίτυπο $\phi[\mathbb{R}] \subseteq \mathbb{C}$, αυτή είναι ακριβώς η γνωστή γραφή

$$z = x + yi.$$

□

Ορισμός Α.5. Μια εμφύτευση

$$\tau : K \longrightarrow L$$

η οποία είναι και επί λέγεται *ισομορφισμός*. Αν υπάρχει ισομορφισμός μεταξύ των K και L, λέμε ότι τα δύο αριθμητικά συστήματα είναι *ισόμορφα*.

Μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε με ακρίβεια τη μοναδικότητα των μιγαδικών αριθμών.

Θεώρημα Α.6 (Μοναδικότητα των μιγαδικών αριθμών). *Έστω $\mathbb{C}$ και $\mathbb{C}'$ δύο συστήματα μιγαδικών αριθμών με την έννοια του Ορισμού Α.3. Τότε τα $\mathbb{C}$ και $\mathbb{C}'$ είναι ισόμορφα.*

Πιο συγκεκριμένα, αν

$$\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \phi' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}'$$

είναι οι αντίστοιχες εμφυτεύσεις των πραγματικών αριθμών, τότε υπάρχει ισομορφισμός

$$\tau : \mathbb{C}' \longrightarrow \mathbb{C}$$

τέτοιος ώστε

$$\tau(\phi'(x)) = \phi(x) \qquad \textit{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Απόδειξη. Για συντομία, αν K και L είναι δύο συστήματα μιγαδικών αριθμών, θα γράφουμε

$$K \preccurlyeq L$$

όταν υπάρχει εμφύτευση από το K στο L η οποία συμφωνεί με τις αντίστοιχες εμφυτεύσεις του $\mathbb{R}$.

Από την ιδιότητα (2β) του Ορισμού Α.3, εφαρμοσμένη πρώτα με στόχο το $\mathbb{C}'$ και έπειτα με στόχο το $\mathbb{C}$, έχουμε

$$\mathbb{C} \preccurlyeq \mathbb{C}' \qquad \text{και} \qquad \mathbb{C}' \preccurlyeq \mathbb{C}.$$

Υπάρχουν επομένως εμφυτεύσεις

$$\sigma : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}', \qquad \tau : \mathbb{C}' \longrightarrow \mathbb{C}$$

τέτοιες ώστε

$$\sigma(\phi(x)) = \phi'(x)$$

και

$$\tau(\phi'(x)) = \phi(x) \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Η σύνθεση δύο εμφυτεύσεων είναι προφανώς εμφύτευση. Επομένως

$$f = \tau \circ \sigma : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

είναι εμφύτευση. Επιπλέον, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$f(\phi(x)) = \tau\big(\sigma(\phi(x))\big) = \tau(\phi'(x)) = \phi(x).$$

Άρα η f αφήνει σταθερό το αντίτυπο $\phi[\mathbb{R}]$ των πραγματικών αριθμών μέσα στο $\mathbb{C}$.

Θα δείξουμε ότι η f είναι επί.

Από

$$i^2 = \phi(-1_{\mathbb{R}})$$

έχουμε

$$f(i)^2 = f(i^2) = f\big(\phi(-1_{\mathbb{R}})\big) = \phi(-1_{\mathbb{R}}) = i^2.$$

Άρα

$$(f(i) - i)(f(i) + i) = 0,$$

και επομένως

$$f(i) = i \qquad \text{ή} \qquad f(i) = -i.$$

Έστω τώρα οποιοδήποτε $z \in \mathbb{C}$. Από το Θεώρημα Α.4, υπάρχουν $x, y \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$z = \phi(x) + \phi(y)i.$$

Αν $f(i) = i$, τότε

$$f\big(\phi(x) + \phi(y)i\big) = \phi(x) + \phi(y)i = z.$$

Άρα το z ανήκει στην εικόνα της f.

Αν $f(i) = -i$, τότε

$$f\big(\phi(x) - \phi(y)i\big) = \phi(x) + \phi(y)i = z.$$

Και πάλι το z ανήκει στην εικόνα της f.

Επομένως η f είναι επί.

Αλλά

$$f = \tau \circ \sigma.$$

Επειδή η σύνθεση αυτή είναι επί, η τ είναι επί. Πράγματι, για κάθε $z \in \mathbb{C}$ υπάρχει $w \in \mathbb{C}$ τέτοιο ώστε

$$z = f(w) = \tau(\sigma(w)),$$

οπότε το z ανήκει στην εικόνα της τ.

Η τ είναι ήδη εμφύτευση και επομένως ένα-προς-ένα. Άρα είναι και ένα-προς-ένα και επί, δηλαδή είναι ισομορφισμός

$$\tau : \mathbb{C}' \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Επιπλέον, από την κατασκευή της,

$$\tau(\phi'(x)) = \phi(x) \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

Ολοκληρώνουμε με το ακόλουθο αποτέλεσμα, το οποίο θα μας φανεί χρήσιμο στην Άσκηση Α.2.

Πρόταση Α.7. *Έστω $\mathbb{C}$ ένα σύστημα μιγαδικών αριθμών και έστω K ένα σύνολο εφοδιασμένο με δύο πράξεις $+_K$ και $\cdot_K$ οι οποίες ικανοποιούν τις αλγεβρικές ιδιότητες του (1) του Ορισμού Α.3.*

Αν το $(K, +_K, \cdot_K)$ είναι ισόμορφο με το $\mathbb{C}$, τότε το K, με τις πράξεις $+_K$ και $\cdot_K$, αποτελεί επίσης ένα σύστημα μιγαδικών αριθμών με την έννοια του Ορισμού Α.3.

Απόδειξη. Έστω

$$T : \mathbb{C} \longrightarrow K$$

ένας ισομορφισμός. Αν

$$\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$

είναι η εμφύτευση των πραγματικών αριθμών και $i \in \mathbb{C}$ το στοιχείο που εμφανίζεται στον Ορισμό Α.3, ορίζουμε

$$\phi_K = T \circ \phi$$

και

$$j = T(i).$$

Τότε η $\phi_K : \mathbb{R} \to K$ είναι εμφύτευση και

$$j^2 = T(i)^2 = T(i^2) = T\big(\phi(-1_{\mathbb{R}})\big) = \phi_K(-1_{\mathbb{R}}).$$

Μένει να επαληθεύσουμε την ιδιότητα (2β). Έστω λοιπόν L ένα αριθμητικό σύστημα όπως στον αυστηρό ορισμό, με εμφύτευση

$$\psi : \mathbb{R} \longrightarrow L$$

και κατάλληλο στοιχείο του L. Επειδή το $\mathbb{C}$ είναι σύστημα μιγαδικών αριθμών, υπάρχει εμφύτευση

$$\tau : \mathbb{C} \longrightarrow L$$

τέτοια ώστε

$$\tau(\phi(x)) = \psi(x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Τότε

$$\tau \circ T^{-1} : K \longrightarrow L$$

είναι εμφύτευση και, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$(\tau \circ T^{-1})(\phi_K(x)) = \tau(\phi(x)) = \psi(x).$$

Άρα το K ικανοποιεί και την ιδιότητα (2β). □

Ασκήσεις

Άσκηση Α.1. Έστω

$$\phi : K \longrightarrow L$$

ένας ομομορφισμός.

1. Να δείξετε ότι
$$\phi(0) = 0.$$

2. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in K$,
$$\phi(-x) = -\phi(x).$$
Συνεπώς,
$$\phi(x - y) = \phi(x) - \phi(y).$$

3. Αν ο ϕ είναι ένα-προς-ένα, να δείξετε ότι
$$\phi(1) = 1.$$

4. Υποθέτουμε ότι ο ϕ είναι ένα-προς-ένα. Αν $x \neq 0$, να δείξετε ότι
$$\phi(x) \neq 0$$
και
$$\phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1}.$$

5. Συμπεράνετε ότι, αν ο ϕ είναι ένα-προς-ένα και $y \neq 0$, τότε

$$\phi\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\phi(x)}{\phi(y)}.$$

Άσκηση Α.2. Θεωρούμε το σύνολο

$$V = \{a\cos t + b\sin t : a, b \in \mathbb{R}\}$$

των πραγματικών συναρτήσεων αυτής της μορφής. Στο V θεωρούμε τη συνήθη πρόσθεση συναρτήσεων και ορίζουμε μια νέα πράξη $*$ ως ακολούθως: για κάθε $z, w \in V$ θέτουμε

$$z * w : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (z * w)(t) = z(0)w(t) - z'(0)w'(t).$$

1. Να δείξετε ότι κάθε $z \in V$ γράφεται με μοναδικό τρόπο στη μορφή

$$z(t) = a\cos t + b\sin t, \qquad a, b \in \mathbb{R},$$

και ότι τότε

$$z(0) = a, \qquad z'(0) = b.$$

2. Έστω

$$z(t) = a\cos t + b\sin t, \qquad w(t) = c\cos t + d\sin t.$$

Να δείξετε ότι

$$z * w = (ac - bd)\cos t + (ad + bc)\sin t.$$

Συμπεράνετε ότι $z * w \in V$ για κάθε $z, w \in V$ και άρα η $*$ είναι πράξη στο V.

3. Να δείξετε ότι η συνάρτηση

$$e(t) = \cos t$$

είναι ουδέτερο στοιχείο για τον πολλαπλασιασμό $*$ και ότι, αν

$$j(t) = \sin t,$$

τότε

$$j * j = -e.$$

Να δείξετε επίσης ότι η απεικόνιση

$$\phi : \mathbb{R} \longrightarrow V, \qquad \phi(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \phi(x)(t) = x\cos t,$$

είναι εμφύτευση, όπου στο V χρησιμοποιούμε τη συνήθη πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό $*$.

4. Αν

$$z(t) = a\cos t + b\sin t, \qquad t \in \mathbb{R}$$

και η z δεν είναι ταυτικά η μηδενική συνάρτηση, να δείξετε ότι ο πολλαπλασιαστικός αντίστροφός του ως προς την $*$ είναι η συνάρτηση

$$z^{-1}(t) = \frac{a}{a^2 + b^2}\cos t - \frac{b}{a^2 + b^2}\sin t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

5. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow V, \qquad T(a,b) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : T(a,b)(t) = a\cos t + b\sin t,$$

όπου στο $\mathbb{R}^2$ χρησιμοποιούμε τις πράξεις

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$$

και

$$(a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Να δείξετε ότι η T είναι ισομορφισμός.

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση Α.7, να συμπεράνετε ότι το V, με τις πράξεις που ορίσαμε, αποτελεί επίσης ένα σύστημα μιγαδικών αριθμών με την έννοια του Ορισμού Α.3.

Παράρτημα Β: Υποδείξεις και Λύσεις των Ασκήσεων

Οι λύσεις που ακολουθούν είναι σκόπιμα σύντομες. Σε αρκετές περιπτώσεις δίνεται ο βασικός υπολογισμός ή η βασική ιδέα, ώστε να μπορούν να χρησιμοποιηθούν και ως υποδείξεις.

Ασκήσεις της Ενότητας 5

Λύση της Άσκησης 5.1. Χρησιμοποιούμε

$$|x+yi| = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad \overline{x+yi} = x-yi, \qquad (x+yi)^{-1} = \frac{x-yi}{x^2+y^2}.$$

Έτσι:

z	$\lvert z\rvert$	$\overline{z}$	z^{-1}
$2-i$	$\sqrt{5}$	$2+i$	$\dfrac{2+i}{5}$
$-1+2i$	$\sqrt{5}$	$-1-2i$	$\dfrac{-1-2i}{5}$
$3i$	3	$-3i$	$-\dfrac{i}{3}$
-2	2	-2	$-\dfrac{1}{2}$

Λύση της Άσκησης 5.2. Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με τον συζυγή του παρονομαστή. Παίρνουμε

$$\text{(α)}\ \frac{1+3i}{2}, \qquad \text{(β)}\ -i, \qquad \text{(γ)}\ \frac{11-2i}{5}, \qquad \text{(δ)}\ \frac{1+i}{2}.$$

Λύση της Άσκησης 5.3. Έχουμε $\overline{z} = 1+2i$ και $|z|^2 = 5$. Επομένως

$$\text{(α)}\ 2, \qquad \text{(β)}\ -4i, \qquad \text{(γ)}\ 5,$$

και

$$\text{(δ)}\ \frac{-3-4i}{5}, \qquad \text{(ε)}\ \frac{2}{5}.$$

Λύση της Άσκησης 5.4. Έχουμε

$$\overline{z} = 1-i, \qquad \overline{w} = 1+2i.$$

Άρα

$$\text{(α)}\ -1+3i, \qquad \text{(β)}\ -1-3i, \qquad \text{(γ)}\ \frac{3-i}{5}, \qquad \text{(δ)}\ \frac{-5+12i}{13}.$$

Λύση της Άσκησης 5.5. Αν $z = x+yi$, τότε

$$z+\overline{z} = (x+yi)+(x-yi) = 2x = 2\,\mathrm{Re}\,z$$

και

$$z-\overline{z} = 2yi = 2i\,\mathrm{Im}\,z.$$

Για $z \neq 0$,

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}, \qquad \frac{1}{\overline{z}} = \frac{z}{|z|^2}.$$

Επομένως

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{\overline{z}} = \frac{2\,\mathrm{Re}\, z}{|z|^2}$$

και

$$\frac{1}{z} - \frac{1}{\overline{z}} = -\frac{2i\,\mathrm{Im}\, z}{|z|^2}.$$

Λύση της Άσκησης 5.6. Γράφουμε $z = x + yi$. Τότε

$$z + \overline{z} = 2x = 6, \qquad z - \overline{z} = 2yi = -4i.$$

Άρα $x = 3$ και $y = -2$, οπότε

$$\boxed{z = 3 - 2i}.$$

Ασκήσεις της Ενότητας 6

Λύση της Άσκησης 6.1. Οι αριθμοί z_1, z_2 αντιστοιχούν στα σημεία

$$(1, 2), \qquad (3, -1),$$

ενώ

$$z_1 + z_2 = 4 + i$$

αντιστοιχεί στο $(4, 1)$. Τα διανύσματα από το 0 προς τα $(1, 2)$ και $(3, -1)$ είναι δύο διαδοχικές πλευρές παραλληλογράμμου, και η διαγώνιός του καταλήγει στο $(4, 1)$.

Λύση της Άσκησης 6.2. Η απόσταση των (x, y) και (u, v) είναι

$$\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}.$$

Αλλά

$$z - w = (x - u) + (y - v)i,$$

οπότε η παραπάνω ποσότητα είναι ακριβώς $|z - w|$.

Για $z = 1 + 2i$ και $w = -2 + i$,

$$z - w = 3 + i,$$

άρα η απόσταση είναι

$$|3 + i| = \sqrt{10}.$$

Λύση της Άσκησης 6.3. Αν $z = x + yi$, τότε

$$\overline{z} = x - yi, \qquad -z = -x - yi, \qquad iz = -y + xi.$$

Άρα:

- $z \mapsto \overline{z}$ είναι ανάκλαση ως προς τον πραγματικό άξονα,

- $z \mapsto -z$ είναι περιστροφή κατά π γύρω από το 0,
- $z \mapsto iz$ είναι περιστροφή κατά $\pi/2$ γύρω από το 0 με τη θετική φορά.

Λύση της Άσκησης 6.4. Η σχέση

$$|z - (1+i)| = 2$$

περιγράφει τα σημεία που απέχουν 2 από το $1+i$. Επομένως είναι ο κύκλος με κέντρο $1+i$ και ακτίνα 2.

Η σχέση

$$|z-1| = |z+1|$$

περιγράφει τα σημεία που ισαπέχουν από τα 1 και -1. Πρόκειται για τη μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος που τα ενώνει, δηλαδή για τον φανταστικό άξονα

$$\operatorname{Re} z = 0.$$

Ασκήσεις της Ενότητας 7

Λύση της Άσκησης 7.1. Οι ζητούμενες πολικές μορφές είναι

$$\begin{aligned}
&(\alpha)\ 1+i = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4},\\
&(\beta)\ 1-i = \sqrt{2}\, e^{-i\pi/4},\\
&(\gamma)\ -1+i = \sqrt{2}\, e^{i3\pi/4},\\
&(\delta)\ -\sqrt{3}+i = 2e^{i5\pi/6},\\
&(\varepsilon)\ -2i = 2e^{-i\pi/2},\\
&(\sigma\tau)\ -3 = 3e^{i\pi}.
\end{aligned}$$

Σε καθεμία από τις παραπάνω γραφές $re^{i\theta}$, η τιμή του θ είναι το αντίστοιχο κύριο όρισμα.

Λύση της Άσκησης 7.2. Χρησιμοποιώντας $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ παίρνουμε

$$(\alpha)\ 1+\sqrt{3}\, i, \qquad (\beta)\ -3i,$$

$$(\gamma)\ -2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\, i, \qquad (\delta)\ 1-i.$$

Λύση της Άσκησης 7.3. Για $k \in \mathbb{Z}$:

z	όλα τα ορίσματα	$\operatorname{Arg} z$
i	$\frac{\pi}{2} + 2k\pi$	$\frac{\pi}{2}$
-1	$\pi + 2k\pi$	π
$1-i$	$-\frac{\pi}{4} + 2k\pi$	$-\frac{\pi}{4}$
$-1-i$	$-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$

Λύση της Άσκησης 7.4. Με τους κανόνες της πολικής μορφής,

$$zw = 6e^{i(\pi/3-\pi/4)} = 6e^{i\pi/12}.$$

Άρα $|zw| = 6$ και $\operatorname{Arg}(zw) = \pi/12$.

Επίσης

$$\frac{z}{w} = \frac{2}{3}e^{i(\pi/3+\pi/4)} = \frac{2}{3}e^{i7\pi/12},$$

οπότε

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{2}{3}, \qquad \operatorname{Arg}\Big(\frac{z}{w}\Big) = \frac{7\pi}{12}.$$

Τέλος,

$$z^{-1} = \frac{1}{2}e^{-i\pi/3},$$

οπότε $|z^{-1}| = 1/2$ και $\operatorname{Arg}(z^{-1}) = -\pi/3$.

Λύση της Άσκησης 7.5. Έχουμε

$$zw = e^{i(3\pi/4+2\pi/3)} = e^{i17\pi/12}.$$

Επειδή

$$\frac{17\pi}{12} - 2\pi = -\frac{7\pi}{12} \in (-\pi, \pi],$$

παίρνουμε

$$\operatorname{Arg}(zw) = -\frac{7\pi}{12}.$$

Αντίθετα,

$$\operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w = \frac{17\pi}{12}.$$

Οι δύο ποσότητες διαφέρουν κατά 2π: το άθροισμα είναι όρισμα του zw, αλλά όχι το κύριο όρισμά του.

Λύση της Άσκησης 7.6. Από την ιδιότητα του μέτρου,

$$\left|\frac{z}{|z|}\right| = \frac{|z|}{|z|} = 1.$$

Αν $z = |z|e^{i\theta}$, τότε

$$\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}.$$

Γεωμετρικά, ο αριθμός $z/|z|$ είναι το σημείο του μοναδιαίου κύκλου που βρίσκεται στην ίδια διεύθυνση από το 0 με τον z.

Λύση της Άσκησης 7.7. Έχουμε

$$1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}, \qquad 1 - i = \sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}, \qquad \sqrt{3} + i = 2e^{i\pi/6}.$$

Άρα

$$(1+i)^8 = (\sqrt{2})^8 e^{i2\pi} = 16,$$
$$(1-i)^6 = (\sqrt{2})^6 e^{-i3\pi/2} = 8i,$$

και

$$(\sqrt{3}+i)^5 = 2^5 e^{i5\pi/6} = -16\sqrt{3} + 16i.$$

Ασκήσεις της Ενότητας 8

Λύση της Άσκησης 8.1. Οι έκτες ρίζες της μονάδας είναι

$$z_k = e^{ik\pi/3}, \qquad k = 0, 1, \ldots, 5.$$

Στη μορφή $x + yi$ είναι

$$1, \quad \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad -1, \quad -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Γεωμετρικά είναι οι κορυφές κανονικού εξαγώνου πάνω στον μοναδιαίο κύκλο.

Λύση της Άσκησης 8.2. Από

$$\left(\frac{z}{2}\right)^3 = 1$$

προκύπτει ότι $z/2$ είναι κυβική ρίζα της μονάδας. Επομένως

$$z = 2e^{2k\pi i/3}, \qquad k = 0, 1, 2,$$

δηλαδή

$$2, \quad -1 + \sqrt{3}\, i, \quad -1 - \sqrt{3}\, i.$$

Λύση της Άσκησης 8.3. Επειδή

$$\left(\frac{z}{2}\right)^4 = 1,$$

οι λύσεις είναι δύο φορές οι τέταρτες ρίζες της μονάδας:

$$2, \quad 2i, \quad -2, \quad -2i.$$

Γεωμετρικά είναι οι κορυφές τετραγώνου πάνω στον κύκλο $|z| = 2$.

Λύση της Άσκησης 8.4. Γράφουμε

$$-8 = 8e^{i(\pi + 2k\pi)}.$$

Άρα οι λύσεις έχουν μέτρο 2 και μπορούν να γραφούν

$$z_k = 2e^{i(\pi + 2k\pi)/3}, \qquad k = 0, 1, 2.$$

Παίρνουμε

$$2e^{i\pi/3} = 1 + \sqrt{3}\, i, \qquad 2e^{i\pi} = -2, \qquad 2e^{i5\pi/3} = 1 - \sqrt{3}\, i.$$

Λύση της Άσκησης 8.5. Γράφουμε

$$-16 = 16e^{i(\pi + 2k\pi)}.$$

Οι τέσσερις λύσεις είναι

$$z_k = 2e^{i(\pi + 2k\pi)/4}, \qquad k = 0, 1, 2, 3.$$

Δηλαδή μπορούμε να πάρουμε τα ορίσματα

$$\frac{\pi}{4}, \quad \frac{3\pi}{4}, \quad \frac{5\pi}{4}, \quad \frac{7\pi}{4},$$

και όλες οι λύσεις έχουν μέτρο 2.

Λύση της Άσκησης 8.6. Αφού $\omega^3 = 1$,

$$0 = \omega^3 - 1 = (\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1).$$

Επειδή $\omega \neq 1$, έχουμε $\omega - 1 \neq 0$. Άρα

$$1 + \omega + \omega^2 = 0.$$

Λύση της Άσκησης 8.7. Θέτουμε

$$a = 1 + i, \qquad b = 3 - 3i, \qquad c = -4 - 2i.$$

Από την ταυτότητα της υπόδειξης η εξίσωση είναι ισοδύναμη με

$$(2az + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

Υπολογίζουμε

$$b^2 - 4ac = 8 + 6i = (3 + i)^2.$$

Άρα

$$2(1 + i)z + (3 - 3i) = \pm(3 + i).$$

Για το πρόσημο $+$ παίρνουμε

$$z = 1 + i,$$

ενώ για το πρόσημο $-$ παίρνουμε

$$z = -1 + 2i.$$

Επομένως

$$z = 1 + i \quad \text{ή} \quad z = -1 + 2i.$$

Λύση της Άσκησης 8.8. Αφού $z_0^n = a$ και $\xi^n = 1$,

$$(z_0\xi)^n = z_0^n \xi^n = a.$$

Άρα κάθε $z_0\xi$, όπου ξ είναι n-οστή ρίζα της μονάδας, είναι λύση.

Ισχύει και το αντίστροφο. Αν z είναι οποιαδήποτε λύση, τότε $a \neq 0$ συνεπάγεται $z_0 \neq 0$, και

$$\left(\frac{z}{z_0}\right)^n = \frac{z^n}{z_0^n} = 1.$$

Άρα z/z_0 είναι n-οστή ρίζα της μονάδας. Επομένως όλες οι λύσεις είναι ακριβώς

$$z = z_0\xi,$$

όπου ξ διατρέχει τις n-οστές ρίζες της μονάδας.

Ασκήσεις του Παραρτήματος Α

Λύση της Άσκησης Α.1. Από

$$\phi(0) = \phi(0+0) = \phi(0) + \phi(0)$$

προκύπτει, προσθέτοντας το αντίθετο του $\phi(0)$, ότι

$$\phi(0) = 0.$$

Για κάθε $x \in K$,

$$0 = \phi(0) = \phi(x + (-x)) = \phi(x) + \phi(-x),$$

οπότε

$$\phi(-x) = -\phi(x).$$

Επομένως

$$\phi(x - y) = \phi(x) + \phi(-y) = \phi(x) - \phi(y).$$

Υποθέτουμε τώρα ότι η ϕ είναι ένα-προς-ένα. Επειδή $1 \neq 0$, έχουμε

$$\phi(1) \neq \phi(0) = 0.$$

Επιπλέον,

$$\phi(1)^2 = \phi(1^2) = \phi(1).$$

Πολλαπλασιάζοντας με τον αντίστροφο του μη μηδενικού στοιχείου $\phi(1)$ παίρνουμε

$$\phi(1) = 1.$$

Αν $x \neq 0$, τότε από το ότι η ϕ είναι ένα-προς-ένα έχουμε

$$\phi(x) \neq 0.$$

Επίσης,

$$\phi(x)\phi(x^{-1}) = \phi(xx^{-1}) = \phi(1) = 1,$$

άρα

$$\phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1}.$$

Τέλος, αν $y \neq 0$,

$$\phi\left(\frac{x}{y}\right) = \phi(xy^{-1}) = \phi(x)\phi(y^{-1}) = \phi(x)\phi(y)^{-1} = \frac{\phi(x)}{\phi(y)}.$$

Λύση της Άσκησης Α.2.

1. Αν

   $$z(t) = a\cos t + b\sin t,$$

   τότε

   $$z(0) = a$$

   και

   $$z'(t) = -a\sin t + b\cos t, \qquad z'(0) = b.$$

   Επομένως οι συντελεστές a, b καθορίζονται από τη συνάρτηση z και άρα η παραπάνω γραφή είναι μοναδική.

2. Για
$$z(t) = a\cos t + b\sin t, \qquad w(t) = c\cos t + d\sin t$$
έχουμε
$$z(0) = a, \qquad z'(0) = b$$
και
$$w'(t) = -c\sin t + d\cos t.$$
Άρα
$$\begin{aligned}(z * w)(t) &= a(c\cos t + d\sin t) - b(-c\sin t + d\cos t)\\ &= (ac - bd)\cos t + (ad + bc)\sin t.\end{aligned}$$
Η τελευταία συνάρτηση ανήκει στο V, οπότε η $*$ είναι πράξη στο V.

3. Η συνάρτηση
$$e(t) = \cos t$$
αντιστοιχεί στους συντελεστές $(1, 0)$. Επομένως, από τον τύπο του προηγούμενου ερωτήματος,
$$e * z = z * e = z$$
για κάθε $z \in V$.
Αν
$$j(t) = \sin t,$$
τότε το j αντιστοιχεί στους συντελεστές $(0, 1)$ και συνεπώς
$$j * j = -\cos t = -e.$$
Για
$$\phi : \mathbb{R} \longrightarrow V, \qquad \phi(x)(t) = x\cos t,$$
έχουμε
$$\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$$
και, χρησιμοποιώντας τον τύπο του προηγούμενου ερωτήματος,
$$\phi(x) * \phi(y) = xy\cos t = \phi(xy).$$
Επιπλέον, αν $\phi(x) = \phi(y)$, τότε θέτοντας $t = 0$ παίρνουμε $x = y$. Άρα η ϕ είναι εμφύτευση.

4. Αν
$$z(t) = a\cos t + b\sin t \neq 0,$$
τότε $(a, b) \neq (0, 0)$ και επομένως
$$a^2 + b^2 > 0.$$
Θέτουμε
$$w(t) = \frac{a}{a^2 + b^2}\cos t - \frac{b}{a^2 + b^2}\sin t.$$
Από τον τύπο του ερωτήματος (2) παίρνουμε
$$z * w = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}\cos t + \frac{-ab + ab}{a^2 + b^2}\sin t = \cos t = e.$$
Άρα
$$z^{-1} = w.$$

5. Από το ερώτημα (1), η απεικόνιση

$$T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow V, \qquad T(a,b) = a\cos t + b\sin t$$

είναι ένα-προς-ένα και επί.

Επιπλέον,

$$T\big((a,b)+(c,d)\big) = T(a,b) + T(c,d),$$

ενώ, από το ερώτημα (2),

$$\begin{aligned} T\big((a,b)\cdot(c,d)\big) &= T(ac-bd, ad+bc) \\ &= (ac-bd)\cos t + (ad+bc)\sin t \\ &= T(a,b) * T(c,d). \end{aligned}$$

Άρα η T είναι ισομορφισμός.

Συνεπώς όλες οι ιδιότητες του (1) μεταφέρονται από το $\mathbb{R}^2$ στο V. Αφού το $\mathbb{R}^2$ με τις παραπάνω πράξεις αποτελεί σύστημα μιγαδικών αριθμών, από την Πρόταση Α.7 προκύπτει ήδη ότι και το V αποτελεί σύστημα μιγαδικών αριθμών.

Ας δούμε ειδικότερα πώς μεταφέρεται η ιδιότητα (2β). Έστω K ένα σύνολο με πράξεις όπως στον Ορισμό Α.3, με εμφύτευση

$$\psi : \mathbb{R} \longrightarrow K$$

και στοιχείο $k \in K$ τέτοιο ώστε

$$k^2 = \psi(-1_{\mathbb{R}}).$$

Επειδή το $\mathbb{R}^2$ είναι σύστημα μιγαδικών αριθμών, υπάρχει εμφύτευση

$$\tau_0 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow K$$

τέτοια ώστε

$$\tau_0(x,0) = \psi(x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Τότε η σύνθεση

$$\tau_0 \circ T^{-1} : V \longrightarrow K$$

είναι εμφύτευση. Επιπλέον, επειδή

$$\phi(x) = T(x,0),$$

έχουμε

$$(\tau_0 \circ T^{-1})(\phi(x)) = \tau_0(x,0) = \psi(x).$$

Άρα ικανοποιείται ακριβώς η ιδιότητα (2β) του αυστηρού ορισμού.