

ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
(Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών - Διανυσματική Ανάλυση)
8ο Φυλλάδιο Ασκήσεων (υποδείξεις)

Άσκηση 1. Έστω $\vec{F} = (P, Q, R) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με

$$P = yz^2 \cos(xy) + 2xy, \quad Q = xz^2 \cos(xy) + x^2 + z, \quad R = 2z \sin(xy) + y + 2z.$$

(α) Να δείξετε ότι το $\vec{F}$ είναι συντηρητικό.

(β) Να βρείτε μια συνάρτηση δυναμικού για το $\vec{F}$.

(γ) Να υπολογίσετε το $\int_{\vec{K}\Lambda} \vec{F}$, όπου $K(1, 1, 0)$ και $\Lambda(1, 2, 1)$.

Υπόδειξη: (α) Με απευθείας υπολογισμό βλέπουμε ότι

$$P_y = Q_x = z^2(\cos(xy) - xy \sin(xy)) + 2x$$

$$P_z = R_x = 2zy \cos(xy)$$

$$Q_z = R_y = 2xz \cos(xy) + 1.$$

Άρα, $\text{rot } \vec{F} = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y) = (0, 0, 0) = \vec{0}$, και συμπεραίνουμε ότι το $\vec{F}$ είναι συντηρητικό.

(β) *Πρώτος τρόπος:* Ζητάμε $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\nabla f = \vec{F}$. Θα πρέπει να έχουμε $f_x = P$, άρα

$$f(x, y, z) = z^2 \sin(xy) + x^2 y + \alpha(y, z)$$

διότι η συνάρτηση στο δεξιό μέλος έχει μερική παράγωγο ως προς x ίση με P . Τότε, η $f_y = Q$ μας δίνει

$$xz^2 \cos(xy) + x^2 + \alpha_y(y, z) = xz^2 \cos(xy) + x^2 + z,$$

δηλαδή $\alpha_y(y, z) = z$, απ' όπου βλέπουμε ότι $\alpha(y, z) = zy + \beta(z)$, δηλαδή

$$f(x, y, z) = z^2 \sin(xy) + x^2 y + zy + \beta(z).$$

Τότε, η $f_z = R$ μας δίνει

$$2z \sin(xy) + y + \beta'(z) = 2z \sin(xy) + y + 2z,$$

δηλαδή $\beta'(z) = 2z$, απ' όπου βλέπουμε ότι $\beta(z) = z^2 + c$. Θεωρώντας την

$$f(x, y, z) = z^2 \sin(xy) + x^2 y + zy + z^2$$

επαληθεύουμε ότι $\nabla f = \vec{F}$.

Δεύτερος τρόπος: Έστω $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$. Θεωρούμε την τεθλασμένη γραμμή $OABC$, όπου $A(x_0, 0, 0)$, $B(x_0, y_0, 0)$ και $C(x_0, y_0, z_0)$. Παρατηρούμε ότι

1. Στο $\vec{OA}$ έχουμε $P = R = 0$, $dy = 0$, άρα $\int_{\vec{OA}} \vec{F} = 0$.

2. Στο $\vec{AB}$ έχουμε $z = 0$, $x = x_0 \implies dx = 0$ και $R(x_0, y, 0) = 0$ για κάθε $0 \leq y \leq y_0$, άρα

$$\int_{\vec{AB}} \vec{F} = \int_0^{y_0} x_0^2 dy = x_0^2 y_0.$$

3. Στο $\vec{BC}$ έχουμε $x = x_0$ και $y = y_0$, άρα $dx = dy = 0$, και $0 \leq z \leq z_0$, άρα

$$\int_{\vec{BC}} \vec{F} = \int_0^{z_0} [2z \sin(x_0 y_0) + y_0 + 2z] dz = z_0^2 (\sin(x_0 y_0) + 1) + y_0 z_0.$$

Άρα,

$$\int_{\gamma} \vec{F} = 0 + x_0^2 y_0 + z_0^2 (\sin(x_0 y_0) + 1) + y_0 z_0,$$

και συμπεραίνουμε ότι μια συνάρτηση δυναμικού για το $\vec{F}$ είναι η

$$f(x, y, z) = x^2 y + z^2 (\sin(xy) + 1) + yz, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

(γ) Αφού $\vec{F} = \nabla f$, έχουμε ότι

$$\int_{\vec{K\Lambda}} \vec{F} = f(1, 2, 1) - f(1, 1, 0) = \sin 2 + 4.$$

□

Άσκηση 2. Να δείξετε ότι το $\vec{F} = (e^x \cos y + yz, xz - e^x \sin y, xy + z)$ είναι συντηρητικό και να βρείτε μια συνάρτηση δυναμικού.

Υπόδειξη: Έχουμε $P = e^x \cos y + yz$, $Q = xz - e^x \sin y$ και $R = xy + z$, άρα

$$\text{rot } \vec{F} = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y) = (x - x, y - y, z - e^x \sin y - (-e^x \sin y + z)) = (0, 0, 0).$$

Συνεπώς, το $\vec{F}$ είναι συντηρητικό.

Έστω $M(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$. Εάν $A(x_0, 0, 0)$ και $B(x_0, y_0, 0)$, θεωρούμε την τεθλασμένη γραμμή $\gamma = \vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BM}$. Τότε,

$$\begin{aligned} \int_{\vec{OA}} \vec{F} &= \int_0^{x_0} P(x, 0, 0) dx = \int_0^{x_0} e^x dx = e^{x_0} - 1, \\ \int_{\vec{AB}} \vec{F} &= \int_0^{y_0} Q(x_0, y, 0) dy = -e^{x_0} \int_0^{y_0} \sin y dy = e^{x_0} (\cos y_0 - 1), \\ \int_{\vec{BM}} \vec{F} &= \int_0^{z_0} R(x_0, y_0, z) dz = \int_0^{z_0} (x_0 y_0 + z) dz = x_0 y_0 z_0 + \frac{z_0^2}{2}. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\int_{\gamma} \vec{F} = e^{x_0} - 1 + e^{x_0} (\cos y_0 - 1) + x_0 y_0 z_0 + \frac{z_0^2}{2} = e^{x_0} \cos y_0 + x_0 y_0 z_0 + \frac{z_0^2}{2} - 1.$$

Οπότε, μια συνάρτηση δυναμικού είναι η

$$f(x, y, z) = e^x \cos y + xyz + \frac{z^2}{2}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

□

Άσκηση 3. Να υπολογίσετε τα:

$$(\alpha) \quad J_1 = \int_{\gamma} zy^2 dx + x^2 z^2 dy + xz dz, \quad \text{όπου } \gamma \text{ η θετικά προσανατολισμένη περιφέρεια } \gamma(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 6), \\ t \in [0, 2\pi].$$

$$(\beta) \quad J_2 = \int_{\gamma} (2x + e^y + y)dx + (xe^y + 3x - y^3)dy, \text{ όπου } \gamma(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

$$(\gamma) \quad J_3 = \int_{\gamma} (P dx + Q dy), \text{ όπου } P = 2x^4 + y^2 + e^x, \quad Q = 3x - y^3 - e^{y^2}, \text{ και } \gamma(t) = (-1 + \sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \sin t), \\ t \in [0, 2\pi].$$

Υπόδειξη: (α) Γράφουμε

$$J_1 = \int_{\gamma} (6y^2 dx + 36x^2 dy) = 6 \int_{\gamma} (y^2 dx + 6x^2 dy) = 6 \int_0^{2\pi} [4 \sin^2 t (-2 \sin t) + 6(4 \cos^2 t)(2 \cos t)] dt \\ = 6 \left(-8 \int_0^{2\pi} \sin^3 t dt + 48 \int_0^{2\pi} \cos^3 t dt \right) = 0,$$

$$\text{διότι } \int_0^{2\pi} \sin^3 t dt = \int_0^{2\pi} \cos^3 t dt = 0.$$

(β) Η γ είναι απλή κλειστή, θετικά προσανατολισμένη και λεία, με $\text{int}(\gamma^*) = \Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$, το οποίο είναι απλά συνεκτικό. Οι $P = 2x + e^y + y$ και $Q = xe^y + 3x - y^3$ είναι κλάσης C^1 στον $\mathbb{R}^2$. Από το θεώρημα Green παίρνουμε

$$J_2 = \iint_{\Omega} (Q_x - P_y) dx dy = \iint_{\Omega} (e^y + 3 - e^y - 1) dx dy = 2 \iint_{\Omega} dx dy = 2\text{Εμβ}(\Omega) = 2\pi \cdot 1^2 = 2\pi.$$

(γ) Η γ είναι απλή κλειστή, θετικά προσανατολισμένη και λεία, με $\text{int}(\gamma^*) = \Omega = \{(x, y) : (x+1)^2 + y^2 < 2\}$, το οποίο είναι απλά συνεκτικό. Οι P και Q είναι κλάσης C^1 στον $\mathbb{R}^2$. Από το θεώρημα Green παίρνουμε

$$J_3 = \iint_{\Omega} (Q_x - P_y) dx dy = \iint_{\Omega} (3 - 2y) dx dy = 3\text{Εμβ}(\Omega) - 2A = 3\pi(\sqrt{2})^2 - 2A = 6\pi - 2A,$$

όπου $A = \iint_{\Omega} y dx dy$. Για τον υπολογισμό του A περνάμε σε μετατοπισμένες πολικές συντεταγμένες $x = -1 + r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$, όπου $0 \leq r \leq \sqrt{2}$, $\phi \in [0, 2\pi]$. Έτσι, παίρνουμε

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} r^2 \sin \phi d\phi = \int_0^{2\pi} \sin \phi d\phi \cdot \frac{r^3}{3} \Big|_0^{\sqrt{2}} = 0,$$

και τελικά $J = 6\pi$. □

Άσκηση 4. Να υπολογίσετε το $J = \int_{\gamma} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy \right)$, όπου γ^* το θετικά προσανατολισμένο σύνορο του τριγώνου ABC , όπου $A(0, 3)$, $B(-1, -1)$, $C(1, -2)$.

Υπόδειξη: Επιλέγουμε τον θετικά προσανατολισμένο κύκλο $\eta_R(t) = (R \cos t, R \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ με το $R > 0$ αρκετά μικρό ώστε να έχουμε $\eta_R^* \subset \text{int}(\gamma^*)$. Από την αρχή της παραμόρφωσης έπεται ότι

$$J = \int_{\eta_R} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy \right)$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα (υπολογίζεται εύκολα και) είναι ίσο με 2π . □

Άσκηση 5. Έστω $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$, $u, v : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς, κλάσης C^1 στο Ω , με $u(x, y) = 1$ και $v(x, y) = y$ για κάθε $(x, y) \in \partial\Omega$. Θέτουμε $\vec{F} = (v, u)$ και $\vec{G} = (u_x - u_y, v_x - v_y)$. Να υπολογίσετε το

$$\iint_{\Omega} \vec{F}(x, y) \cdot \vec{G}(x, y) dx dy.$$

Υπόδειξη: Παρατηρούμε ότι

$$\vec{F} \cdot \vec{G} = v(u_x - u_y) + u(v_x - v_y) = (u_x v + u v_x) - (u v_y + u_y v) = \frac{\partial}{\partial x}(uv) - \frac{\partial}{\partial y}(uv).$$

Από το θεώρημα Green,

$$\iint_{\Omega} \vec{F} \cdot \vec{G} = \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}(uv) - \frac{\partial}{\partial y}(uv) \right] dx dy = \int_{\partial\Omega} (uv dx + uv dy) = \int_{\partial\Omega} (y dx + x dy),$$

όπου $\partial\Omega = \gamma$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Άρα,

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \vec{F} \cdot \vec{G} &= \int_0^{2\pi} [\sin t(-\sin t) + \sin t \cos t] dt \\ &= -\int_0^{2\pi} \sin^2 t dt + \int_0^{2\pi} \sin t \cos t dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\cos(2t) - 1) dt + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin(2t) dt = -\pi, \end{aligned}$$

$$\text{αφού } \int_0^{2\pi} \cos(2t) dt = \int_0^{2\pi} \sin(2t) dt = 0. \quad \square$$

Άσκηση 6. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ απλά συνεκτικό φραγμένο χωρίο με σύνορο $\partial\Omega = \gamma$, όπου γ θετικά προσανατολισμένη απλή κλειστή τμηματικά λεία καμπύλη και $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ συναρτήσεις κλάσης C^2 , όπου $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό με $\bar{\Omega} \subseteq U$. Αποδείξτε τον τύπο του Green

$$\iint_{\Omega} f \Delta g + \iint_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g = \int_{\partial\Omega} (-f g_y dx + f g_x dy),$$

όπου $\Delta g = g_{xx} + g_{yy}$ η Λαπλασιανή της g .

Υπόδειξη: Οι $P = -f g_y$ και $Q = f g_x$ είναι κλάσης C^1 στο Ω . Από το θεώρημα Green,

$$\int_{\partial\Omega} (P dx + Q dy) = \iint_{\Omega} (Q_x - P_y) dx dy.$$

Υπολογίζουμε τις

$$\begin{aligned} Q_x &= \frac{\partial}{\partial x}(f g_x) = f_x g_x + f g_{xx}, \\ P_y &= -\frac{\partial}{\partial y}(f g_y) = -f_y g_y - f g_{yy} \end{aligned}$$

απ' όπου παίρνουμε

$$Q_x - P_y = f(g_{xx} + g_{yy}) + f_x g_x + f_y g_y = f \Delta g + \nabla f \cdot \nabla g.$$

Έπεται ότι

$$\iint_{\Omega} f \Delta g + \iint_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g = \iint_{\Omega} (Q_x - P_y) dx dy = \int_{\partial\Omega} (P dx + Q dy) = \int_{\partial\Omega} (-f g_y dx + f g_x dy).$$

□

Άσκηση 7. Να υπολογίσετε το $J = \int_{\gamma} x e^{-y^2} dx + \left(-x^2 y e^{-y^2} + \frac{1}{x^2 + y^2} \right) dy$, όπου γ ο θετικά προσανατολισμένος κύκλος $x^2 + y^2 = 1$.

Υπόδειξη: Θέτουμε $P = xe^{-y^2}$ και $Q = -x^2ye^{-y^2}$. Τότε,

$$J = \int_{\gamma} (P dx + Q dy) + \int_{\gamma} \frac{1}{x^2 + y^2} dy.$$

Οι P και Q είναι κλάσης C^1 στο (απλά συνεκτικό) $\mathbb{R}^2$ και

$$P_y = -2xye^{-y^2} = Q_x,$$

δηλαδή το $\vec{F} = (P, Q)$ είναι συντηρητικό. Η $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ είναι κλειστή, συνεπώς $\int_{\gamma} (P dx + Q dy) = 0$. Τέλος,

$$\int_{\gamma} \frac{1}{x^2 + y^2} dy = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1} \cos t dt = \sin t \Big|_0^{2\pi} = 0,$$

οπότε, τελικά, $J = 0$. □

Άσκηση 8. Έστω $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ και $P, Q : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$P(x, y) = y \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad Q(x, y) = x \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad (x, y) \in \Omega.$$

Να δείξετε ότι το $\vec{F}$ είναι συντηρητικό στο Ω και να βρείτε μια συνάρτηση δυναμικού για το $\vec{F}$.

Υπόδειξη: Επειδή το Ω δεν είναι απλά συνεκτικό, η σχέση $P_y = Q_x$ (η οποία εδώ ισχύει) δεν εξασφαλίζει ότι το $\vec{F}$ είναι συντηρητικό. Θα πρέπει απ' ευθείας να προσδιορίσουμε μια συνάρτηση δυναμικού $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Μια «υποψήφια» τέτοια f ικανοποιεί τη σχέση

$$f(x_0, y_0) = \int_{\gamma_1} \vec{F} + \int_{\gamma_2} \vec{F}, \quad (x_0, y_0) \in \Omega, \quad x_0 \neq 0,$$

όπου γ_1^* είναι το ευθύγραμμο τμήμα από το $(1, 0)$ στο $(x_0, 0)$ και γ_2^* είναι το ευθύγραμμο τμήμα από το $(x_0, 0)$ στο (x_0, y_0) (στην περίπτωση που $x_0 > 0$). Έχουμε

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} = \int_{\gamma_1} (P dx + Q dy) = \int_1^{x_0} P(x, 0) dx = \int_1^{x_0} 0 dx = 0$$

και (κάνοντας την αντικατάσταση $y = x_0 u$)

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} \vec{F} &= \int_{\gamma_2} (P dx + Q dy) = \int_0^{y_0} Q(x_0, y) dy = x_0 \int_0^{y_0} \frac{x_0^2 - y^2}{(x_0^2 + y^2)^2} dy \\ &= x_0 \int_0^{y_0/x_0} \frac{x_0^2(1 - u^2)}{x_0^4(1 + u^2)^2} x_0 du = \int_0^{y_0/x_0} \frac{1 - u^2}{(1 + u^2)^2} du. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\int \frac{u^2}{(1 + u^2)^2} du = -\frac{1}{2} \int u \left(\frac{1}{1 + u^2} \right)' du = -\frac{u}{2(1 + u^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{du}{1 + u^2},$$

άρα

$$\int \left[\frac{1}{2(1 + u^2)} - \frac{u^2}{(1 + u^2)^2} \right] du = \frac{u}{2(1 + u^2)},$$

δηλαδή

$$\int \frac{1 - u^2}{(1 + u^2)^2} du = \frac{u}{1 + u^2},$$

οπότε

$$\int_{\gamma_2} \vec{F} = \frac{u}{1+u^2} \Big|_0^{y_0/x_0} = \frac{x_0 y_0}{x_0^2 + y_0^2}.$$

Τελικά,

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} + \int_{\gamma_2} \vec{F} = \frac{x_0 y_0}{x_0^2 + y_0^2}.$$

Μαντεύουμε έτσι ότι η συνάρτηση $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, $(x, y) \in \Omega$ είναι συνάρτηση δυναμικού για το $\vec{F}$, κάτι που τώρα εύκολα επαληθεύουμε (είναι απαραίτητο!) υπολογίζοντας τις μερικές παραγώγους της f : έχουμε $f_x = P$ και $f_y = Q$ για κάθε $(x, y) \in \Omega$. $\square$

Άσκηση 9. Να υπολογίσετε το $J = \int_{\gamma} \left(-\frac{y}{9x^2 + 4y^2} dx + \frac{x}{9x^2 + 4y^2} dy \right)$, όπου γ ο θετικά προσανατολισμένος κύκλος $x^2 + y^2 = 1$.

Υπόδειξη: Θα επιλέξουμε $R > 0$ αρκετά μικρό ώστε η καμπύλη (έλλειψη) $\gamma_R : 9x^2 + 4y^2 = R^2$ να βρίσκεται στο εσωτερικό της γ . Από τον ορισμό της γ_R , για κάθε $(x, y) \in \gamma_R^*$ έχουμε $x^2 \leq R^2/9$ και $y^2 \leq R^2/4$, άρα $x^2 + y^2 \leq \frac{13}{36}R^2$. Αν λοιπόν $0 < R < \frac{6}{\sqrt{13}}$ τότε $\gamma_R^* \subset \text{int}(\gamma^*)$.

Επιλέγουμε $0 < R < 6/\sqrt{13}$ και θεωρούμε την θετικά προσανατολισμένη έλλειψη $\gamma_R : 9x^2 + 4y^2 = R^2$ (για την οποία $\gamma_R^* \subset \text{int}(\gamma^*)$). Οι συναρτήσεις

$$P = -\frac{y}{9x^2 + 4y^2}, \quad Q = \frac{x}{9x^2 + 4y^2}$$

είναι κλάσης C^1 στο χωρίο Ω που βρίσκεται μεταξύ των γ^* και γ_R^* . Επιπλέον, $P_y = Q_x$ στο Ω . Πράγματι, αν θέσουμε $g(x, y) = 9x^2 + 4y^2$ τότε $g_x = 18x$, $g_y = 8y$ και $P = -y/g$, $Q = x/g$, άρα

$$P_y = -\frac{g - yg_y}{g^2} = -\frac{9x^2 + 4y^2 - 8y^2}{g^2} = -\frac{9x^2 - 4y^2}{g^2}$$

και

$$Q_x = \frac{g - xg_x}{g^2} = \frac{9x^2 + 4y^2 - 18x^2}{g^2} = \frac{4y^2 - 9x^2}{g^2},$$

δηλαδή $P_y = Q_x$. Από την αρχή της παραμόρφωσης έχουμε ότι

$$J = \int_{\gamma} (P dx + Q dy) = \int_{\gamma_R} (P dx + Q dy).$$

Θεωρούμε την παραμέτρηση

$$x = x(t) = \frac{R}{3} \cos t, \quad y = y(t) = \frac{R}{2} \sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Τότε,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_R} (P dx + Q dy) &= \int_{\gamma_R} \left(-\frac{y}{9x^2 + 4y^2} dx + \frac{x}{9x^2 + 4y^2} dy \right) \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\frac{R}{2} \sin t \left(-\frac{R}{3} \sin t \right)}{R^2} + \frac{\frac{R}{2} \cos t \frac{R}{3} \cos t}{R^2} \right) dt \\ &= \frac{1}{6} \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$J = \int_{\gamma} (P dx + Q dy) = \int_{\gamma_R} (P dx + Q dy) = \frac{\pi}{3}.$$

$\square$

Άσκηση 10. Να υπολογίσετε το $\int_{\gamma} (P dx + Q dy)$, όπου

$$P = -3x^2 \sin(x^3)y - y^3, \quad Q = \cos(x^3) + e^y,$$

και γ η τεθλασμένη γραμμή ABC , όπου $A(0, -1)$, $B(1, 0)$ και $C(0, 1)$.

Υπόδειξη: Έχουμε $P_y = -3x^2 \sin(x^3) - 3y^2$ και $Q_x = -3x^2 \sin(x^3)$, άρα

$$Q_x - P_y = 3y^2.$$

Θεωρούμε την $\Gamma = \gamma - \eta$, όπου $\eta^* = \vec{AC}$. Η Γ είναι κλειστή, θετικά προσανατολισμένη και τμηματικά λεία. Από το θεώρημα Green παίρνουμε

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (P dx + Q dy) &= \iint_{\triangle_{ABC}} (Q_x - P_y) dx dy = \int_0^1 \left(\int_{x-1}^{1-x} 3y^2 dy \right) dx \\ &= 2 \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} 3y^2 dy \right) dx = 2 \int_0^1 y^3 \Big|_0^{1-x} dx = 2 \int_0^1 (1-x)^3 dx \\ &= -2 \int_0^1 (x-1)^3 dx = (-2) \cdot \frac{1}{4} (x-1)^4 \Big|_0^1 = -\frac{1}{2} (0-1) = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

άρα

$$\int_{\gamma} (P dx + Q dy) - \int_{\eta} (P dx + Q dy) = \frac{1}{2}.$$

Όμως, για κάθε $(x, y) \in \eta^* = \vec{AC}$ έχουμε $x = 0$ και $-1 \leq y \leq 1$, άρα

$$\int_{\eta} (P dx + Q dy) = \int_{-1}^1 Q(0, y) dy = \int_{-1}^1 (1 + e^y) dy = (1 + e) - (-1 + e^{-1}) = 2 + e - \frac{1}{e},$$

και τελικά

$$\int_{\gamma} (P dx + Q dy) = \frac{1}{2} + 2 + e - \frac{1}{e} = \frac{5}{2} + e - \frac{1}{e}.$$

□

Άσκηση 11. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου με σύνορο την καμπύλη

$$\gamma: \quad x = x(t) = 2 \cos t - \cos(2t), \quad y = y(t) = 2 \sin t - \sin(2t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Υπόδειξη: Η γ είναι κλειστή και θετικά προσανατολισμένη, διότι $\gamma(0) = (1, 0)$, $\gamma(\pi/2) = (1, 2)$, $\gamma(\pi) = (-3, 0)$, $\gamma(2\pi) = (1, 0)$, οπότε $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$ και το $(1, 0)$ προηγείται του $(1, 2)$, το $(1, 2)$ προηγείται του $(-3, 0)$.

Γράφουμε

$$E = \frac{1}{2} \int_{\gamma} (-y dx + x dy) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [x(t)y'(t) - y(t)x'(t)] dt.$$

Έχουμε $x(t) = 2 \cos t - \cos(2t)$ και $y(t) = 2 \sin t - \sin(2t)$, άρα $x'(t) = -2 \sin t + 2 \sin(2t)$ και $y'(t) = 2 \cos t - 2 \cos(2t)$. Υπολογίζουμε τα

$$x(t)y'(t) = 4 \cos^2 t - 6 \cos(2t) \cos t + 2 \cos^2(2t)$$

και

$$x'(t)y(t) = -4 \sin^2 t + 6 \sin(2t) \sin t - 2 \sin^2(2t),$$

οπότε

$$x(t)y'(t) - x'(t)y(t) = 6 - 6 \cos t.$$

Έτσι, τελικά παίρνουμε

$$E = \frac{1}{2} \cdot 6 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) dt = 3 \left(2\pi - \int_0^{2\pi} \cos t dt \right) = 6\pi.$$

□