Αρμονική Ανάλυση (2025–26)
Ασκήσεις – Φυλλάδιο 3

(Παραδίδετε έξι από τις ασκήσεις. Ημερομηνία παράδοσης: 5 Ιουνίου 2026)

1. Ορίζουμε $Q_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $Q_n(x) = \frac{1}{\gamma_n}(1-x^2)^n \chi_{[-1,1]}(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, όπου $\gamma_n = \int_{-1}^{1}(1-t^2)^n dt$. Αποδείξτε πλήρως ότι η $\{Q_n\}_{n\geqslant 1}$ είναι οικογένεια καλών πυρήνων και ότι $f * Q_n \longrightarrow f$ ομοιόμορφα για κάθε φραγμένη ομοιόμορφα συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

2. Έστω $f, g \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)(f(x) - s_n(f,x))\, dx = 0.$$

3. (α) Έστω $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. Εξηγήστε γιατί $\|f - s_n(f)\|_2 \leqslant \|f - \sigma_n(f)\|_2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και με βάση αυτήν την παρατήρηση αποδείξτε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - s_n(f)\|_2 = 0$.

(β) Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$, η οποία είναι συνεχής στο x_0. Αποδείξτε ότι αν υπάρχει το $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(f, x_0)$ τότε είναι ίσο με $f(x_0)$.

4. Έστω $f \in C(\mathbb{T})$. Υποθέτουμε ότι $f(0) = 0$ και ότι υπάρχει η $f'(0)$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = \frac{f(x)}{e^{ix} - 1}$$

επεκτείνεται συνεχώς στο 0, άρα $g \in C(\mathbb{T})$. Στη συνέχεια, αποδείξτε ότι $\widehat{f}(k) = \widehat{g}(k-1) - \widehat{g}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ και από αυτό συμπεράνατε ότι

$$s_n(f, 0) \longrightarrow 0 = f(0).$$

5. (α) Έστω $g, f, f_n \in \mathcal{R}([a,b)$ με $\|f_n - f\|_2 \to 0$. Ορίζουμε

$$h(x) = \int_a^x f(t)g(t)\, dt \quad \text{και} \quad h_n(x) = \int_a^x f_n(t)g(t)\, dt, \qquad x \in [a,b].$$

Αποδείξτε ότι $h_n \to h$ ομοιόμορφα.

(β) Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι, για κάθε $x \in [0, 2\pi]$,

$$\int_0^x f(t)\, dt = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x (a_k \cos kt + b_k \sin kt)\, dt,$$

δηλαδή μπορούμε να ολοκληρώσουμε τη σειρά Fourier της f όρο προς όρο, ακόμα κι αν αυτή αποκλίνει.

6. (α) Αποδείξτε ότι αν $a \neq 0$ τότε

$$e^{ax} = \frac{e^{2\pi a} - 1}{\pi} \left(\frac{1}{2a} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a \cos kx - k \sin kx}{a^2 + k^2} \right), \qquad 0 < x < 2\pi.$$

(β) Για $0 < x < 2\pi$ και $a \neq 0$ υπολογίστε τα αθροίσματα των σειρών

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a \cos kx}{a^2 + k^2} \quad \text{και} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \sin kx}{a^2 + k^2}.$$

(γ) Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα Parseval υπολογίστε τα

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(a^2+k^2)^2} \quad \text{και} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(a^2+k^2)^2}.$$

7. Αποδείξτε το δεύτερο μέρος του κριτηρίου του Weyl: αν μια ακολουθία αριθμών $\xi_1, \xi_2, \ldots$ στο $[0,1)$ είναι ισοκατανεμημένη, τότε για κάθε $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ισχύει ότι

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i k \xi_n} \longrightarrow 0 \qquad \text{καθώς το } N \to \infty.$$

[*Υπόδειξη:* Αρκεί να δείξετε ότι $\frac{1}{N} \sum\limits_{n=1}^{N} f(\xi_n) \to \int_0^1 f(x)\,dx$ για όλες τις συνεχείς συναρτήσεις f. Αποδείξτε πρώτα το ίδιο αν η f είναι η δείκτρια συνάρτηση ενός διαστήματος.]

8. Έστω $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Είναι γνωστό ότι $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Αποδείξτε ότι

$$\|f * g\|_2 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_2.$$

[*Υπόδειξη:* Ταυτότητα Plancherel.]

9. Δείξτε ότι: για κάθε $\epsilon > 0$ η συνάρτηση $F(\xi) = \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\epsilon}}$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier μιας συνάρτησης $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Υπόδειξη. Θεωρήστε την

$$f(x) = \int_0^{\infty} K_{\delta}(x) e^{-\pi\delta} \delta^{\epsilon - 1} d\delta,$$

όπου $K_{\delta}(x) = \delta^{-n/2} e^{-\pi |x|^2/\delta}$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Fubini ελέγξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη, και στη συνέχεια δείξτε ότι

$$\widehat{f}(\xi) = \int_0^{\infty} e^{-\pi\delta|\xi|^2} e^{-\pi\delta} \delta^{\epsilon-1} d\delta.$$

Τέλος, υπολογίστε αυτό το ολοκλήρωμα (θα χρειαστείτε την $\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt$, $s > 0$).

10. (α) Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι

$$s_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \big[f(x+t) + f(x-t)\big] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t}{2 \sin \frac{t}{2}}\, dt.$$

(β) Έστω $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι $\|s_n(f)\|_{\infty} = o(\ln n)$.

Υπόδειξη: Θεωρήστε τη διαφορά $s_n(f,x) - f(x)$. Χρησιμοποιώντας το (α) μπορείτε να την γράψετε ως

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \big[f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)\big] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t}{2 \sin \frac{t}{2}}\, dt.$$

Φράξτε το

$$I_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \big|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)\big| \left| \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t}{2 \sin \frac{t}{2}} \right| dt$$

κατάλληλα (ανεξάρτητα από το x) και δείξτε ότι $I_n / \ln n \longrightarrow 0$ καθώς το $n \to \infty$.