ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
(Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών - Διανυσματική Ανάλυση)
9ο Φυλλάδιο Ασκήσεων (2025-26)

Άσκηση 1. Έστω D ένα χωρίο του $\mathbb{R}^2$ στο οποίο εφαρμόζεται το θεώρημα Green. Αν η $f : D \to \mathbb{R}$ είναι αρμονική, δηλαδή $f_{xx} + f_{yy} = 0$, να αποδείξετε ότι για την $\vec{F} = (-f_y, f_x)$ ισχύει ότι $\displaystyle\int_{\partial D} \vec{F} = 0$.

Άσκηση 2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας S με

$$S^* = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2,\ 0 \leqslant z \leqslant 4\}.$$

Άσκηση 3. Να υπολογίσετε τη ροή του $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$ διαμέσου της επιφάνειας S του στερεού κύβου $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1\}$.

Άσκηση 4. Να υπολογίσετε τη ροή του $\vec{F}(x, y, z) = (y + x, x + z, z^2)$ διαμέσου της επιφάνειας S του κώνου που βρίσκεται ανάμεσα στα επίπεδα $z = 0$ και $z = 2$.

Άσκηση 5. Με χρήση του θεωρήματος Gauss, να υπολογίσετε τη ροή του διανυσματικού πεδίου $\vec{F}(x, y, z) = (x^3/3, y^3/3, xy)$ διαμέσου της επιφάνειας του στερεού που φράσσεται από τις επιφάνειες

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 0, \quad z = 1.$$

Άσκηση 6. Δίνεται το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 e^z + x, y - xe^z, x^2 - 2xe^z)$. Με κατάλληλη χρήση του θεωρήματος Gauss, να υπολογίσετε τη ροή του $\vec{F}$ διαμέσου της *ανοικτής* επιφάνειας S με

$$S^* = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geqslant 0\}.$$

Άσκηση 7. Υπολογίστε τη ροή του διανυσματικού πεδίου $\vec{F}(x, y, z) = \left(e^z, \frac{1}{3}(x^2 + y^2)^{3/2}, \cos(y^2)\right)$ διαμέσου της επιφάνειας που είναι το σύνορο του στερεού

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leqslant 2x,\ 0 \leqslant z \leqslant x^2 + y^2\}.$$

Άσκηση 8. Να αποδείξετε ότι η ροή του διανυσματικού πεδίου $\vec{F}(x, y, z) = (ax, by, cz)$, όπου $a, b, c \in \mathbb{R}$, διαμέσου μιας κλειστής επιφάνειας S που αποτελεί το σύνορο ενός χωρίου K στο οποίο εφαρμόζεται το θεώρημα απόκλισης, είναι ίση με $(a + b + c)V(K)$, όπου $V(K)$ είναι ο όγκος του χωρίου K.

Άσκηση 9. Έστω $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ συνάρτηση κλάσης C^2 και έστω $\vec{F} = \phi \nabla \phi$.

(α) Υπολογίστε τα $\operatorname{div} \vec{F}$ και $\operatorname{rot} \vec{F}$.

(β) Εξετάστε αν το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}$ είναι συντηρητικό και υπολογίστε το έργο του $\vec{F}$ σε μια κλειστή διαδρομή,

(γ) Αν επιπλέον $\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = 0$, αποδείξτε ότι η προς τα έξω ροή του $\vec{F}$ μέσω της επιφάνειας μιας σφαίρας στον $\mathbb{R}^3$ είναι θετική.

Άσκηση 10. Να επαληθεύσετε το θεώρημα Gauss για το διανυσματικό πεδίο $\vec{F} = (0, 0, z^3)$ και την επιφάνεια S που είναι το σύνορο του στερεού K που φράσσεται από τις επιφάνειες

$$z = x^2 + y^2 \quad \text{και} \quad z = 8 - x^2 - y^2.$$

Άσκηση 11. Να επαληθεύσετε το θεώρημα Gauss για το διανυσματικό πεδίο $\vec{F} = (x, y, z)$ και το στερεό K που φράσσεται από τον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 1$ και τα επίπεδα $z = 0$ και $z = x + 2$.

Άσκηση 12. Με χρήση του θεωρήματος Stokes να δείξετε ότι

$$\int_C (y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz = 0,$$

όπου C είναι η τομή του κυλίνδρου $x^2+y^2=2y$ και του επιπέδου $y=z$.

Άσκηση 13. Με χρήση του θεωρήματος Stokes να δείξετε ότι

$$\int_C (y^2+z^2)\,dx + (z^2+x^2)\,dy + (x^2+y^2)\,dz = 2\pi ab^2,$$

όπου C είναι η τομή του ημισφαιρίου

$$x^2+y^2+z^2=2ax, \qquad z \geqslant 0$$

και του κυλίνδρου

$$x^2+y^2=2bx,$$

όπου $0<b<a$. Δίνεται ότι η C προσανατολίζεται αρνητικά ως προς το μέρος του κυλίνδρου που βρίσκεται μέσα στο ημισφαίριο.

Άσκηση 14. Να επαληθεύσετε το θεώρημα Stokes για το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}(x,y,z)=\frac{1}{2}(z^2,x^2,y^2)$ και την επιφάνεια S με

$$S^* = \{(x,y,z) : z = x^2+y^2,\ 1 \leqslant z \leqslant 4\}.$$

Άσκηση 15. Δίνεται διανυσματικό πεδίο $\vec{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ με $\operatorname{rot}\vec{F}(x,y,z)=(3z^2e^{z^3+y^2},x^2,-y^2)$. Να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C \vec{F}$, όπου C το θετικά προσανατολισμένο χείλος (σύνορο) του τμήματος της επιφάνειας του επιπέδου $z=y+1$ που αποκόπτει ο ελλειπτικός κώνος $z=\sqrt{x^2+2y^2}$.