

Αρμονική Ανάλυση (2023–24)

Υποδείξεις για τις Ασκήσεις του Φυλλαδίου 3

1. Έστω $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Για κάθε $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ ισχύει $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) \longrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$.

(ii) Για κάθε $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ισχύει $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{imx_k} \longrightarrow 0$.

Υπόδειξη: (i) $\implies$ (ii) Εφαρμόζοντας το (i) για τη συνεχή συνάρτηση $f_m(x) = e^{imx}$ παίρνουμε

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{imx_k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f_m(x_k) \longrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_m(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} dx = 0,$$

όπου η τελευταία ισότητα ισχύει διότι $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

(ii) $\implies$ (i) Θεωρούμε αρχικά ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο $p(x) = \sum_{m=-N}^N c_m e^{imx}$. Παρατηρούμε ότι

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p(x_k) = \sum_{m=-N}^N c_m \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{imx_k} = c_0 + \sum_{|m| \leq N, m \neq 0} c_m \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{imx_k} \longrightarrow c_0$$

και

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(x) dx = \sum_{m=-N}^N c_m \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} dx = c_0,$$

δηλαδή

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p(x_k) \longrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(x) dx. \quad (1)$$

Έστω τώρα τυχούσα $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. Για τυχόν $\epsilon > 0$ βρίσκουμε τριγωνομετρικό πολυώνυμο p ώστε $\|f - p\|_{\infty} \leq \epsilon$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ γράφουμε

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \right| &\leq \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p(x_k) \right| + \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p(x_k) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(x) dx \right| \\ &\quad + \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(x) dx - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |f(x_k) - p(x_k)| + \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p(x_k) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(x) dx \right| \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |p(x) - f(x)| dx \\ &\leq \epsilon + \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p(x_k) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(x) dx \right| + \epsilon, \end{aligned}$$

διότι $|f(x_k) - p(x_k)| \leq \|f - p\|_{\infty} \leq \epsilon$ για κάθε k και, ομοίως, $|p(x) - f(x)| \leq \|f - p\|_{\infty} \leq \epsilon$ για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$. Αφήνοντας το $n \rightarrow \infty$, από την (1) παίρνουμε

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \right| \leq 2\epsilon,$$

και αφού το $\epsilon > 0$ ήταν τυχόν έπεται ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \right| = 0.$$

2. Έστω $f, g \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)(f(x) - s_n(f, x)) dx = 0.$$

Υπόδειξη: Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)(f(x) - s_n(f, x)) dx \right| \leq \|g\|_2 \|f - s_n(f)\|_2 \rightarrow 0,$$

διότι $\|f - s_n(f)\|_2 \rightarrow 0$ (γνωστό από τη θεωρία).

3. Έστω $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. Εξηγήστε γιατί $\|f - s_n(f)\|_2 \leq \|f - \sigma_n(f)\|_2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και με βάση αυτήν την παρατήρηση αποδείξτε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - s_n(f)\|_2 = 0$.

(β) Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$, η οποία είναι συνεχής στο x_0 . Αποδείξτε ότι αν υπάρχει το $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(f, x_0)$ τότε είναι ίσο με $f(x_0)$.

Υπόδειξη: (α) Γνωρίζουμε ότι $\|f - s_n(f)\|_2 \leq \|f - p\|_2$ για κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο p βαθμού το πολύ n . Το $\sigma_n(f)$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού το πολύ n , άρα

$$\|f - s_n(f)\|_2 \leq \|f - \sigma_n(f)\|_2.$$

Αφού $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, γνωρίζουμε ότι $\sigma_n(f) \rightarrow f$ ομοιόμορφα, δηλαδή $\|f - \sigma_n(f)\|_{\infty} \rightarrow 0$. Όμως, $\|f - \sigma_n(f)\|_2 \leq \|f - \sigma_n(f)\|_{\infty}$, άρα $\|f - \sigma_n(f)\|_2 \rightarrow 0$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι $\|f - s_n(f)\|_2 \rightarrow 0$.

(β) Έστω ότι $s_n(f, x_0) \rightarrow \ell$. Τότε,

$$\sigma_n(f, x_0) = \frac{s_0(f, x_0) + s_1(f, x_0) + \cdots + s_{n-1}(f, x_0)}{n} \rightarrow \ell$$

(η ακολουθία των μέσων όρων μιας συγκλίνουσας ακολουθίας έχει το ίδιο όριο με αυτήν). Όμως, η f είναι συνεχής στο x_0 , άρα $\sigma_n(f, x_0) \rightarrow f(x_0)$ από το θεώρημα Féjer. Συνεπώς, $\ell = f(x_0)$.

4. (α) Έστω $g, f, f_n \in \mathcal{R}([a, b])$ με $\|f_n - f\|_2 \rightarrow 0$. Ορίζουμε

$$h(x) = \int_a^x f(t)g(t) dt \quad \text{και} \quad h_n(x) = \int_a^x f_n(t)g(t) dt, \quad x \in [a, b].$$

Αποδείξτε ότι $h_n \rightarrow h$ ομοιόμορφα.

(β) Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι, για κάθε $x \in [0, 2\pi]$,

$$\int_0^x f(t) dt = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x (a_k \cos kt + b_k \sin kt) dt,$$

δηλαδή μπορούμε να ολοκληρώσουμε τη σειρά Fourier της f όρο προς όρο, ακόμα κι αν αυτή αποκλίνει.

Υπόδειξη: (α) Έστω $\epsilon > 0$. Αφού $\|f_n - f\|_2 \rightarrow 0$, υπάρχει n_0 τέτοιος ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να έχουμε $\|g\|_2 \|f_n - f\|_2 \leq \epsilon$. Τότε, για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $x \in [a, b]$, από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε ότι

$$\begin{aligned} |h_n(x) - h(x)| &= \left| \int_a^x (f_n(t) - f(t))g(t) dt \right| \leq \left(\int_a^x |f_n(t) - f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_a^x |g(t)|^2 dt \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_a^b |f_n(t) - f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_a^b |g(t)|^2 dt \right)^{1/2} = \|f_n - f\|_2 \|g\|_2 \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Άρα, $h_n \rightarrow h$ ομοιόμορφα.

(β) Αν θεωρήσουμε τις f και $f_n = s_n(f)$ στο $[0, 2\pi]$, έχουμε $\|f_n - f\|_2 = \|s_n(f) - f\|_2 \rightarrow 0$. Από το (α) με $g \equiv 1$ συμπεραίνουμε ότι

$$h_n(x) := \int_0^x s_n(f, t) dt \rightarrow \int_0^{2\pi} f(t) dt =: h(x)$$

και μάλιστα ομοιόμορφα. Όμως,

$$h_n(x) = \int_0^x s_n(f, t) dt = \int_0^x \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \right) dt = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{k=1}^n \int_0^x (a_k \cos kt + b_k \sin kt) dt.$$

Αυτό δείχνει ότι η σειρά $\frac{a_0 x}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x (a_k \cos kt + b_k \sin kt) dt$ συγκλίνει στο $h(x)$, δηλαδή

$$\int_0^x f(t) dt = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x (a_k \cos kt + b_k \sin kt) dt.$$

5. Χρησιμοποιώντας την $f(x) = x^2$, $x \in [-\pi, \pi]$ υπολογίστε το $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$.

Υπόδειξη: Υπολογίζουμε τους συντελεστές Fourier της f . Έχουμε

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{3},$$

ενώ για $k \neq 0$ βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \hat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 e^{-ikx} dx = -x^2 \frac{e^{-ikx}}{ik} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2x \frac{e^{-ikx}}{ik} dx \\ &= \frac{1}{\pi ik} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-ikx} dx = -\frac{1}{\pi ik} \frac{x e^{-ikx}}{ik} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi ik} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-ikx}}{-ik} dx \\ &= -\frac{1}{\pi ik} \frac{x e^{-ikx}}{ik} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi k^2} (\pi e^{-ik\pi} + \pi e^{ik\pi}) = \frac{2\pi \cos k\pi}{\pi k^2} = \frac{2(-1)^k}{k^2}. \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε επίσης την

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^4 dx = \frac{1}{\pi} \frac{\pi^5}{5} = \frac{\pi^4}{5}.$$

Από την ταυτότητα Parseval

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2$$

έπεται ότι

$$\frac{\pi^4}{5} = \frac{\pi^4}{9} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^4},$$

άρα

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{1}{8} \left(\frac{\pi^4}{5} - \frac{\pi^4}{9} \right) = \frac{4\pi^4}{8 \cdot 45} = \frac{\pi^4}{90}.$$

6. (α) Αποδείξτε ότι αν $a \neq 0$ τότε

$$e^{ax} = \frac{e^{2\pi a} - 1}{\pi} \left(\frac{1}{2a} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a \cos kx - k \sin kx}{a^2 + k^2} \right), \quad 0 < x < 2\pi.$$

(β) Για $0 < x < 2\pi$ και $a \neq 0$ υπολογίστε τα αθροίσματα των σειρών

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a \cos kx}{a^2 + k^2} \quad \text{και} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \sin kx}{a^2 + k^2}.$$

(γ) Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα Parseval υπολογίστε τα

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(a^2 + k^2)^2} \quad \text{και} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(a^2 + k^2)^2}.$$

Υπόδειξη: (α) Θεωρούμε την $f(x) = e^{ax}$ στο $(0, 2\pi)$, έτουμε $f(0) = f(2\pi) = 1$ και επεκτείνουμε την f σε 2π -περιοδική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Για $k \geq 1$, με ολοκλήρωση κατά παράγοντες υπολογίζουμε τους

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{ax} \cos kx \, dx = \frac{e^{2a\pi} - 1}{\pi} \cdot \frac{a}{a^2 + k^2}$$

και

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{ax} \sin kx \, dx = \frac{e^{2a\pi} - 1}{\pi} \cdot \frac{-k}{a^2 + k^2}.$$

Επίσης,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{ax} \, dx = \frac{e^{2a\pi} - 1}{\pi a}.$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 2\pi)$, άρα το θεώρημα Dini μας δίνει ότι, για κάθε $0 < x < 2\pi$,

$$e^{ax} = f(x) = S(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \frac{e^{2a\pi} - 1}{\pi} \left(\frac{1}{2a} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a \cos kx - k \sin kx}{a^2 + k^2} \right). \quad (2)$$

(β) Έστω $x \in (0, 2\pi)$. Τότε, $2\pi - x \in (0, 2\pi)$, άρα το (α) μας δίνει

$$\begin{aligned} e^{a(2\pi-x)} &= \frac{e^{2\pi a} - 1}{\pi} \left(\frac{1}{2a} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a \cos k(2\pi - x) - k \sin k(2\pi - x)}{a^2 + k^2} \right) \\ &= \frac{e^{2\pi a} - 1}{\pi} \left(\frac{1}{2a} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a \cos kx + k \sin kx}{a^2 + k^2} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Προσθέτοντας τις (2) και (3), παίρνουμε

$$e^x + e^{2\pi a - x} = \frac{e^{2\pi a} - 1}{\pi} \left(\frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2a \cos kx}{a^2 + k^2} \right),$$

απ' όπου υπολογίζουμε το $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a \cos kx}{a^2+k^2}$. Αφαιρώντας την (2) από την (3), υπολογίζουμε το $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \sin kx}{a^2+k^2}$. Ελέγξτε ότι

$$\frac{\pi}{2} \frac{\cosh(\pi - x)}{\sinh \pi a} = \frac{1}{2a} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a \cos kx}{a^2 + k^2} \quad (4)$$

και

$$\frac{\pi}{2} \frac{\sinh(\pi - x)}{\sinh \pi a} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \sin kx}{a^2 + k^2} \quad (5)$$

για κάθε $0 < x < 2\pi$.

(γ) Εφαρμόζουμε την ταυτότητα του Parseval για τις συναρτήσεις στις (4) και (5).

7. (α) Έστω $f, g \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|fg - s_n(f)s_n(g)\|_1 = 0.$$

(β) Αποδείξτε ότι $\widehat{fg}(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_n(f, x) s_n(g, x) e^{-ikx} dx$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

(γ) Αποδείξτε ότι αν $\widehat{f}(k) = \widehat{g}(k) = 0$ για κάθε $k < 0$ τότε $\widehat{fg}(k) = 0$ για κάθε $k < 0$.

Υπόδειξη: (α) Έχουμε

$$\begin{aligned} \|fg - s_n(f)s_n(g)\|_1 &= \|f(g - s_n(g)) + (f - s_n(f))s_n(g)\|_1 \leq \|f(g - s_n(g))\|_1 + \|(f - s_n(f))s_n(g)\|_1 \\ &\leq \|f\|_2 \|g - s_n(g)\|_2 + \|f - s_n(f)\|_2 \|s_n(g)\|_2 \end{aligned}$$

από την ανισότητα Cauchy-Schwarz. Αφού $f, g \in L^2(\mathbb{T})$ έχουμε $\|f - s_n(f)\|_2 \rightarrow 0$ και $\|g - s_n(g)\|_2 \rightarrow 0$. Επίσης, $\|s_n(g)\|_2 \leq \|g\|_2$ από την ανισότητα Bessel. Έπεται ότι

$$\|f\|_2 \|g - s_n(g)\|_2 + \|f - s_n(f)\|_2 \|s_n(g)\|_2 \leq \|f\|_2 \|g - s_n(g)\|_2 + \|f - s_n(f)\|_2 \|g\|_2 \rightarrow 0$$

και έχουμε το ζητούμενο.

(β) Έστω $k \in \mathbb{Z}$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \left| \widehat{fg}(k) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_n(f, x) s_n(g, x) e^{-ikx} dx \right| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) e^{-ikx} dx - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_n(f, x) s_n(g, x) e^{-ikx} dx \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) g(x) - s_n(f, x) s_n(g, x)| dx \\ &= \|fg - s_n(f)s_n(g)\|_1 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

όταν $n \rightarrow \infty$, άρα

$$\widehat{fg}(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_n(f, x) s_n(g, x) e^{-ikx} dx.$$

(γ) Έστω $k < 0$. Χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι $\widehat{f}(m) = 0$ αν $m < 0$ και $\widehat{g}(\ell) = 0$ αν $\ell < 0$, για $n > |k|$ έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_n(f, x) s_n(g, x) e^{-ikx} dx &= \sum_{m=-n}^n \sum_{\ell=-n}^n \widehat{f}(m) \widehat{g}(\ell) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m+\ell-k)x} dx \\ &= \sum_{m=0}^n \sum_{\ell=0}^n \widehat{f}(m) \widehat{g}(\ell) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m+\ell-k)x} dx = 0, \end{aligned}$$

διότι αν $m, \ell \geq 0$ τότε $m + \ell - k > 0$ και συνεπώς

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m+\ell-k)x} dx = 0.$$

Από το (β) έπεται ότι

$$\widehat{fg}(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_n(f, x) s_n(g, x) e^{-ikx} dx = 0.$$

8. Θεωρούμε την ακολουθία $\{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ με

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{αν } k \geq 1 \\ 0 & \text{αν } k \leq 0 \end{cases}$$

Δείξτε ότι $\{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ αλλά δεν υπάρχει $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ με την ιδιότητα $\widehat{f}(k) = a_k$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Υπόδειξη: Η ακολουθία $\{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ ανήκει στον $\ell^2(\mathbb{Z})$ διότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} < +\infty.$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ με την ιδιότητα $\widehat{f}(k) = a_k$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Τότε, $|k\widehat{f}(k)| = 0$ αν $k \leq 0$ και $|k\widehat{f}(k)| = 1$ αν $k \geq 1$. Δηλαδή, η ακολουθία $\{k\widehat{f}(k)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ είναι φραγμένη. Από γνωστή πρόταση, τα μερικά αθροίσματα $s_n(f)$ της f είναι ομοιόμορφα φραγμένα. Δηλαδή, υπάρχει $M > 0$ ώστε $|s_n(f)(x)| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in \mathbb{T}$. Όμως,

$$s_n(f)(0) = \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \rightarrow +\infty$$

όταν $n \rightarrow \infty$. Έτσι, καταλήγουμε σε άτοπο.

9. (α) Έστω $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ ακολουθία μιγαδικών αριθμών τέτοια ώστε $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$

τέτοια ώστε $\widehat{f}(k) = a_k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

(β) Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{k}}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

(γ) Χρησιμοποιώντας το (α) αποδείξτε ότι υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{k}}$ για άπειρους το πλήθος $k \in \mathbb{N}$.

Υπόδειξη: (α) Γνωστό από τη θεωρία. Αφού $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$, η ακολουθία συναρτήσεων $s_N(x) = \sum_{k=1}^N a_k e^{ikx}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση $f \in C(\mathbb{T})$ για την οποία έχουμε $\widehat{f}(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \widehat{s_N}(k) = a_k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

(β) Αν υπήρχε τέτοια $f \in C(\mathbb{T})$ τότε θα είχαμε $f \in L^2(\mathbb{T})$ και από την ταυτότητα Parseval θα παίρναμε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 \leq \|f\|_2^2 < \infty,$$

το οποίο είναι άτοπο.

(γ) Θεωρούμε την ακολουθία $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ με $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ αν $n = k^4$ για κάποιον $k \in \mathbb{N}$ και $a_n = 0$ αλλιώς. Τότε,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty.$$

Από το (α) υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\widehat{f}(n) = a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ειδικότερα, για κάθε n της μορφής $n = k^4$ (δηλαδή για άπειρους $n \in \mathbb{N}$) έχουμε $\widehat{f}(n) = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

10. (α) Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι

$$s_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x+t) + f(x-t)] \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt.$$

(β) Έστω $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι $\|s_n(f)\|_\infty = o(\ln n)$.

Υπόδειξη: (α) Εκφράζουμε το $s_n(f, x)$ μέσω του πυρήνα Dirichlet και κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $u = -t$:

$$\begin{aligned} s_n(f, x) &= (f * D_n)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x-t) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x+u) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})(-u)}{\sin \frac{(-u)}{2}} du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x-t) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}} dt. \end{aligned}$$

Θεωρώντας το ημίθροισμα της πρώτης και της τρίτης αναπαράστασης του $s_n(f, x)$ έχουμε ότι

$$s_n(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi [f(x+t) + f(x-t)] \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt$$

και το ζητούμενο έπεται αν παρατηρήσουμε ότι η

$$t \mapsto g(t) := [f(x+t) + f(x-t)] \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}}$$

είναι άρτια, επομένως

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi g(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi g(t) dt.$$

(β) Θεωρούμε τη διαφορά $s_n(f, x) - f(x)$. Χρησιμοποιώντας το (α) και το γεγονός ότι

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}} dt = 1,$$

μπορούμε να γράψουμε

$$s_n(f, x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)] \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt.$$

Ορίζουμε

$$I_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left| (f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} \right| dt.$$

Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, άρα για δοθέν $\epsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $\delta \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $|f(x+t) - f(x-t) - 2f(x)| \leq \epsilon$ για κάθε x και $|t| < \delta$. Θέτουμε

$$G(t) = \left| (f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} \right|.$$

Αν $n + \frac{1}{2} > \frac{1}{\delta}$ τότε

$$I_n = \int_0^{(n+\frac{1}{2})^{-1}} G(t) dt + \int_{(n+\frac{1}{2})^{-1}}^{\delta} G(t) dt + \int_{\delta}^{\pi} G(t) dt.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{(n+\frac{1}{2})^{-1}} G(t) dt \right| &\leq \int_0^{(n+\frac{1}{2})^{-1}} |f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)| \left| \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} \right| dt \\ &\leq \int_0^{(n+\frac{1}{2})^{-1}} \epsilon \frac{\pi}{2} (n+\frac{1}{2}) dt = \frac{\pi\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Επίσης,

$$\left| \int_{(n+\frac{1}{2})^{-1}}^{\delta} G(t) dt \right| \leq \frac{\pi\epsilon}{2} \int_{(n+\frac{1}{2})^{-1}}^{\delta} \frac{1}{t} dt \leq \frac{\pi\epsilon}{2} \log(n+\frac{1}{2}).$$

Τέλος,

$$\left| \int_{\delta}^{\pi} G(t) dt \right| \leq \frac{\pi}{2\delta} \int_{\delta}^{\pi} |f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)| dt \leq \frac{\pi}{2\delta} 2\pi \cdot 4\|f\|_{\infty}.$$

Τελικά,

$$\frac{I_n}{\log(n+1/2)} \leq \frac{\pi\epsilon}{2\log(n+1/2)} + \frac{\pi\epsilon}{2} + \frac{\pi}{2\delta} \frac{8\pi\|f\|_{\infty}}{\log(n+1/2)},$$

άρα

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n}{\log(n+1/2)} \leq \frac{\pi\epsilon}{2}.$$

Το $\epsilon > 0$ ήταν τυχόν, άρα έχουμε το ζητούμενο.