ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
(Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών - Διανυσματική Ανάλυση)
7ο Φυλλάδιο Ασκήσεων (2025-26)

Άσκηση 1. Βρείτε το στερεό K πάνω στο οποίο γίνεται η ολοκλήρωση

$$\int_0^4 \left(\int_0^{2-\frac{1}{4}z} \left(\int_0^{1-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z} f(x,y,z)\, dx \right) dy \right) dz$$

και στην συνέχεια αλλάξτε τη σειρά ολοκλήρωσης σε $dz\, dy\, dx$.

Άσκηση 2. Έστω K το μικρότερο από τα δύο μέρη που χωρίζει το επίπεδο $z = 2$ τη σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ (*σφαιρικό καπάκι*). Να εκφράσετε το ολοκλήρωμα $I = \iiint_K f(x,y,z) dxdydz$ με όλους τους πιθανούς τρόπους διαδοχικής σειράς ολοκλήρωσης. Στην συνέχεια να υπολογίσετε τον όγκο του K.

Άσκηση 3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I = \iiint_K \frac{1}{x^2 + y^2 + (z-2)^2}\, dx\, dy\, dz,$$

όπου $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

Άσκηση 4. Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού K που φράσσεται από πάνω από τον κώνο $z^2 = x^2 + y^2$ και από κάτω από το παραβολοειδές $z = x^2 + y^2$

Άσκηση 5. Έστω K το χωρίο του 1ου ογδοημορίου που φράσσεται από τα επίπεδα $x + y - z + 1 = 0$ και $x + y = a$ όπου $a > 0$. Να προσδιορίσετε το a ώστε ο όγκος του στερεού να ισούται με $5/6$.

Άσκηση 6. Το επίπεδο $x = c$ για $c > 0$ χωρίζει το τετράεδρο με γωνίες $(1,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,0,3)$ και $(0,0,0)$ σε δύο χωρία K_1 και K_2. Να προσδιορίσετε την παράμετρο c ώστε τα K_1 και K_2 να έχουν τον ίδιο όγκο

Άσκηση 7. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού K στο 1ο ογδοημόριο που φράσσεται από τις επιφάνειες $xy = 1$, $xy = 2$, $xz = 1$, $xz = 3$, $y + z = 0$ και $y + z = 2$.

[*Υπόδειξη:* Εφαρμόστε κατάλληλη αλλαγή μεταβλητών.]

Άσκηση 8. Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $u = x + y + z$, $uv = y + z$, $uvw = z$ υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iiint_K (x + y + z)^n xyz\, dx\, dy\, dz$ όπου K είναι το τετράεδρο που φράσσεται από τις επιφάνειες $x = y = z = 0$ και $x + y + z = 1$.

Άσκηση 9. Δίνεται η λεία παραμετρική καμπύλη $\mathbf{r}(t)$, $t \in [a,b]$ και ένα διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$ τέτοιο ώστε για όλα τα $t \in [a,b]$,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \lambda(t)\ \mathbf{r}'(t)$$

όπου λ συνεχής θετική συνάρτηση (δηλαδή σε κάθε σημείο της καμπύλης το πεδίο είναι παράλληλο προς την εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο αυτό). Να δειχθεί ότι

$$\int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}} \|\mathbf{F}\|\, ds$$

Άσκηση 10. Έστω C η καμπύλη που σχηματίζεται από την τομή των επιφανειών $z = 2 - x^2 - 2y^2$ (ελλειπτικό παραβολοειδές) και $z = x^2$ (παραβολικός κύλινδρος) στο πρώτο ογδοημόηρο (δηλαδή για $x, y, z \geq 0$). Βρείτε την μάζα ενός καλωδίου πυκνότητας $\delta(x,y,z) = xy$, κατά μήκος του τόξου της καμπύλης C με άκρα τα σημεία $(0,1,0)$ και $(1,0,1)$

Άσκηση 11. Δίνεται η παραμετρική καμπύλη

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) = \left(\cos^3 t, \sin^3 t\right), \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

(το ίχνος της καμπύλης αυτής είναι το τμήμα της αστροειδούς καμπύλης

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^{2/3} + y^{2/3} = 1\}$$

που περιέχεται στο 1ο τεταρτημόριο)

(α) Υπολογίστε το μήκος $L(\mathbf{r})$ της παραμετρικής καμπύλης.

(β) Έστω το πεδίο

$$\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = \left(\frac{-y^2}{x^{5/3} + y^{5/3}}, \frac{x^2}{x^{5/3} + y^{5/3}}\right), \ (x, y) \neq (0, 0)$$

Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot \ d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}} P(x, y) \ dx + Q(x, y) \ dy = \int_{\mathbf{r}} \frac{x^2 dy - y^2 dx}{x^{5/3} + y^{5/3}}$$

Άσκηση 12. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής και θετική συνάρτηση και έστω S το χωρίο του $\mathbb{R}^2$ κάτω από το γράφημα της f δηλαδή $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \ 0 \leq y \leq f(x)\}$. Έστω επίσης η παραμετρική καμπύλη

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) = (t, f(t)), \ t \in [a, b]$$

(οπότε το ίχνος της παραμετρικής καμπύλης $\mathbf{r}$ είναι η γραφική παράσταση της f). Τέλος έστω $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ το πεδίο

$$\mathbf{F}(x, y) = (y, 0)$$

Να αποδειχθεί ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β′ είδους $\displaystyle\int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ είναι ίσο με το εμβαδόν $E(S)$ του S.

Άσκηση 13. Θεωρούμε την καμπύλη $\mathbf{r}$ με ίχνος C την ένωση του ευθύγραμμου τμήματος $\overline{AO}$ με $O = (0, 0)$ και $A = (-2, 2\sqrt{3})$ και την παραβολή $x^2 = 2y$ από το O ως το $B = (k, \frac{k^2}{2})$ για $k \geqslant 0$. Θεωρώντας συνάρτηση πυκνότητας $\rho(x, y) = 1$, να υπολογίσετε το k ώστε το κέντρο μάζας της C να ανήκει στον άξονα y.
[*Υπόδειξη:* Το κέντρο μάζας (x^*, y^*) ενός λεπτού σύρματος πυκνότητας $\rho(x, y)$ και μάζας m το οποίο έχει τη μορφή μίας καμπύλης $\mathbf{r}$ δίνεται από την

$$x^* = \frac{1}{m} \int_{\mathbf{r}} x\rho(x, y) ds \ , \ y^* = \frac{1}{m} \int_{\mathbf{r}} y\rho(x, y) ds \ , \ m = \int_{\mathbf{r}} \rho(x, y) ds$$

(αντίστοιχα για τις 3 μεταβλητές)].

Άσκηση 14. Δίνεται το διανυσματικό πεδίο δυνάμεων $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με

$$\mathbf{F}(x, y) = (x^2 - xy, y^2 - x^2)$$

Να υπολογίσετε την παράμετρο $\kappa \neq 0$ ώστε το έργο που παράγεται από το πεδίο $\mathbf{F}$ κατά τη μετατόπιση ενός σωματιδίου κατά μήκος της παραβολής $y^2 = 2\kappa x$ από το $O = (0, 0)$ στο $P = (\kappa/2, \kappa)$ να είναι ίσο με $9/5$.

Άσκηση 15. Να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα α′ είδους $\int_{\mathbf{r}} f ds$ με $f(x, y, z) = (x + yz)/(x^2 + y^2 + z^2)$ για $x, y, z \neq 0$ και $\mathbf{r}$ το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα σημεία $(1, 1, 1)$ και (a, a, a) με $a \neq 1$ και $a > 0$. Να περιγράψετε τι συμβαίνει όταν $a \to 0$ και όταν $a \to \infty$.