ΣΕΜΦΕ
Ασκήσεις στη Συναρτησιακή Ανάλυση Ι
(2ο φυλλάδιο ασκήσεων)

Άσκηση 1 (ανισότητα Young)**.** *Έστω* $a, b \geq 0$ *και* $p, q > 1$*, τέτοια ώστε* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Να δείξετε ότι*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\,.$$

Άσκηση 2 (ανισότητα Hölder)**.** *Έστω* $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n \geq 0$ *και* $p, q > 1$*, τέτοια ώστε* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Να δείξετε ότι*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq (\sum_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^{n} b_i^q)^{\frac{1}{q}}\,.$$

Άσκηση 3 (ανισότητα Minkowski)**.** *Έστω* $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}$ *και* $p \geq 1$*. Να δείξετε ότι*

$$(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p)^{\frac{1}{p}}\,.$$

Άσκηση 4. *Έστω* X *χώρος με νόρμα και* Y *υπόχωρος του* X*. Να δείξετε ότι η κλειστότητα* $\overline{Y}$ *του* Y *είναι επίσης υπόχωρος του* X

Άσκηση 5. *Έστω* Y *υπόχωρος του χώρου Banach* $(X, \|\cdot\|)$*. Να δείξετε ότι ο* $(Y, \|\cdot\|)$ *είναι χώρος Banach αν και μόνο αν ο* Y *είναι κλειστός.*

Άσκηση 6. *Να δείξετε ότι αν η ακολουθία* (f_n) *του* $C([a, b])$ *συγκλίνει στην* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *ομοιόμορφα, τότε* $f \in C([a, b])$*.*