Αρμονική Ανάλυση (2022–23)
Υποδείξεις για τις Ασκήσεις των Φυλλαδίων

Φυλλάδιο 1

Υποδείξεις για όλες τις ασκήσεις υπάρχουν στο αρχείο με τις ασκήσεις των σημειώσεων του μαθήματος.

Φυλλάδιο 2

Υποδείξεις για τις Ασκήσεις 2.1, 2.2 και 2.3 υπάρχουν στο αρχείο με τις ασκήσεις των σημειώσεων του μαθήματος.

2.4. (α) Έστω $f \in C(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = 0$ για κάθε $k \geqslant 0$. Αποδείξτε ότι η f είναι περιττή συνάρτηση.

(β) Έστω $f \in C(\mathbb{T})$ και $g \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ ώστε $f * g = f$. Αποδείξτε ότι η f είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο.

Υπόδειξη. (α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) + f(-x)$. Η g είναι άρτια, άρα $\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin kx\,dx = 0$ για κάθε $k \geqslant 1$. Από την υπόθεση παίρνουμε επίσης ότι $\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos kx\,dx = 0$ για κάθε $k \geqslant 0$. Έπεται ότι $\widehat{g}(k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, και αφού η g είναι συνεχής συμπεραίνουμε ότι $g \equiv 0$. Αυτό δείχνει ότι $f(-x) = -f(x)$ για κάθε x, δηλαδή η f είναι περιττή.

(β) Από την $f * g = f$ έχουμε $\widehat{f}(k)\widehat{g}(k) = \widehat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Από το λήμμα Riemann-Lebesgue έχουμε $\widehat{g}(k) \to 0$ όταν $|k| \to \infty$, άρα υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|\widehat{g}(k)| < 1$ αν $|k| \geqslant k_0$. Έπεται ότι $\widehat{f}(k) = 0$ για $|k| \geqslant k_0$, συνεπώς η f είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού μικρότερου ή ίσου από k_0.

2.5. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η 2π-περιοδική συνάρτηση με $f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ για $|x| \leqslant \pi$. Υπολογίστε τη σειρά Fourier της f και χρησιμοποιώντας την υπολογίστε το $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}$.

Υπόδειξη. Υπολογίζουμε τους συντελεστές Fourier της f. Με (απλές) πράξεις βλέπουμε ότι $\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}(e^{\pi} - e^{-\pi})$, ενώ αν $k \neq 0$ έχουμε

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{k^2+1}\frac{(-1)^k(e^{\pi} - e^{-\pi})}{2\pi}.$$

Συνεπώς, η σειρά Fourier της f είναι η

$$S(f,x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}\frac{(-1)^k(e^{\pi} - e^{-\pi})}{2\pi} e^{ikx},$$

η οποία συγκλίνει απολύτως. Έπεται ότι $f(x) = S(f,x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και θέτοντας $x = \pi$ παίρνουμε

$$f(\pi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}\frac{(-1)^k(e^{\pi} - e^{-\pi})}{2\pi}(-1)^k = \frac{(e^{\pi} - e^{-\pi})}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2+1},$$

απ' όπου υπολογίζουμε το $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}$.

2.6. Έστω $\alpha \notin \mathbb{Z}$ και $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η 2π-περιοδική συνάρτηση με $f(x) = \cos(\alpha x)$ για $|x| \leqslant \pi$. Υπολογίστε τη σειρά Fourier της f και χρησιμοποιώντας την αποδείξτε ότι

$$\pi\cot(\pi\alpha) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{N} \frac{1}{\alpha + k}.$$

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, διότι $f(\pi) = f(-\pi)$. Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ υπολογίζουμε τον συντελεστή Fourier

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\alpha x)e^{-ikx}dx \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(e^{i\alpha x}+e^{-i\alpha x})e^{-ikx}dx \\
&= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{e^{i(\alpha-k)x}}{i(\alpha-k)}\Big|_{x=-\pi}^{\pi} - \frac{e^{-i(\alpha+k)x}}{i(\alpha+k)}\Big|_{x=-\pi}^{\pi}\right) \\
&= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{e^{i(\alpha-k)\pi}-e^{-i(\alpha-k)\pi}}{i(\alpha-k)} + \frac{e^{i(\alpha+k)\pi}-e^{-i(\alpha+k)\pi}}{i(\alpha+k)}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin(\alpha-k)\pi}{\alpha-k} + \frac{\sin(\alpha+k)\pi}{\alpha+k}\right) \\
&= \frac{(-1)^k\sin\pi\alpha}{2\pi}\left(\frac{1}{\alpha-k}+\frac{1}{\alpha+k}\right) \\
&= \frac{(-1)^k\alpha\sin\pi\alpha}{\pi(\alpha^2-k^2)}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, η σειρά Fourier της f είναι η

$$\begin{aligned}
S(f,x) &\sim \frac{\alpha\sin\pi\alpha}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k e^{ikx}}{\alpha^2-k^2} \\
&= \frac{\alpha\sin\pi\alpha}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(e^{ikx}+e^{-ikx})}{\alpha^2-k^2}\right) \\
&= \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha}+2\alpha\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\cos kx}{\alpha^2-k^2}\right).
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(k)| = \frac{|\alpha\sin\pi\alpha|}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{|\alpha^2-k^2|} \leqslant \frac{|\alpha|}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha^2}+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|\alpha^2-k^2|}\right) < +\infty$$

αφού $|\alpha^2-k^2|>0$ για κάθε $k\in\mathbb{Z}$ και η σειρά $\sum\limits_{k-1}^{\infty}\frac{1}{|k^2-\alpha^2|}$ συγκλίνει. Έπεται ότι $s_n(f)\to f$ ομοιόμορφα, άρα

$$f(x) = S(f,x) = \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha}+2\alpha\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\cos kx}{\alpha^2-k^2}\right)$$

για κάθε x. Θέτοντας $x=\pi$ παίρνουμε

$$\cos\pi\alpha = S(f,\pi) = \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha}+2\alpha\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^2-k^2}\right),$$

άρα

$$\frac{1}{\alpha}+2\alpha\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^2-k^2} = \pi\cot\pi\alpha.$$

Τέλος, παρατηρήστε ότι

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty}\sum_{k=-N}^{N}\frac{1}{\alpha+k} &= \frac{1}{\alpha}+\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{\alpha+k}+\frac{1}{\alpha-k}\right)\\
&= \frac{1}{\alpha}+2\alpha\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{\alpha^2-k^2}\\
&= \frac{1}{\alpha}+2\alpha\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^2-k^2}\\
&= \pi\cot\pi\alpha.
\end{aligned}$$

2.7. Έστω $f\in\mathcal{C}(\mathbb{T})$ και έστω $\alpha\in\mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $\alpha/\pi\notin\mathbb{Q}$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}f(x+k\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}f(t)\,dt$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε αρχικά τις $f_n(t)=e^{int}$, $n\in\mathbb{Z}$. Για $n=0$ έχουμε $f_0\equiv 1$ και η ζητούμενη ισότητα ισχύει (μάλιστα, για κάθε N). Έστω $x\in\mathbb{R}$. Αν $n\neq 0$, έχουμε

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}f_n(x+k\alpha)=\frac{1}{N}e^{inx+inka}=e^{inx}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(e^{in\alpha})^k=e^{inx}\frac{1}{N}\frac{e^{in\alpha}(e^{iNn\alpha}-1)}{e^{in\alpha}-1},$$

συνεπώς

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}f_n(x+k\alpha)\right|\leqslant\frac{|e^{iNn\alpha}-1|}{N|e^{in\alpha}-1|}\leqslant\frac{2}{N|e^{in\alpha}-1|}\longrightarrow 0$$

όταν $N\to\infty$, αφού $\alpha/\pi\notin\mathbb{Q}$ και συνεπώς $|e^{in\alpha}-1|>0$. Όμως,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}f_n(t)\,dt=0,$$

άρα και πάλι ισχύει η ζητούμενη ισότητα. Επειδή τώρα η ισότητα είναι γραμμική ως προς f, συμπεραίνουμε άμεσα ότι

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}p(x+k\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}p(t)\,dt$$

για κάθε μιγαδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο p και κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση. Για τυχόν $\epsilon>0$ βρίσκουμε μιγαδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο p τέτοιο ώστε $\|f-p\|_\infty\leqslant\epsilon$ και γράφουμε

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}f(x+k\alpha)-\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}f(t)\,dt\right|\\
&\qquad\leqslant\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}|f(x+k\alpha)-p(x+k\alpha)|+\left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}p(x+k\alpha)-\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}p(t)\,dt\right|+\|f-p\|_1\\
&\qquad\leqslant\|f-p\|_\infty+\left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}p(x+k\alpha)-\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}p(t)\,dt\right|+\|f-p\|_\infty\\
&\qquad\leqslant\left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}p(x+k\alpha)-\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}p(t)\,dt\right|+2\epsilon.
\end{aligned}$$

Αφήνοντας το $N \to \infty$ έχουμε

$$\limsup_{N\to\infty} \left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(x+k\alpha) - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t)\,dt \right| \leqslant 2\epsilon,$$

και αφού το $\epsilon > 0$ ήταν τυχόν παίρνουμε το ζητούμενο.

2.8. Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Αν (k_n) είναι μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών και (t_n) είναι τυχούσα ακολουθία πραγματικών αριθμών, υπολογίστε το

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos^2(k_n x + t_n)\,dx.$$

Υπόδειξη. Έχουμε

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}.$$

Συνεπώς,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos^2(k_n x + t_n)\,dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\,dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos 2(k_n x + t_n)\,dx.$$

Αφού $k_n \to \infty$, από την $\cos 2(k_n x + t_n) = \cos(2k_n x)\cos(2t_n) - \sin(2k_n x)\sin(2t_n)$ και το λήμμα Riemann-Lebesgue παίρνουμε

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos 2(k_n x + t_n)\,dx = \cos(2t_n) \int_0^{2\pi} f(x)\cos(2k_n x)dx - \sin(2t_n) \int_0^{2\pi} f(x)\sin(2k_n x)dx \longrightarrow 0.$$

Έπεται ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos^2(k_n x + t_n)\,dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\,dx.$$

2.9. (α) Αποδείξτε ότι, για κάθε $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos kt\,dt = \frac{1}{k^2}.$$

(β) Θεωρήστε τη συνάρτηση $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ με $f(0) = -2$ και

$$f(t) = \frac{t^2 - 2\pi t}{2\pi \sin(t/2)}, \qquad 0 < t \leqslant \pi.$$

Αποδείξτε ότι

$$2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \int_0^{\pi} f(t) \sin[(n+1/2)t]\,dt + \frac{\pi^2}{3}$$

και συμπεράνατε ότι $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Υπόδειξη. (α) Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos kt\,dt &= \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right)^2 \frac{\sin kt}{k} \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \left(\frac{t}{\pi} - 1 \right) \sin kt\,dt \\
&= -\left(\frac{t}{\pi} - 1 \right) \frac{\cos kt}{k^2} \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{\pi k^2} \int_0^{\pi} \cos kt\,dt \\
&= \frac{1}{k^2} - \frac{1}{\pi k^3} \sin kt \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{k^2}.
\end{aligned}$$

(β) Θεωρούμε την $g(t) = t^2 - 2\pi t$ στο $[0,\pi]$ και την επεκτείνουμε σε άρτια συνεχή 2π-περιοδική συνάρτηση. Έχουμε

$$a_0(g) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (t^2 - 2\pi t)\,dt = -\frac{4\pi^2}{3}$$

και για $k \geqslant 1$ από το (α) παίρνουμε

$$a_k(g) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (t^2 - 2\pi t)\cos kt\,dt = 4\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos kt\,dt = \frac{4}{k^2}.$$

Αφού η g είναι άρτια, έχουμε επίσης $b_k(g) = 0$ για κάθε $k \geqslant 1$. Τώρα παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}2\int_0^\pi f(t)\sin[(n+1/2)t]\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi g(t)D_n(t)\,dt = s_n(g,0) = \frac{a_0(g)}{2} + \sum_{k=1}^n a_k(g)\\ = -\frac{2\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2},\end{aligned}$$

που είναι το ζητούμενο. Από το λήμμα Riemann-Lebesgue βλέπουμε (εύκολα) ότι

$$\int_0^\pi f(t)\sin[(n+1/2)t]\,dt \longrightarrow 0$$

όταν $n \to \infty$. οπότε

$$2\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} = \lim_{n\to\infty} 2\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{3},$$

απ' όπου συμπεραίνουμε ότι $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

2.10. Αποδείξτε ότι για κάθε πραγματική συνάρτηση $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ ισχύει η ταυτότητα

$$\pi b_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi/n}\left[f\left(\frac{2k\pi}{n} + \theta\right) - f\left(\frac{2k\pi}{n} + \frac{\pi}{n} + \theta\right)\right]\sin n\theta\,d\theta.$$

για κάθε $n \geqslant 1$ και συμπεράνατε ότι αν η f είναι φθίνουσα στο $(0,2\pi)$ τότε $b_n(f) \geqslant 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Υπόδειξη. Για κάθε $k = 0,1,\dots,n-1$ γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_{\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{2(k+1)\pi}{n}} f(\theta)\sin n\theta d\theta &= \int_{\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{(2k+1)\pi}{n}} f(\theta)\sin n\theta d\theta + \int_{\frac{(2k+1)\pi}{n}}^{\frac{2(k+1)\pi}{n}} f(\theta)\sin n\theta d\theta\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{n}} f(u + 2k\pi/n)\sin nu\,du - \int_0^{\pi/n} f(u + (2k+1)\pi/n)\sin nu\,du\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{n}} \left[f(u + 2k\pi/n) - f(u + (2k+1)\pi/n)\right]\sin nu\,du.\end{aligned}$$

Αθροίζοντας παίρνουμε

$$\begin{aligned}\pi b_n &= \int_0^{2\pi} f(\theta)\sin n\theta d\theta = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{2(k+1)\pi}{n}} f(\theta)\sin n\theta d\theta\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi/n}\left[f\left(\frac{2k\pi}{n} + u\right) - f\left(\frac{2k\pi}{n} + \frac{\pi}{n} + u\right)\right]\sin nu\,du.\end{aligned}$$

Αν η f είναι φθίνουσα τότε $f(u+2k\pi/n)-f(u+(2k+1)\pi/n)\geqslant 0$ για κάθε k και $u\in[0,\pi/n]$, άρα

$$\int_0^{\frac{\pi}{n}}\big[f(u+2k\pi/n)-f(u+(2k+1)\pi/n)\big]\sin nu\,du\geqslant 0$$

για κάθε $0\leqslant k\leqslant n-1$. Έπεται ότι $\pi b_n\geqslant 0$.

Φυλλάδιο 3

3.1. Έστω $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Για κάθε $f\in C(\mathbb{T})$ ισχύει $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(x_k)\longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx$.

(ii) Για κάθε $m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ ισχύει $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n e^{imx_k}\longrightarrow 0$.

Υπόδειξη.

3.2. (α) Έστω $f\in\mathcal{R}(\mathbb{T})$ και έστω $k\neq 0$. Αποδείξτε ότι

$$\widehat{f}(k)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+\pi/k)e^{-ikx}dx,$$

και συμπεράνατε ότι

$$\widehat{f}(k)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-f(x+\pi/k)]e^{-ikx}dx.$$

(β) Υποθέτουμε ότι η f ικανοποιεί τη συνθήκη Hölder $|f(x+h)-f(x)|\leqslant C|h|^{\alpha}$ για κάποιον $0<\alpha\leqslant 1$, κάποια σταθερά $C>0$ και για κάθε x,h. Χρησιμοποιώντας το (α) δείξτε ότι υπάρχει $M>0$ ώστε

$$|k|^{\alpha}|\widehat{f}(k)|\leqslant M$$

για κάθε $k\in\mathbb{Z}$.

Υπόδειξη. (α) Παρατηρούμε ότι, με την αντικατάσταση $y=x+\frac{\pi}{k}$,

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}f\big(x+\frac{\pi}{k}\big)e^{-ikx}dx &= \int_{-\pi+\frac{\pi}{k}}^{\pi+\frac{\pi}{k}}f(y)e^{-ik\left(y-\frac{\pi}{k}\right)}dy=\int_{-\pi+\frac{\pi}{k}}^{\pi+\frac{\pi}{k}}f(y)e^{-iky}e^{i\pi}dy\\ &= -\int_{-\pi}^{\pi}f(y)e^{-iky}dy=-2\pi\widehat{f}(k).\end{aligned}$$

'ρα,

$$\widehat{f}(k)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+\pi/k)e^{-ikx}dx,$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\begin{aligned}\widehat{f}(k) &= \frac{\widehat{f}(k)+\widehat{f}(k)}{2}=\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-ikx}dx-\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+\pi/k)e^{-ikx}dx\\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-f(x+\pi/k)]e^{-ikx}dx.\end{aligned}$$

(β) Έστω $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Χρησιμοποιώντας το (α) και την συνθήκη Hölder γράφουμε

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(k)| &\leqslant \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f(x+\pi/k)|\, dx \leqslant \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} C\left|\frac{\pi}{k}\right|^{\alpha} dx \\ &= \frac{C\pi^{\alpha}}{2|k|^{\alpha}} = \frac{M}{|k|^{\alpha}}, \end{aligned}$$

όπου $M = C\pi^{\alpha}/2$. Έπεται ότι $|k|^{\alpha}|\widehat{f}(k)| \leqslant M$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

3.3. (α) Έστω $f, g \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \|fg - s_n(f)s_n(g)\|_1 = 0.$$

(β) Αποδείξτε ότι $\widehat{fg}(k) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s_n(f,x)s_n(g,x)e^{-ikx}dx$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

(γ) Αποδείξτε ότι αν $\widehat{f}(k) = \widehat{g}(k) = 0$ για κάθε $k < 0$ τότε $\widehat{fg}(k) = 0$ για κάθε $k < 0$.

Υπόδειξη. (α) Έχουμε

$$\begin{aligned} \|fg - s_n(f)s_n(g)\|_1 &= \|f(g - s_n(g)) + (f - s_n(f))s_n(g)\|_1 \leqslant \|f(g - s_n(g))\|_1 + \|(f - s_n(f))s_n(g)\|_1 \\ &\leqslant \|f\|_2\|g - s_n(g)\|_2 + \|f - s_n(f)\|_2\|s_n(g)\|_2 \end{aligned}$$

από την ανισότητα Cauchy-Schwarz. Αφού $f, g \in L^2(\mathbb{T})$ έχουμε $\|f - s_n(f)\|_2 \to 0$ και $\|g - s_n(g)\|_2 \to 0$. Επίσης, $\|s_n(g)\|_2 \leqslant \|g\|_2$ από την ανισότητα Bessel. Έπεται ότι

$$\|f\|_2\|g - s_n(g)\|_2 + \|f - s_n(f)\|_2\|s_n(g)\|_2 \leqslant \|f\|_2\|g - s_n(g)\|_2 + \|f - s_n(f)\|_2\|g\|_2 \to 0$$

και έχουμε το ζητούμενο.

(β) Έστω $k \in \mathbb{Z}$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \left|\widehat{fg}(k) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s_n(f,x)s_n(g,x)e^{-ikx}dx\right| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)e^{-ikx}dx - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s_n(f,x)s_n(g,x)e^{-ikx}dx\right| \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)g(x) - s_n(f,x)s_n(g,x)|\, dx \\ &= \|fg - s_n(f)s_n(g)\|_1 \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

όταν $n \to \infty$, άρα

$$\widehat{fg}(k) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s_n(f,x)s_n(g,x)e^{-ikx}dx.$$

(γ) Έστω $k < 0$. Χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι $\widehat{f}(m) = 0$ αν $m < 0$ και $\widehat{g}(\ell) = 0$ αν $\ell < 0$, για $n > |k|$ έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s_n(f,x)s_n(g,x)e^{-ikx}dx &= \sum_{m=-n}^{n}\sum_{\ell=-n}^{n} \widehat{f}(m)\widehat{g}(\ell)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m+\ell-k)x}dx \\ &= \sum_{m=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n} \widehat{f}(m)\widehat{g}(\ell)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m+\ell-k)x}dx = 0, \end{aligned}$$

διότι αν $m, \ell \geqslant 0$ τότε $m + \ell - k > 0$ και συνεπώς

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m+\ell-k)x}dx = 0.$$

Από το (β) έπεται ότι

$$\widehat{fg}(k) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s_n(f,x)s_n(g,x)e^{-ikx}dx = 0.$$

3.4. Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Ορίζουμε

$$F(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|s_n(f,x)-\sigma_{n+1}(f,x)|^2}{n}\right)^{1/2}.$$

Αποδείξτε ότι $\|F\|_2 \leqslant \|f\|_2$.

Υπόδειξη. Για κάθε $N \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$g_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{|s_n(f,x)-\sigma_{n+1}(f,x)|^2}{n}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$s_n(f,x)-\sigma_{n+1}(f,x) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{|k|}{n+1}\widehat{f}(k)e^{ikx}.$$

Έπεται ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} g_N(x)\,dx = \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=-n}^{n} \frac{|k|^2}{n(n+1)^2}|\widehat{f}(k)|^2 = \sum_{k=-N}^{N}|k|^2|\widehat{f}(k)|^2\sum_{n=|k|}^{N}\frac{1}{n(n+1)^2}.$$

Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{n=|k|}^{N}\frac{1}{n(n+1)^2} &= \sum_{n=|k|}^{N}\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\\
&\leqslant \sum_{n=|k|}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) - \sum_{n=|k|+1}^{N+1}\frac{1}{n(n+1)}\\
&= \frac{1}{|k|}-\frac{1}{N+1}-\frac{1}{|k|+1}+\frac{1}{N+2}\\
&\leqslant \frac{1}{|k|(|k|+1)} \leqslant \frac{1}{|k|^2}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} g_N(x)\,dx \leqslant \sum_{k=-N}^{N}|k|^2|\widehat{f}(k)|^2\,\frac{1}{|k|^2} = \sum_{k=-N}^{N}|\widehat{f}(k)|^2 \leqslant \|f\|_2^2.$$

Αφήνοντας το $N\to\infty$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\|F\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|s_n(f,x)-\sigma_{n+1}(f,x)|^2}{n}\right)dx\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} g_N(x)\,dx \leqslant \|f\|_2^2.
\end{aligned}$$

3.5. Χρησιμοποιώντας την 2π-περιοδική περιττή συνάρτηση $g:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ με $g(x)=x(\pi-x)$ στο $[0,\pi]$ και την ταυτότητα του Parseval, αποδείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^6}=\frac{\pi^6}{960}\qquad\text{και}\qquad\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^6}=\frac{\pi^6}{945}.$$

Υπόδειξη. Αφού η f είναι περιττή, έχουμε $\widehat{f}(0)=0$. Για $k\neq 0$ γράφουμε

$$\begin{aligned}\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-ikx}dx=\frac{-i}{\pi}\int_0^{\pi}x(\pi-x)\sin(kx)\,dx\\ &= \frac{-i}{\pi}\left[-\frac{\pi x\cos(kx)}{k}+\frac{\pi\sin(kx)}{k^2}\right]_0^{\pi}+\frac{i}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\sin(kx)\,dx\\ &= i\frac{(-1)^k\pi}{k}-\frac{i}{\pi}\left[\frac{x^2\cos(kx)}{k}\right]_0^{\pi}+\frac{2i}{\pi k}\int_0^{\pi}x\cos(kx)\,dx\\ &= i\frac{(-1)^k\pi}{k}-i\frac{(-1)^k\pi}{k}+\frac{2i}{\pi k}\left[\frac{x\sin(kx)}{k}+\frac{\cos(kx)}{k^2}\right]_0^{\pi}\\ &= \frac{2i[(-1)^k-1]}{\pi k^3}.\end{aligned}$$

Συνεπώς, η σειρά Fourier της f είναι η

$$\sum_{k\neq 0}\frac{2i[(-1)^k-1]}{\pi k^3}e^{ikx}.$$

Από την ταυτότητα του Parseval,

$$2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{16}{\pi^2(2k+1)^6}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)^2x^2dx=\frac{\pi^4}{30}.$$

Έπεται ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^6}=\frac{\pi^6}{960}.$$

Όμως,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^6}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^6}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^6}=\frac{\pi^6}{960}+\frac{1}{64}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^6}.$$

Συνεπώς,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^6}=\frac{64}{63}\frac{\pi^6}{960}=\frac{\pi^6}{945}.$$

3.6. Δίνονται $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n\in\{-1,1\}$. Ορίζουμε $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ με $f(x)=\sum_{k=1}^n\epsilon_ke^{ikx}$. Αποδείξτε ότι

$$\|f\|_\infty=\max\{|f(x)|:x\in[0,2\pi]\}\geqslant\sqrt{n}.$$

Υπόδειξη. Από την ταυτότητα Parseval έχουμε

$$\|f\|_2^2=\sum_{k=1}^{n}|\epsilon_k|^2=n,$$

δηλαδή $\|f\|_2=\sqrt{n}$. Έπεται ότι $\|f\|_\infty\geqslant\|f\|_2=\sqrt{n}$.

3.7. Θεωρούμε την ακολουθία $\{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ με

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{αν } k \geqslant 1 \\ 0 & \text{αν } k \leqslant 0 \end{cases}$$

Δείξτε ότι $\{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ αλλά δεν υπάρχει $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ με την ιδιότητα $\widehat{f}(k) = a_k$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Υπόδειξη. Η ακολουθία $\{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ ανήκει στον $\ell^2(\mathbb{Z})$ διότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} < +\infty.$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ με την ιδιότητα $\widehat{f}(k) = a_k$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Τότε, $|k\widehat{f}(k)| = 0$ αν $k \leqslant 0$ και $|k\widehat{f}(k)| = 1$ αν $k \geqslant 1$. Δηλαδή, η ακολουθία $\{k\widehat{f}(k)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ είναι φραγμένη. Από γνωστή πρόταση, τα μερικά αθροίσματα $s_n(f)$ της f είναι ομοιόμορφα φραγμένα. Δηλαδή, υπάρχει $M > 0$ ώστε $|s_n(f)(x)| \leqslant M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in \mathbb{T}$. Όμως,

$$s_n(f)(0) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to +\infty$$

όταν $n \to \infty$. Έτσι, καταλήγουμε σε άτοπο.

3.8. (α) Έστω $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ ακολουθία μιγαδικών αριθμών τέτοια ώστε $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\widehat{f}(k) = a_k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

(β) Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{k}}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

(γ) Χρησιμοποιώντας το (α) αποδείξτε ότι υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{k}}$ για άπειρους το πλήθος $k \in \mathbb{N}$.

Υπόδειξη. (α) Γνωστό από τη θεωρία. Αφού $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$, η ακολουθία συναρτήσεων $s_N(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{ikx}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση $f \in C(\mathbb{T})$ για την οποία έχουμε $\widehat{f}(k) = \lim\limits_{N\to\infty} \widehat{s_N}(k) = a_k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

(β) Αν υπήρχε τέτοια $f \in C(\mathbb{T})$ τότε θα είχαμε $f \in L^2(\mathbb{T})$ και από την ταυτότητα Parseval θα παίρναμε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 \leqslant \|f\|_2^2 < \infty,$$

το οποίο είναι άτοπο.

(γ) Θεωρούμε την ακολουθία $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ με $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ αν $n = k^4$ για κάποιον $k \in \mathbb{N}$ και $a_n = 0$ αλλιώς. Τότε,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty.$$

Από το (α) υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\widehat{f}(n) = a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ειδικότερα, για κάθε n της μορφής $n = k^4$ (δηλαδή για άπειρους $n \in \mathbb{N}$) έχουμε $\widehat{f}(n) = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

3.9. Δείξτε ότι: αν $\alpha \notin \mathbb{Z}$, τότε η σειρά Fourier της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} e^{i(\pi - x)\alpha}$$

στο $[0, 2\pi]$, είναι η

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k+\alpha}.$$

Εφαρμόζοντας την ταυτότητα του Parseval, συμπεράνατε ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(k+\alpha)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\alpha)}.$$

Υπόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}e^{i\pi\alpha}e^{-ix(\alpha+k)}dx \\
&= \frac{e^{i\pi\alpha}}{2\sin\pi\alpha}\left[\frac{-e^{-ix(\alpha+k)}}{i(k+\alpha)}\right]_0^{2\pi} = \frac{e^{i\pi\alpha}}{2\sin\pi\alpha}\,\frac{1-e^{-2\pi i\alpha}}{i(k+\alpha)} \\
&= \frac{e^{i\pi\alpha}-e^{-i\pi\alpha}}{2i(k+\alpha)\sin\pi\alpha} = \frac{2i\sin\pi\alpha}{2i(k+\alpha)\sin\pi\alpha} \\
&= \frac{1}{k+\alpha}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, η σειρά Fourier της f είναι η

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k+\alpha}.$$

Από την ταυτότητα του Parseval,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(k+\alpha)^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\alpha)},$$

αφού $|f(x)| = \frac{\pi}{|\sin(\pi\alpha)|}$ για κάθε x.

3.10. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη 2π-περιοδική συνάρτηση.

(α) Αποδείξτε ότι

$$\|f - s_n(f)\|_\infty \leqslant \sum_{|k|>n} \frac{|\widehat{f'}(k)|}{|k|}.$$

(β) Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\|f - s_n(f)\|_\infty = 0.$$

Υπόδειξη. (α) Αφού $f \in C^1(\mathbb{T})$ έχουμε $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)e^{ikx}$, $x \in \mathbb{R}$, άρα

$$|f(x) - s_n(f,x)| = \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)e^{ikx} - \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx}\right| = \left|\sum_{|k|>n} \widehat{f}(k)e^{ikx}\right| \leqslant \sum_{|k|>n} |\widehat{f}(k)|$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα

$$\|f - s_n(f)\|_\infty \leqslant \sum_{|k|>n} |\widehat{f}(k)| = \sum_{|k|>n} \frac{|\widehat{f'}(k)|}{|k|},$$

αφού $\widehat{f'}(k) = (ik)\widehat{f}(k)$.

(β) Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz,

$$\sum_{|k|>n} \frac{|\widehat{f'}(k)|}{|k|} \leqslant \left(\sum_{|k|>n} |\frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{|k|>n} |\widehat{f'}(k)|^2 \right)^{1/2} \leqslant \frac{c}{\sqrt{n}} \left(\sum_{|k|>n} |\widehat{f'}(k)|^2 \right)^{1/2},$$

διότι

$$\sum_{|k|>n} \frac{1}{k^2} = 2 \sum_{k=n+1} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{c^2}{n}.$$

Από την άλλη πλευρά,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f'}(k)|^2 = \|f'\|_2^2 < \infty,$$

άρα

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{|k|>n} |\widehat{f'}(k)|^2 = 0.$$

Συνεπώς,

$$\sqrt{n}\|f - s_n(f)\|_\infty \leqslant c \left(\sum_{|k|>n} |\widehat{f'}(k)|^2 \right)^{1/2} \longrightarrow 0.$$