

Αρμονική Ανάλυση (2023–24)
Υποδείξεις για τις Ασκήσεις του Φυλλαδίου 2

1. Έστω $f \in C^1(\mathbb{T})$ με $|f'(x) - f'(y)| \leq M|x - y|^\alpha$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ (για κάποιο $M > 0$ και $0 < \alpha \leq 1$). Αποδείξτε ότι $s_n(f) \rightarrow f$ ομοιόμορφα.

Υπόδειξη: Θέτουμε $g = f'$. Για κάθε $k \neq 0$, κάνοντας την αντικατάσταση $y = x + \pi/k$, έχουμε

$$\begin{aligned}\widehat{g}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi+\pi/k}^{\pi+\pi/k} g(x - \pi/k) e^{-i(kx-\pi)} dx \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi+\pi/k}^{\pi+\pi/k} g(x - \pi/k) e^{-ikx} dx = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x - \pi/k) e^{-ikx} dx,\end{aligned}$$

λόγω της 2π -περιοδικότητας της g . Τότε, μπορούμε να γράψουμε

$$\widehat{g}(k) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [g(x) - g(x - \pi/k)] e^{-ikx} dx,$$

και χρησιμοποιώντας την υπόθεση παίρνουμε

$$|\widehat{g}(k)| \leq \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(x) - g(x - \pi/k)| dx \leq \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} M|\pi/k|^\alpha dx = \frac{C}{|k|^\alpha},$$

όπου $C = M\pi^\alpha/2$. Έπεται ότι

$$|\widehat{f}(k)| = \left| \frac{1}{ik} \widehat{f}'(k) \right| = \frac{1}{|k|} |\widehat{g}(k)| \leq \frac{C}{|k|^{1+\alpha}}.$$

Η σειρά $\sum_{k \neq 0} \frac{1}{|k|^{1+\alpha}}$ συγκλίνει διότι $1 + \alpha > 1$, άρα $\sum_{k=1}^{\infty} |\widehat{f}(k)| < +\infty$. Έπεται ότι $s_n(f) \rightarrow f$ ομοιόμορφα.

2. Έστω $f \in C(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = 0$ για κάθε $k \geq 0$. Αποδείξτε ότι η f είναι περιττή συνάρτηση.

Υπόδειξη: Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) + f(-x)$. Η g είναι άρτια, άρα $\int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin kx dx = 0$ για κάθε $k \geq 1$. Από την υπόθεση παίρνουμε επίσης ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(-x) \cos kx dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \cos(-ky) dy = \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \cos ky dy = 0,$$

άρα

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos kx dx = 0$$

για κάθε $k \geq 0$. Έπεται ότι $\widehat{g}(k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, και αφού η g είναι συνεχής συμπεραίνουμε ότι $g \equiv 0$. Αυτό δείχνει ότι $f(-x) = -f(x)$ για κάθε x , δηλαδή η f είναι περιττή.

3. Έστω $f \in C(\mathbb{T})$ και $g \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ ώστε $f * g = f$. Αποδείξτε ότι η f είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο.

Υπόδειξη: Από την $f * g = f$ έχουμε $\widehat{f}(k)\widehat{g}(k) = \widehat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Από το λήμμα Riemann-Lebesgue έχουμε $\widehat{g}(k) \rightarrow 0$ όταν $|k| \rightarrow \infty$, άρα υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|\widehat{g}(k)| < 1$ αν $|k| \geq k_0$. Έπεται ότι $\widehat{f}(k) = 0$ για $|k| \geq k_0$, συνεπώς η f είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού μικρότερου ή ίσου από k_0 .

4. Έστω (f_n) ακολουθία στον $\mathcal{R}(\mathbb{T})$ με την ιδιότητα: για κάθε $g \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|g - g * f_n\|_1 = 0.$$

Αποδείξτε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{f_n}(k) = 1$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Υπόδειξη: Έστω $k \in \mathbb{Z}$. Για κάθε $g \in L^1(\mathbb{T})$ έχουμε

$$(g - \widehat{g * f_n})(k) = \widehat{g}(k) - (\widehat{g * f_n})(k) = \widehat{g}(k) - \widehat{g}(k) \widehat{f_n}(k) = \widehat{g}(k)(1 - \widehat{f_n}(k)).$$

Άρα,

$$|\widehat{g}(k)| |1 - \widehat{f_n}(k)| = |(\widehat{g - g * f_n})(k)| \leq \|g - g * f_n\|_1 \rightarrow 0.$$

Θεωρώντας την $g(x) = e^{ikx}$ (για την οποία $\widehat{g}(k) = 1$) παίρνουμε $|1 - \widehat{f_n}(k)| \rightarrow 0$, δηλαδή $\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{f_n}(k) = 1$.

5. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η 2π -περιοδική συνάρτηση με

$$f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{για } |x| \leq \pi.$$

Υπολογίστε τη σειρά Fourier της f και χρησιμοποιώντας την υπολογίστε το

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 1}.$$

Υπόδειξη: Υπολογίζουμε τους συντελεστές Fourier της f . Με (απλές) πράξεις βλέπουμε ότι

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}(e^\pi - e^{-\pi}),$$

ενώ αν $k \neq 0$ έχουμε

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{k^2 + 1} \frac{(-1)^k (e^\pi - e^{-\pi})}{2\pi}.$$

Συνεπώς, η σειρά Fourier της f είναι η

$$S(f, x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 1} \frac{(-1)^k (e^\pi - e^{-\pi})}{2\pi} e^{ikx},$$

η οποία συγκλίνει απολύτως. Έπεται ότι $f(x) = S(f, x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και θέτοντας $x = \pi$ παίρνουμε

$$f(\pi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 1} \frac{(-1)^k (e^\pi - e^{-\pi})}{2\pi} (-1)^k = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 1},$$

απ' όπου υπολογίζουμε το

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 1} = 2\pi \frac{f(\pi)}{e^\pi - e^{-\pi}} = \pi \frac{e^\pi + e^{-\pi}}{e^\pi - e^{-\pi}}.$$

6. Θεωρούμε την 2π -περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x$ αν $-\pi \leq x < \pi$. Αποδείξτε ότι

$$f(x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\sin kx}{k}$$

για κάθε $x \in (-\pi, \pi)$.

Υπόδειξη: Η f είναι περιττή, άρα $a_k(f) = 0$ για κάθε $k \geq 0$. Για κάθε $k \geq 1$ έχουμε

$$b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx \, dx = -\frac{x \cos kx}{k\pi} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, dx = -\frac{2 \cos k\pi}{k} = 2(-1)^{k-1} \frac{1}{k}.$$

Άρα,

$$S(f, x) \sim 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\sin kx}{k}.$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\pi, \pi)$, άρα $f(x) = S(f, x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\sin kx}{k}$ για κάθε $x \in (-\pi, \pi)$, από το θεώρημα Dini.

7. Θεωρούμε την 2π -περιοδική συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = -1$ αν $-\pi < x < 0$, $f(x) = 1$ αν $0 < x < \pi$, και $f(-\pi) = f(0) = f(\pi) = 0$. Αποδείξτε ότι

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επιλέγοντας κατάλληλα το x αποδείξτε ότι

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k+1}.$$

Υπόδειξη: Η f είναι περιττή, άρα $a_k(f) = 0$ για κάθε $k \geq 0$. Για κάθε $k \geq 1$ έχουμε

$$b_k(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin kx \, dx = -\frac{2 \cos kx}{k\pi} \Big|_0^{\pi} = -2 \frac{\cos(k\pi) - 1}{k\pi}$$

Επομένως, έχουμε $b_k(f) = 0$ αν ο k είναι άρτιος και $b_k(f) = \frac{4}{k\pi}$ αν ο k είναι περιττός. Άρα,

$$S(f, x) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}.$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στα $(-\pi, 0)$ και $(0, \pi)$, άρα $f(x) = S(f, x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$ για κάθε $x \in [-\pi, \pi] \setminus \{-\pi, 0, \pi\}$, από το θεώρημα Dini. Στα σημεία $0, \pm\pi$, η ισότητα ισχύει και πάλι, διότι $f(0) = f(\pm\pi) = 0$ και η σειρά μηδενίζεται κι αυτή: αν $x = 0, \pm\pi$ τότε $\sin(2k+1)x = 0$ για κάθε $k \geq 0$. Επομένως, $f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για $x = \frac{\pi}{2}$ παίρνουμε

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(k\pi + \frac{\pi}{2})}{2k+1} = \frac{4}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \right),$$

άρα

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k+1}.$$

8. Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Αν (k_n) είναι μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών και (t_n) είναι τυχούσα ακολουθία πραγματικών αριθμών, υπολογίστε το

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos^2(k_n x + t_n) \, dx.$$

Υπόδειξη: Έχουμε

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}.$$

Συνεπώς,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos^2(k_n x + t_n) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos 2(k_n x + t_n) dx.$$

Αφού $k_n \rightarrow \infty$, από την $\cos 2(k_n x + t_n) = \cos(2k_n x) \cos(2t_n) - \sin(2k_n x) \sin(2t_n)$ και το λήμμα Riemann-Lebesgue παίρνουμε

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos 2(k_n x + t_n) dx = \cos(2t_n) \int_0^{2\pi} f(x) \cos(2k_n x) dx - \sin(2t_n) \int_0^{2\pi} f(x) \sin(2k_n x) dx \rightarrow 0.$$

Έπεται ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos^2(k_n x + t_n) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx.$$

9. Έστω $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ και έστω $\alpha \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $\alpha/\pi \notin \mathbb{Q}$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(x + k\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη: Θεωρούμε αρχικά τις $f_n(t) = e^{int}$, $n \in \mathbb{Z}$. Για $n = 0$ έχουμε $f_0 \equiv 1$ και η ζητούμενη ισότητα ισχύει (μάλιστα, για κάθε N). Έστω $x \in \mathbb{R}$. Αν $n \neq 0$, έχουμε

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f_n(x + k\alpha) = \frac{1}{N} e^{inx + ink\alpha} = e^{inx} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (e^{in\alpha})^k = e^{inx} \frac{1}{N} \frac{e^{in\alpha}(e^{iNn\alpha} - 1)}{e^{in\alpha} - 1},$$

συνεπώς

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f_n(x + k\alpha) \right| \leq \frac{|e^{iNn\alpha} - 1|}{N|e^{in\alpha} - 1|} \leq \frac{2}{N|e^{in\alpha} - 1|} \rightarrow 0$$

όταν $N \rightarrow \infty$, αφού $\alpha/\pi \notin \mathbb{Q}$ και συνεπώς $|e^{in\alpha} - 1| > 0$. Όμως,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_n(t) dt = 0,$$

άρα και πάλι ισχύει η ζητούμενη ισότητα. Επειδή τώρα η ισότητα είναι γραμμική ως προς f , συμπεραίνουμε άμεσα ότι

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N p(x + k\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(t) dt$$

για κάθε μιγαδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο p και κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχής 2π -περιοδική συνάρτηση. Για τυχόν $\epsilon > 0$ βρίσκουμε μιγαδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο p τέτοιο ώστε $\|f - p\|_{\infty} \leq \epsilon$ και γράφουμε

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(x + k\alpha) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \right| \\ & \leq \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |f(x + k\alpha) - p(x + k\alpha)| + \left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N p(x + k\alpha) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(t) dt \right| + \|f - p\|_1 \\ & \leq \|f - p\|_{\infty} + \left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N p(x + k\alpha) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(t) dt \right| + \|f - p\|_{\infty} \\ & \leq \left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N p(x + k\alpha) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(t) dt \right| + 2\epsilon. \end{aligned}$$

Αφήνοντας το $N \rightarrow \infty$ έχουμε

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(x + k\alpha) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \right| \leq 2\epsilon,$$

και αφού το $\epsilon > 0$ ήταν τυχόν παίρνουμε το ζητούμενο.

10. (α) Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ αύξουσα και παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε η f' να είναι ολοκληρώσιμη και $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ τέτοιο ώστε

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(a) \int_a^{\xi} g(x) dx + f(b) \int_{\xi}^b g(x) dx.$$

[Υπόδειξη: Θεωρήστε την $G(x) = \int_a^x g(t) dt$ και χρησιμοποιήστε ολοκλήρωση κατά παράγοντες.]

(β) Έστω $h \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Υποθέτουμε ότι $h = f_1 - f_2$ στο $[-\pi, \pi]$, όπου $f_1, f_2 : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ αύξουσες και παραγωγίσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε οι f'_1, f'_2 να είναι ολοκληρώσιμες. Αποδείξτε ότι υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $a_k(h) \leq \frac{M}{k}$ και $b_k(h) \leq \frac{M}{k}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Υπόδειξη: (α) Θεωρούμε την $G(x) = \int_a^x g(t) dt$. Τότε, ζητάμε $\xi \in [a, b]$ τέτοιο ώστε

$$\int_a^b f(x)G'(x) dx = f(a)G(\xi) + f(b)(G(b) - G(\xi)) = f(b)G(b) - (f(b) - f(a))G(\xi).$$

Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες, το αριστερό μέλος γίνεται

$$\int_a^b f(x)G'(x) dx = f(b)G(b) - f(a)G(a) - \int_a^b f'(x)G(x) dx = f(b)G(b) - \int_a^b f'(x)G(x) dx,$$

διότι $G(a) = 0$. Συνεπώς, ζητάμε $\xi \in [a, b]$ τέτοιο ώστε

$$\int_a^b f'(x)G(x) dx = (f(b) - f(a))G(\xi) = G(\xi) \int_a^b f'(x) dx.$$

Το ζητούμενο προκύπτει από το θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού (έχουμε ότι $f' \geq 0$ διότι η f είναι αύξουσα, και η f' είναι ολοκληρώσιμη από την υπόθεση).

(β) Έστω $k \geq 1$. Από το (α), για $j = 1, 2$ υπάρχει $\xi_j \in [-\pi, \pi]$ τέτοιο ώστε

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_j(x) \cos kx dx = f_j(-\pi) \int_{-\pi}^{\xi_j} \cos kx dx + f_j(\pi) \int_{\xi_j}^{\pi} \cos kx dx.$$

Έχουμε

$$\left| \int_{-\pi}^{\xi_j} \cos kx dx \right| = \left| \frac{\sin kx}{k} \Big|_{-\pi}^{\xi_j} \right| \leq \frac{2}{k}$$

και όμοια

$$\left| \int_{\xi_j}^{\pi} \cos kx dx \right| = \left| \frac{\sin kx}{k} \Big|_{\xi_j}^{\pi} \right| \leq \frac{2}{k}.$$

Συνεπώς,

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f_j(x) \cos kx dx \right| \leq 2 \frac{|f_j(-\pi)| + |f_j(\pi)|}{k}.$$

Τότε, για κάθε $k \geq 1$ παίρνουμε

$$|a_k(h)| = \frac{1}{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f_j(x) \cos kx dx - \int_{-\pi}^{\pi} f_j(x) \cos kx dx \right| \leq 2 \frac{|f_1(-\pi)| + |f_1(\pi)| + |f_2(-\pi)| + |f_2(\pi)|}{k} = \frac{M}{k},$$

όπου $M := |f_1(-\pi)| + |f_1(\pi)| + |f_2(-\pi)| + |f_2(\pi)|$ (σταθερά ανεξάρτητη από το k). Με τον ίδιο τρόπο φράσσουμε τους συντελεστές $b_k(h)$.