ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 0
Μαθηματική Εισαγωγή

1. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{A}=2\hat{x}-3\hat{y}+7\hat{z}$ και $\vec{B}=5\hat{x}+\hat{y}+2\hat{z}$. Να βρείτε τις ποσότητες $\vec{A}\pm\vec{B}$, $\vec{A}\cdot\vec{B}$, $\vec{A}\times\vec{B}$.

   Απ. $(7,-2,9)$, $(-3,-4,5)$, 21, $(-13,31,17)$

2. Να βρείτε το ημίτονο και το συνημίτονο της γωνίας που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{A}=3\hat{x}+\hat{y}+\hat{z}$ και $\vec{B}=-2\hat{x}+\hat{y}+\hat{z}$.

   Απ. -0.492

3. Να δείξετε ότι $\left|\vec{A}-\vec{B}\right|=\left|\vec{A}+\vec{B}\right|\Leftrightarrow\vec{A}\perp\vec{B},\vec{A},\vec{B}\neq\vec{0}$

4. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{A}=3\hat{x}+\hat{y}+2\hat{z}$. Να βρείτε: α) το μέτρο του διανύσματος, β) την προβολή του στο επίπεδο (x, y), γ) ένα διάνυσμα $\vec{B}$ στο επίπεδο (x, y) κάθετο στο $\vec{A}$.

   Απ. α) $\sqrt{14}$, β) $(3,\ 1,\ 0)$, γ) $(1,\ -3,\ 0)$

5. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{A}=2\hat{x}-\hat{y}+4\hat{z}$ και $\vec{B}=5\hat{x}+2\hat{y}-2\hat{z}$. α) Να δείξετε ότι τα διανύσματα είναι κάθετα μεταξύ τους, β) να βρείτε ένα τρίτο διάνυσμα που να είναι ταυτόχρονα κάθετο και στα δύο.

   Απ. α) $\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}=0$, β) $(-6,\ 24,\ 9)$

6. Αν $\vec{A}\times\vec{B}=8\hat{x}-14\hat{y}+\hat{z}$ και $\vec{A}+\vec{B}=5\hat{x}+3\hat{y}+2\hat{z}$ να βρείτε τα διανύσματα $\vec{A},\vec{B}$.

   Απ. $\overrightarrow{A}=(7+5k,\ 4+3k,\ 2k)$, $\overrightarrow{B}=(-2-5k,\ -1-3k,\ 2-2k)$, $k\in\mathcal{R}$

7. Να βρεθούν οι πρώτοι παράγωγοι των συναρτήσεων: α) $f\left(x\right)=x^2+\sin x$, β) $f\left(x\right)=e^x\cos x$, γ) $f\left(x\right)=\sin\left(x^2\right)$.

   Απ. α) $2x+\cos x$, β) $e^x(\cos x-\sin x)$, γ) $2x\sin(x^2)$

8. Να υπολογίσετε τα παρακάτω αόριστα ολοκληρώματα: α) $\int\ln x\,dx$, β) $\int a^x\,dx$, γ) $\int\sin^3 x\cos x dx$, δ) $\int\left(ax+b\right)^n dx$.

   Απ. α) $x\ln x-x+C$, β) $\dfrac{a^x}{\ln a}+C$, γ) $\dfrac{1}{4}\sin^4 x+C$,
   δ) $\dfrac{(a\,x+b)^{n+1}}{a(n+1)}+C,\ n\neq-1$, $\dfrac{1}{a}\ln|a\,x+b|+C,\ n=-1$

9. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ορισμένα ολοκληρώματα: α) $\int_0^1 x\,dx$, β) $\int_0^\pi\sin x\,dx$, γ) $\int_0^{+\infty}e^{-x}\,dx$.

   Απ. α) 0.5, β) 2, γ) 1

10. Υπολογίστε τις παρακάτω ποσότητες προσεγγιστικά με πολυωνυμικό ανάπτυγμα Taylor πρώτου βαθμού γύρω από κατάλληλο σημείο x_0: α) $\sqrt{1.1}$, β) $\cos\left(30.5^o\right)$, γ) $e^{0.12}$, δ) $\ln\left(1.05\right)$.

    Απ. α) $x_0=1$, $\sqrt{1.1}\approx1.05$, β) $x_0=\dfrac{\pi}{6}$, $\cos(30.5^0)=\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{360}\right)\approx0.862$,
    γ) $x_0=0$, $e^{0.12}\approx1.12$, δ) $x_0=1$, $\ln(1.05)\approx0.05$

11. Να γράψετε τους τρεις πρώτους, μη μηδενικούς, όρους των σειρών Taylor για τις παρακάτω συναρτήσεις, με κέντρο το σημείο x_0: α) $f(x)=\frac{1}{x}, x_0=1$, β) $f(x)=\sin(2x), x_0=-\pi/2$.

Απ. α) $f(x)\approx 1-(x-1)+(x-1)^2$, β) $f(x)\approx -2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{4}{3}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)^3-\frac{4}{15}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)^5$

12. Αν $\vec{r}=\left(t^3+2t\right)\hat{x}-3e^{-2t}\hat{y}+2\sin(5t)\hat{z}$ να βρείτε τα: α) $\frac{d\vec{r}}{dt}$, β) $\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|$, γ) $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$, δ) $\left|\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|$ για t=0.

Απ. α) (2, 6, 10), β) $\sqrt{140}$, γ) (0, − 12, 0), δ) 12

13. Αν $\vec{F}(t)=\left(3t^2-1\right)\hat{x}+(2t-3)\hat{y}+\left(6t^2-4t\right)\hat{z}$ να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^2 \vec{F}(t)\,dt$.

Απ. $6\hat{x}+8\hat{z}=(6, 0, 8)$

14. Ένας κύλινδρος έχει ύψος h =2m και ακτίνα βάσης r = 1m. Να βρείτε την ποσοστιαία μεταβολή του όγκου του αν η ακτίνα αυξηθεί κατά 1% και το ύψος μειωθεί ταυτόχρονα κατά 0.5%.

Απ. +1.5 %

15. Έστω μία χρονικά μεταβαλλόμενη κυλινδρική επιφάνεια, ακτίνας $r(t)=r_0e^{at}$ και ύψους $h(t)=h_0-\beta t$. Να βρείτε πως μεταβάλλεται με το χρόνο το εμβαδόν της επιφάνειας.

Απ. $S(t)=2\pi r_0e^{at}(h_0-\beta t)$

16. Αν $\vec{A}(x,y,z)=xz\hat{x}+\left(2x^2-y\right)\hat{y}-yz^2\hat{z}$ και $\varphi(x,y,z)=3x^2y+y^2z^3$ να βρείτε τα: α) $\vec{\nabla}\varphi$, β) $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$, γ) $\vec{\nabla}\times\vec{A}$ στο σημείο $(3,-1,2)$.

Απ. α) (−18, 11, 12), β) 5, γ) (−4, 3, 12)

17. Αν $\vec{A}(x,y,z)=\left(2xy+z^3\right)\hat{x}+\left(x^2+2y\right)\hat{y}+\left(3xz^2-2\right)\hat{z}$ να δείξετε ότι $\vec{\nabla}\times\vec{A}=\vec{0}$. Στη συνέχεια να βρείτε μία βαθμωτή συνάρτηση $\varphi(x,y,z)$ ώστε $\vec{A}=\vec{\nabla}\varphi$.

Απ. $\phi(x,y,z)=x^2y+z^3x+y^2-2z+C$

18. Να βρείτε τη γενική λύση των παρακάτω διαφορικών εξισώσεων: α) $x'(t)=4t\sqrt{x}$, β) $\frac{dy}{dx}=2x+y$, γ) $xy'+y^2=0$, δ) $y'+y^2e^x=0, y(0)=1$, ε) $xy'=1-y^2, y(1)=0$

Απ. α) $x(t)=\left(t^2+c\right)^2$, β) $y(x)=ce^x-2x-2$, γ) $y(x)=\frac{1}{\ln x+c}$, δ) $y(x)=e^{-x}$, ε) $y(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$