ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
(Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών - Διανυσματική Ανάλυση)
8ο Φυλλάδιο Ασκήσεων (2025-26)

Άσκηση 1. Έστω $\vec{F} = (P, Q, R) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με

$$P = yz^2 \cos(xy) + 2xy, \quad Q = xz^2 \cos(xy) + x^2 + z, \quad R = 2z \sin(xy) + y + 2z.$$

(α) Να δείξετε ότι το $\vec{F}$ είναι συντηρητικό.

(β) Να βρείτε μια συνάρτηση δυναμικού για το $\vec{F}$.

(γ) Να υπολογίσετε το $\displaystyle\int_{\vec{K\Lambda}} \vec{F}$, όπου $K(1,1,0)$ και $\Lambda(1,2,1)$.

Άσκηση 2. Να δείξετε ότι το $\vec{F} = (e^x \cos y + yz, xz - e^x \sin y, xy + z)$ είναι συντηρητικό και να βρείτε μια συνάρτηση δυναμικού.

Άσκηση 3. Να υπολογίσετε τα:

(α) $J_1 = \displaystyle\int_\gamma zy^2 dx + x^2 z^2 dy + xz\, dz$, όπου γ η θετικά προσανατολισμένη περιφέρεια $\gamma(t) = (2\cos t, 2\sin t, 6)$, $t \in [0, 2\pi]$.

(β) $J_2 = \displaystyle\int_\gamma (2x + e^y + y)dx + (xe^y + 3x - y^3)dy$, όπου $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

(γ) $J_3 = \displaystyle\int_\gamma (P\, dx + Q\, dy)$, όπου $P = 2x^4 + y^2 + e^x$, $Q = 3x - y^3 - e^{y^2}$, και $\gamma(t) = (-1 + \sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Άσκηση 4. Να υπολογίσετε το $J = \displaystyle\int_\gamma \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}\, dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy \right)$, όπου γ^* το θετικά προσανατολισμένο σύνορο του τριγώνου ABC, όπου $A(0,3)$, $B(-1,-1)$, $C(1,-2)$.

Άσκηση 5. Έστω $\Omega = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$, $u, v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ συνεχείς, κλάσης C^1 στο Ω, με $u(x,y) = 1$ και $v(x,y) = y$ για κάθε $(x,y) \in \partial\Omega$. Θέτουμε $\vec{F} = (v, u)$ και $\vec{G} = (u_x - u_y, v_x - v_y)$. Να υπολογίσετε το

$$\iint_\Omega \vec{F}(x,y) \cdot \vec{G}(x,y)\, dx\, dy.$$

Άσκηση 6. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ απλά συνεκτικό φραγμένο χωρίο με σύνορο $\partial\Omega = \gamma$, όπου γ θετικά προσανατολισμένη απλή κλειστή τμηματικά λεία καμπύλη και $f, g : U \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις κλάσης C^2, όπου $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό με $\overline{\Omega} \subseteq U$. Αποδείξτε τον τύπο του Green

$$\iint_\Omega f \Delta g + \iint_\Omega \nabla f \cdot \nabla g = \int_{\partial\Omega} (-f g_y dx + f g_x dy),$$

όπου $\Delta g = g_{xx} + g_{yy}$ η Λαπλασιανή της g.

Άσκηση 7. Να υπολογίσετε το $J = \displaystyle\int_\gamma xe^{-y^2} dx + \left(-x^2 y e^{-y^2} + \frac{1}{x^2 + y^2} \right) dy$, όπου γ ο θετικά προσανατολισμένος κύκλος $x^2 + y^2 = 1$.

Άσκηση 8. Έστω $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ και $P, Q : \Omega \to \mathbb{R}$ με

$$P(x,y) = y\frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}, \qquad Q(x,y) = x\frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}, \qquad (x,y) \in \Omega.$$

Να δείξετε ότι το $\vec{F}$ είναι συντηρητικό στο Ω και να βρείτε μια συνάρτηση δυναμικού για το $\vec{F}$.

Άσκηση 9. Να υπολογίσετε το $J = \displaystyle\int_\gamma \left(-\frac{y}{9x^2+4y^2}dx + \frac{x}{9x^2+4y^2}dy\right)$, όπου γ ο θετικά προσανατολισμένος κύκλος $x^2+y^2=1$.

Άσκηση 10. Να υπολογίσετε το $\displaystyle\int_\gamma (P\,dx + Q\,dy)$, όπου

$$P = -3x^2\sin(x^3)y - y^3, \quad Q = \cos(x^3) + e^y,$$

και γ η τεθλασμένη γραμμή ABC, όπου $A(0,-1)$, $B(1,0)$ και $C(0,1)$.

Άσκηση 11. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου με σύνορο την καμπύλη

$$\gamma: \quad x = x(t) = 2\cos t - \cos(2t), \quad y = y(t) = 2\sin t - \sin(2t), \quad t \in [0, 2\pi].$$