ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 1
Κινηματική

1. Η ταχύτητα ενός σωματιδίου συναρτήσει του χρόνου δίνεται από τη σχέση $v(t) = -v_0 \ln(1-bt)$. Να βρείτε την επιτάχυνση και τη θέση του σωματιδίου συναρτήσει του χρόνου αν $x(0) = 0$.

Απ. $a(t) = \dfrac{b v_0}{1-bt}$, $x(t) = \dfrac{v_0}{b}\left[\ln(1-bt) - bt\ln(1-bt) + bt\right]$

2. Η ταχύτητα ενός σωματιδίου που κινείται σε οριζόντια ευθεία μειώνεται εκθετικά με τον χρόνο, σύμφωνα με τη σχέση $v(t) = v_0 e^{-t/\tau}, v_0, \tau > 0$. Αν $x(0) = 0$ να βρείτε την επιτάχυνση και τη θέση του κινητού συναρτήσει του χρόνου.

Απ. $a(t) = -\dfrac{v_0}{\tau}e^{-t/\tau}$, $x(t) = v_0\tau\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$

3. Η επιτάχυνση ενός σώματος που κινείται ευθύγραμμα δίνεται από τη σχέση $a(t) = 1 - t^2$ (SI). Υπολογίστε την ταχύτητα και τη θέση του σώματος συναρτήσει του χρόνου, αν για t = 3 s είναι υ = 2 m/s και x = 9 m.

Απ. $v(t) = 4t - \dfrac{t^3}{3} - 1$, $x(t) = 2t^2 - \dfrac{t^4}{12} - t + \dfrac{3}{4}$

4. Ένα σωματίδιο κινείται κατά μήκος της θετικής κατεύθυνσης του άξονα x με ταχύτητα που δίνεται από τη σχέση $v = k\sqrt{x}, k > 0$. Αν $x(0) = 0$ να βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σωματιδίου συναρτήσει του χρόνου. Επίσης, να βρείτε τη μέση ταχύτητα του σωματιδίου στο διάστημα μέχρι να φτάσει σε απόσταση S από την αρχή.

Απ. $v(t) = \dfrac{k^2 t}{2}$, $a(t) = \dfrac{k^2}{2}$, $\bar{v} = \dfrac{k\sqrt{S}}{2}$

5. Σώμα κινείται σε οριζόντια ευθεία με επιτάχυνση που δίνεται από τη σχέση $a = 6\sqrt[3]{x}$ (SI) και γνωρίζουμε ότι για $t = 2\,\text{s}$ το σώμα βρισκόταν στη θέση $x(2) = 27\,\text{m}$ με ταχύτητα $v(2) = 27\,\text{m/s}$. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση, την ταχύτητα και τη θέση του σώματος συναρτήσει του χρόνου.

Απ. $x(t) = (t+1)^3$, $v(t) = 3(t+1)^2$, $a(t) = 6(t+1)$

6. Η ταχύτητα ενός σωματιδίου που κινείται κατά μήκος της θετικής κατεύθυνσης του άξονα x δίνεται από τη σχέση $v = k(x_0 + x)$, $k, x_0 > 0$. Αν για $t = 0$ είναι $x = 0$ να βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σωματιδίου συναρτήσει του χρόνου.

Απ. $v(t) = k x_0 e^{kt}$, $a(t) = k^2 x_0 e^{kt}$

7. Σώμα κινείται σε ευθύγραμμη τροχιά με επιτάχυνση $a = 2\sqrt{\upsilon}$ (SI). Για t = 2 s είναι x = 64/3 m και υ = 16 m/s. Να βρείτε τη θέση, την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σώματος συναρτήσει του χρόνου.

Απ. $x(t) = \dfrac{1}{3}(t+2)^2$, $\upsilon(t) = (t+2)^2$, $a(t) = 2(t+2)$

8. Το διάνυσμα θέσης ενός σωματιδίου που κινείται στο επίπεδο x-y είναι $\vec{r}(t) = 3\cos(\omega t)\hat{x} + 3\sin(\omega t)\hat{y}$. Να βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σώματος και να δείξετε ότι $\vec{r} \perp \vec{\upsilon}, \vec{r} \parallel \vec{a}$. Ποια είναι η εξίσωση της τροχιάς του σώματος;

Απ. $\vec{\upsilon}(t) = -3\omega\sin(\omega t)\hat{x} + 3\omega\cos(\omega t)\hat{y}$, $\vec{a}(t) = -3\omega^2\cos(\omega t)\hat{x} - 3\omega^2\sin(\omega t)\hat{y}$, $x^2(t) + y^2(t) = 9$

9. Ένα σωματίδιο βρίσκεται στην αρχή των αξόνων κινείται στον χώρο με αρχική ταχύτητα $\vec{\upsilon}(0)=\upsilon_0(\hat{x}+\hat{y}+\hat{z})$ και επιτάχυνση $\vec{a}=k\hat{x}$. Να βρείτε το διάνυσμα θέσης του σωματιδίου και την ταχύτητά του συναρτήσει του χρόνου.

Απ. $\vec{\upsilon}(t)=(\upsilon_0+kt)\hat{x}+\upsilon_0\hat{y}+\upsilon_0\hat{z}$, $\vec{r}(t)=\left(\upsilon_0 t+\frac{1}{2}kt^2\right)\hat{x}+\upsilon_0 t\,\hat{y}+\upsilon_0 t\,\hat{z}$

10. Η επιτάχυνση ενός σωματιδίου που κινείται σε οριζόντιο επίπεδο είναι $\vec{a}(t)=-4\sin t\,\hat{x}+3\cos t\,\hat{y}$ (SI). Αν το σωματίδιο ήταν ακίνητο για t = 0, να βρείτε την ταχύτητά του τη χρονική στιγμή t = π/3s.

Απ. $\vec{\upsilon}\left(\frac{\pi}{3}\right)=-2\hat{x}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\hat{y}$

11. Το διάνυσμα θέσης ενός σωματιδίου που κινείται στο επίπεδο x-y είναι $\vec{r}(t)=kt\hat{x}-\lambda t^3\hat{y}$, k, λ >0 . Να βρείτε: α) την εξίσωση της τροχιάς, β) την ταχύτητα και την επιτάχυνση (διανυσματικά και τα μέτρα τους), γ) τη γωνία μεταξύ ταχύτητας και επιτάχυνσης.

Απ. $\vec{\upsilon}(t)=k\hat{x}-3\lambda t^2\hat{y}$, $|\upsilon(t)|=\sqrt{k^2+9\lambda^2 t}$, $\hat{a}(t)=-6\lambda t\,\hat{y}$, $|a(t)|=6\lambda t$, $\cos\theta=\frac{3\lambda t^2}{\sqrt{k^2+9\lambda^2 t^4}}$

12. Ένα σώμα κινείται στο επίπεδο x-y με τις συνιστώσες της ταχύτητάς του να είναι $\upsilon_x=4t^3+4t$, $\upsilon_y=4t$ (SI). Αν για t = 0 το σώμα βρίσκεται στο σημείο (1, 2) m, να βρείτε την εξίσωση της τροχιάς του.

Απ. $x=\frac{y^2}{4}$

13. Σώμα κινείται σε οριζόντιο επίπεδο x-y κατά μήκος της τροχιάς $y=4x^2$ (SI) ενώ η προβολή της ταχύτητας κατά μήκος τους άξονα x είναι σταθερή και ίση με 2 m/s. Επίσης, για t = 0 είναι y = 0. Να βρείτε τα διανύσματα θέσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης συναρτήσει του χρόνου.

Απ. $\vec{r}=2t\hat{x}+16t^2\hat{y}$, $\vec{\upsilon}(t)=2\hat{x}+32t\,\hat{y}$, $\vec{a}(t)=32\hat{y}$

14. Ένα σωματίδιο ξεκινά από την αρχή των αξόνων και κινείται σε ένα επίπεδο με σταθερή ακτινική ταχύτητα $\dot{r}=4$ m/s. Η γωνιακή του ταχύτητα είναι σταθερή και ίση με $\dot{\theta}=2$ rad/s. Όταν το σωματίδιο φτάσει σε απόσταση 3 m από την αρχή των αξόνων να βρείτε τα διανύσματα της ταχύτητας και της επιτάχυνσής του. Ποια είναι η εξίσωση της τροχιάς;

Απ. $\vec{\upsilon}(r=3m)=4\hat{r}+6\hat{\theta}$, $\vec{a}(r=3m)=-12\hat{r}+16\hat{\theta}$, $r(\theta)=2\theta$

15. Ένα σωματίδιο κινείται διαγράφοντας σπειροειδή τροχιά με κατεύθυνση προς τα έξω. Η εξίσωση της τροχιάς δίνεται από τη σχέση $r(\theta)=\frac{\theta}{\pi}$ m. Η γωνία αυξάνεται με την πάροδο του χρόνου σύμφωνα με την εξίσωση $\theta(t)=\frac{1}{2}kt^2$, όπου k είναι μια θετική σταθερά. α) Να αποτυπώσετε την κίνηση του σωματιδίου σε σχήμα και να δείξετε προσεγγιστικά την ταχύτητα και την επιτάχυνση σε μερικά σημεία της τροχιάς. β) Να δείξετε ότι η ακτινική επιτάχυνση είναι μηδενική όταν $\theta=1/\sqrt{2}$ rad. γ) Σε ποιες γωνίες είναι ίσα μεταξύ τους τα μέτρα της ακτινικής και της γωνιακής επιτάχυνσης;

Απ. $\vec{a}(\theta)=\frac{k}{\pi}\left(1-2\theta^2\right)\hat{r}+\frac{5k\theta}{\pi}\hat{\theta}$