ΣΕΜΦΕ
Ασκήσεις στη Συναρτησιακή Ανάλυση Ι
(1ο φυλλάδιο ασκήσεων)

Ασκηση 1. *Έστω (X, d) μετρικός χώρος.*

(ι) Να δείξετε ότι η ανοικτή μπάλλα κέντρου x και ακτίνας $\varepsilon > 0$ είναι ανοικτό σύνολο.

(ιι) Να δείξετε ότι η κλειστή μπάλλα κέντρου x και ακτίνας $\varepsilon > 0$ είναι κλειστό σύνολο.

Ασκηση 2. *Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Να δείξετε ότι*

(ι) η ένωση ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο.

(ιι) η τομή κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο.

Ασκηση 3. *Έστω $(X, d_X), (Y, d_Y)$ μετρικοί χώροι και $f : X \to Y$.*

(ι) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία (x_n) με $x_n \to x_0$, έχουμε ότι $f(x_n) \to f(x)$.

(ιι) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής αν και μόνο αν για κάθε $G \subseteq Y$ ανοικτό, το σύνολο

$$f^{-1}(G) = \{x \in X : f(x) \in G\}$$

είναι ανοικτό υποσύνολο του X.

Ασκηση 4. *Έστω X, Y σύνολα και συνάρτηση $f : X \to Y$. Να δείξετε ότι για κάθε $G \subseteq Y$ ισχύει ότι*

$$f^{-1}(Y \setminus G) = X \setminus f^{-1}(G)\,.$$

Ισχύει ότι για κάθε $G \subseteq X$

$$f(X \setminus G) = Y \setminus f(G)\,;$$

Ασκηση 5. *Έστω $(X, d_X), (Y, d_Y)$ μετρικοί χώροι και $f : X \to Y$. Να δείξετε ότι αν η f είναι συνεχής, τότε το σύνολο $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό για κάθε $F \subseteq Y$ κλειστό.*