



Προγραμματιστικές Τεχνικές

Γράφοι: το πρόβλημα της εξερεύνησης

Εξερεύνηση κατά Πλάτος (BFS) και κατά Βάθος (DFS)

Εφαρμογές: συντομότερες διαδρομές, τοπολογική διάταξη

Διδάσκοντες

Νίκος Παπασπύρου

Βασίλης Βεσκούκης

Νίκος Λεονάρδος

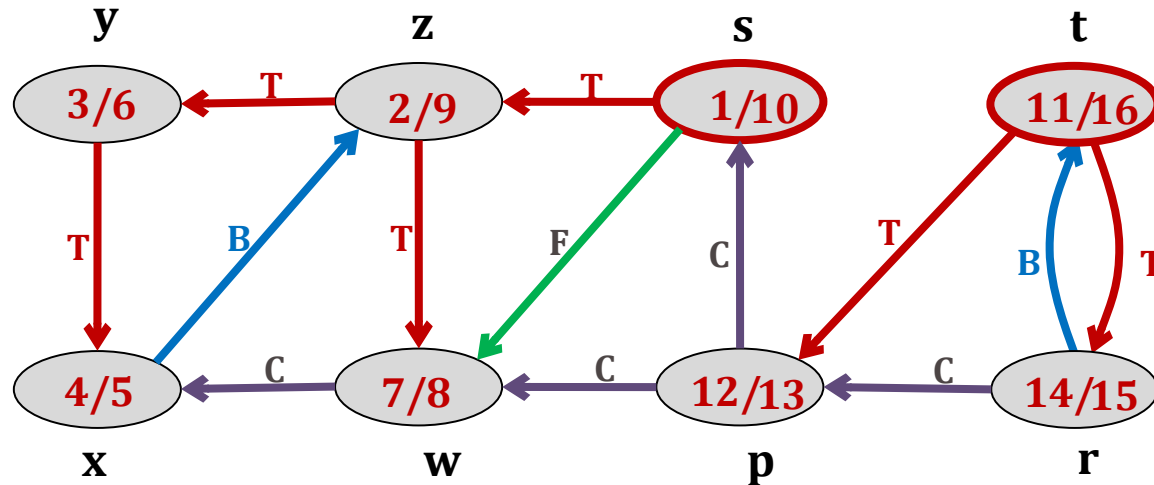
Σωτήρης Κοκόσης

Πέτρος Ποτίκας

Γιώργος Σιόλας

progtech@cslab.ece.ntua.gr

Εφαρμογές DFS: εντοπισμός κύκλων



Τύπος ακμής (u,v)

T & F: $a(u) < a(v) < t(v) < t(u)$

B: $a(v) < a(u) < t(u) < t(v)$

C: $a(v) < t(v) < a(u) < t(u)$

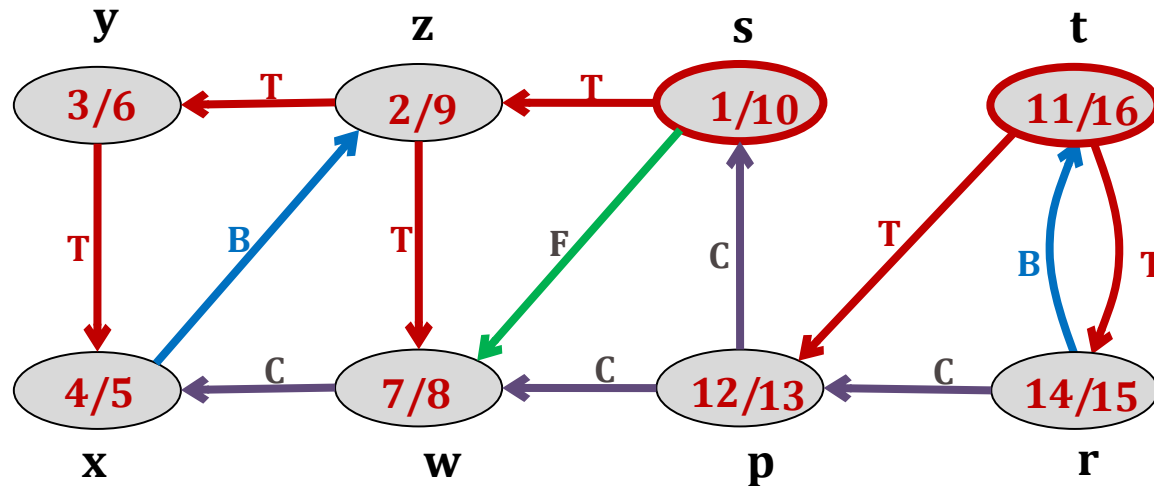
Μη κατευθ/νοι

γράφοι:

μόνο **T** και **B**

Εφαρμογές DFS: εντοπισμός κύκλων

- **Αναγκαία και ικανή συνθήκη** για ύπαρξη κύκλου σε γράφο $G=(V, E)$: η εξερεύνηση DFS βρίσκει **back edges**.



Τύπος ακμής (u, v)

T & F: $a(u) < a(v) < t(v) < t(u)$

B: $a(v) < a(u) < t(u) < t(v)$

C: $a(v) < t(v) < a(u) < t(u)$

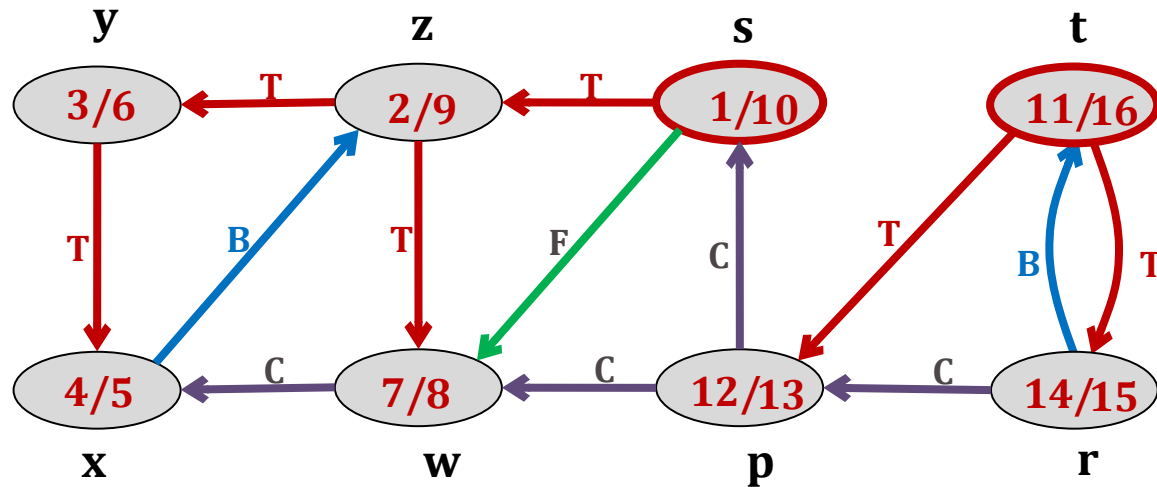
Μη κατευθ/νοι

γράφοι:

μόνο **T** και **B**

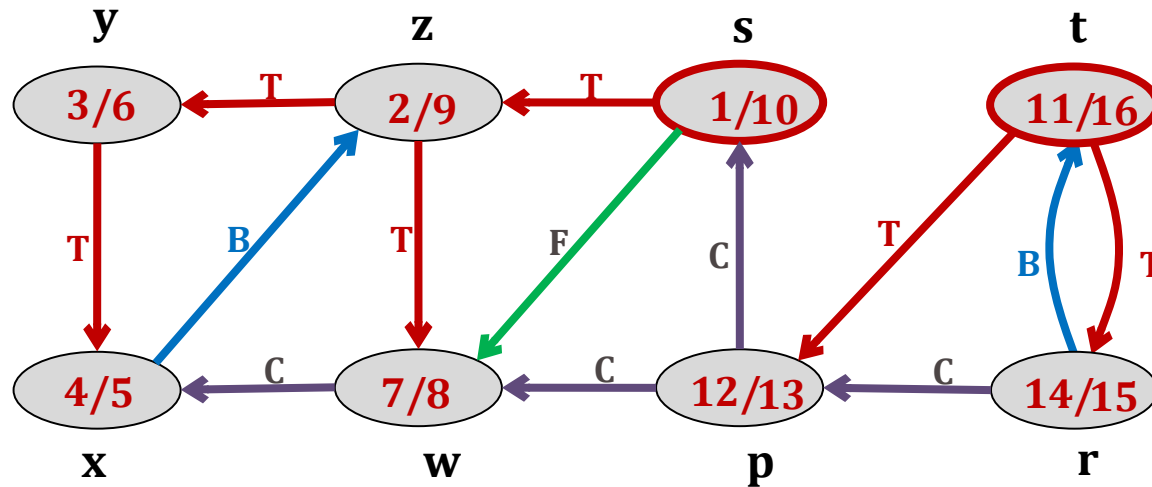
Εφαρμογές DFS: εντοπισμός κύκλων

- **Αναγκαία και ικανή συνθήκη** για ύπαρξη κύκλου σε γράφο $G=(V, E)$: η εξερεύνηση DFS βρίσκει **back edges**.



Εφαρμογές DFS: εντοπισμός κύκλων

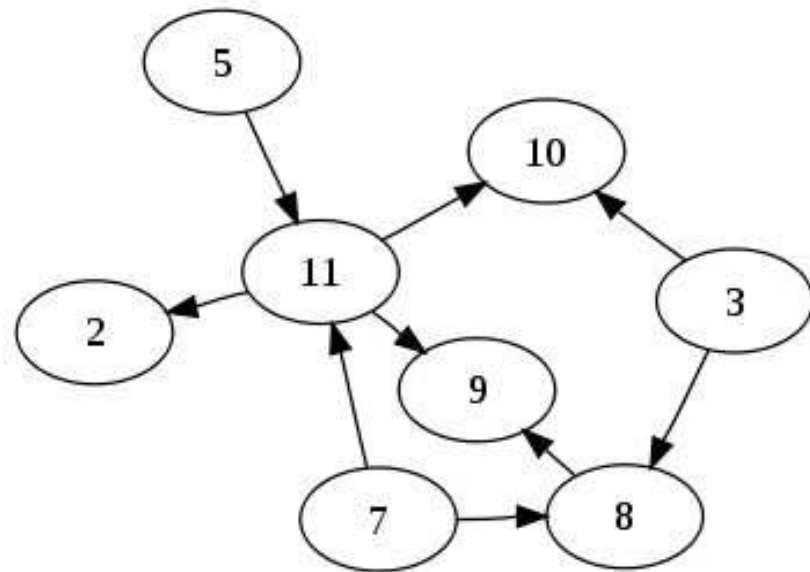
- **Αναγκαία και ικανή συνθήκη** για ύπαρξη κύκλου σε γράφο $G=(V, E)$: η εξερεύνηση DFS βρίσκει **back edges**.



- **Ικανή** : εύκολο!
- **Αναγκαία** : έστω κύκλος C και u ο πρώτος κόμβος του C που θα επισκεφθεί η DFS. Σκεφτείτε τι θα κάνει η DFS κατά την εξερεύνηση του u.

Εφαρμογές DFS: Τοπολογική Ταξινόμηση

- Μη-κυκλικό Κατευθυνόμενο Γράφημα (DAG) ονομάζεται το γράφημα $G=(V, E)$ το οποίο δεν έχει κατευθυνόμενους κύκλους.



Εφαρμογές DFS: Τοπολογική Ταξινόμηση

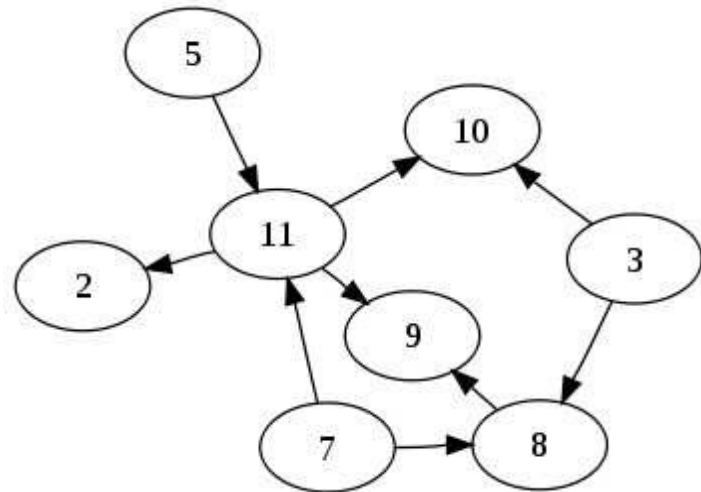


Μια **Τοπολογική Ταξινόμηση** ενός DAG $G=(V, E)$ είναι μια ακολουθία $TS=(u_1, u_2, \dots, u_n)$ των κόμβων του $V(G)$ τέτοια ώστε:

$\forall u_i, u_j \in V(G)$ εάν $\langle u_i, u_j \rangle \in E(G)$ τότε ο κόμβος u_i προηγείται του u_j στην ακολουθία **TS**

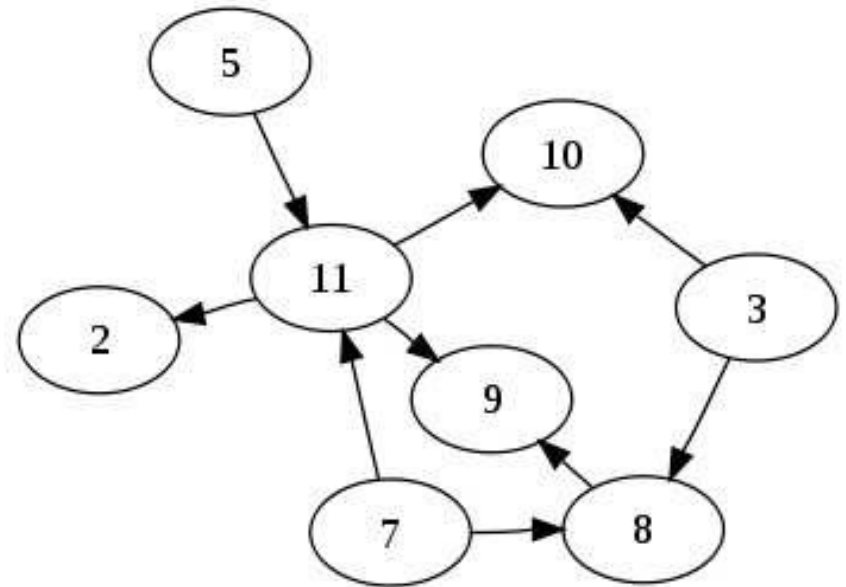
Υπολογισμός TS

- ✓ Μέθοδος **In-degree**
- ✓ Μέθοδος **DFS**



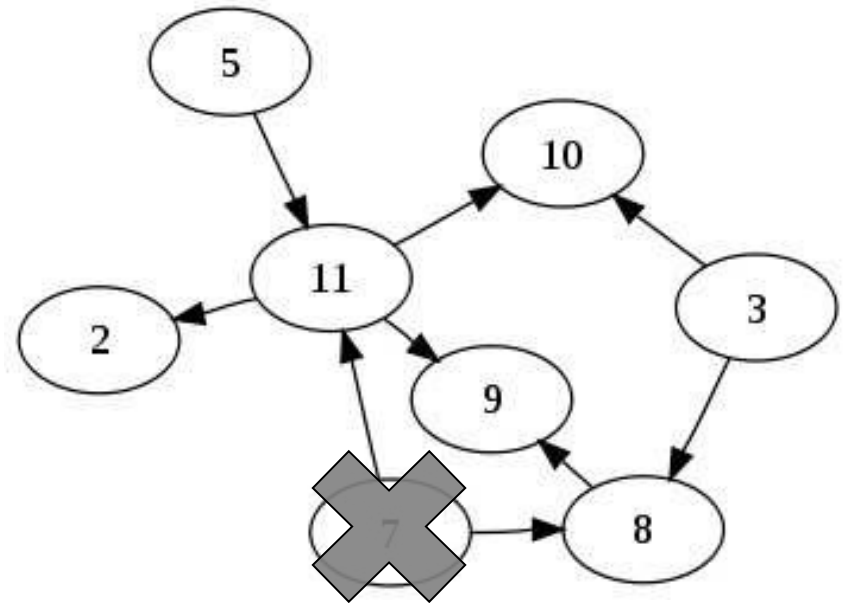
Εφαρμογές DFS: Τοπολογική Ταξινόμηση

■ Μέθοδος **In-degree**



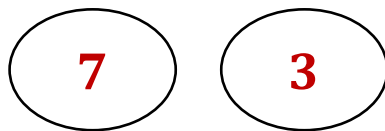
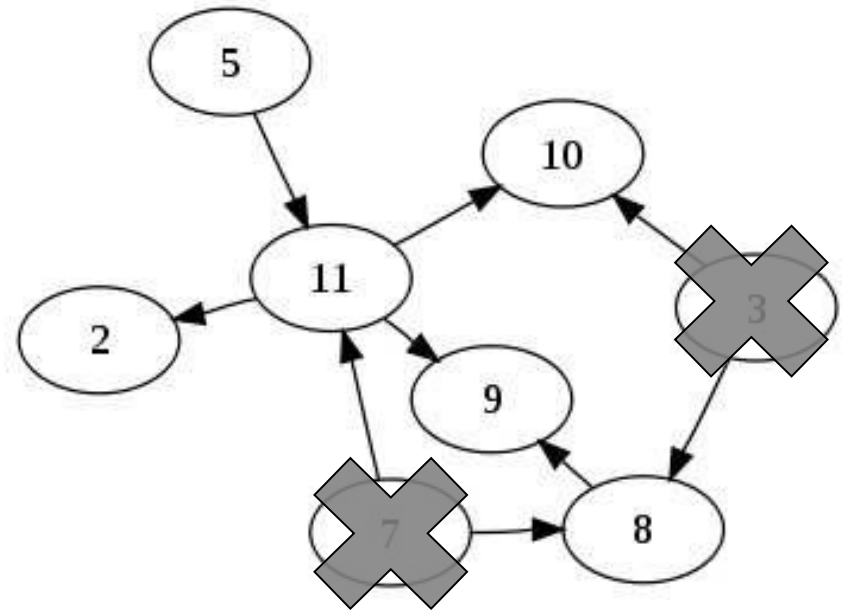
Εφαρμογές DFS: Τοπολογική Ταξινόμηση

■ Μέθοδος **In-degree**



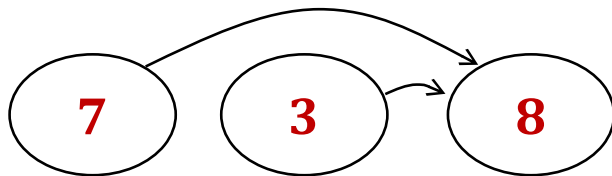
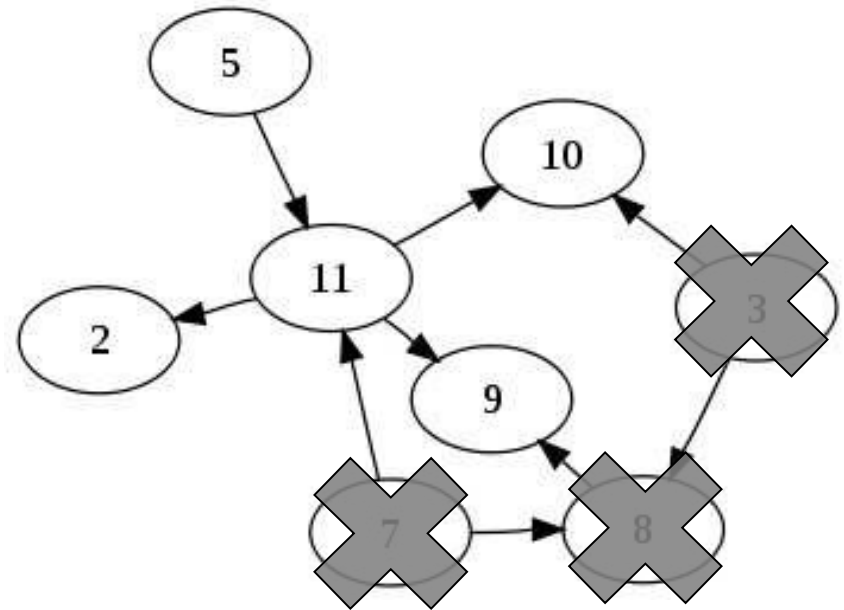
Εφαρμογές DFS: Τοπολογική Ταξινόμηση

■ Μέθοδος **In-degree**



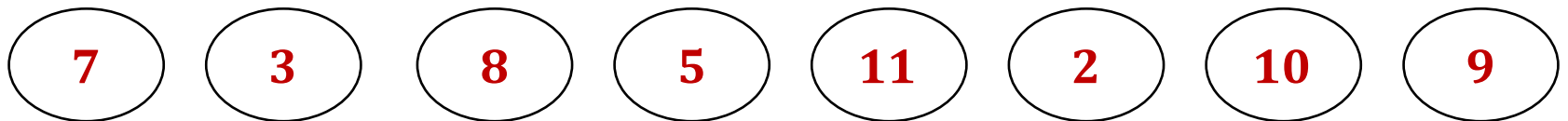
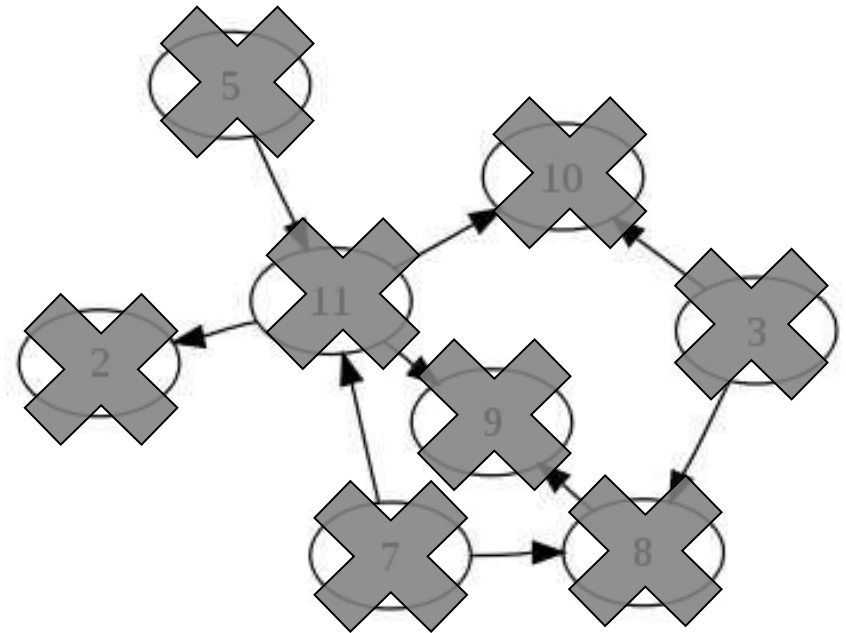
Εφαρμογές DFS: Τοπολογική Ταξινόμηση

■ Μέθοδος **In-degree**



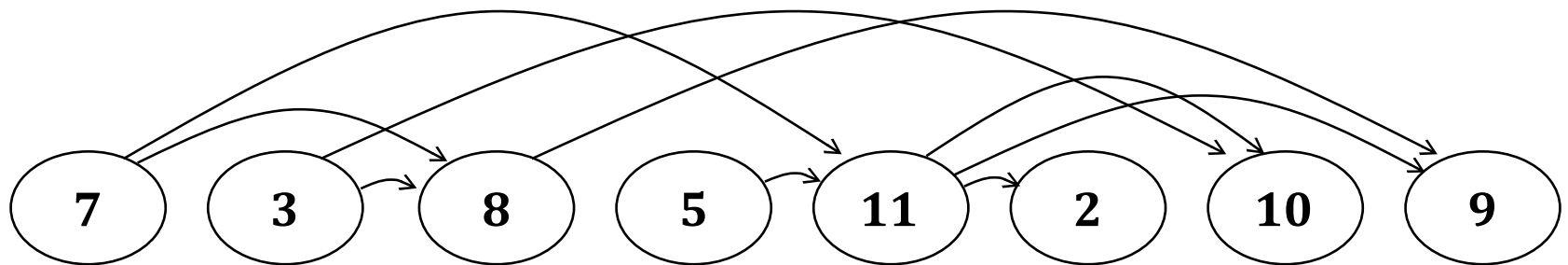
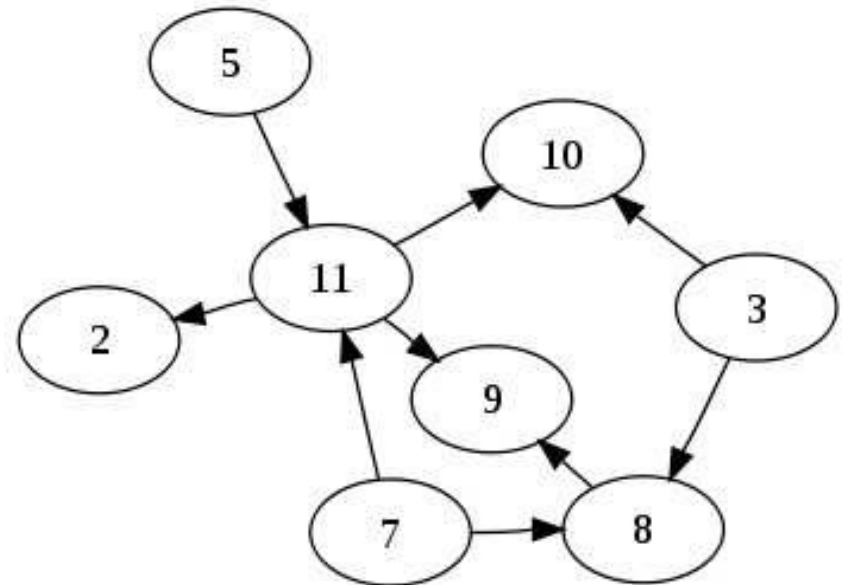
Εφαρμογές DFS: Τοπολογική Ταξινόμηση

■ Μέθοδος **In-degree**



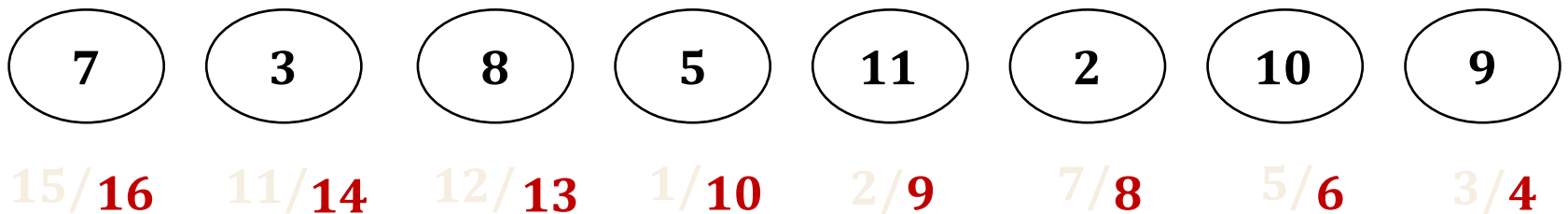
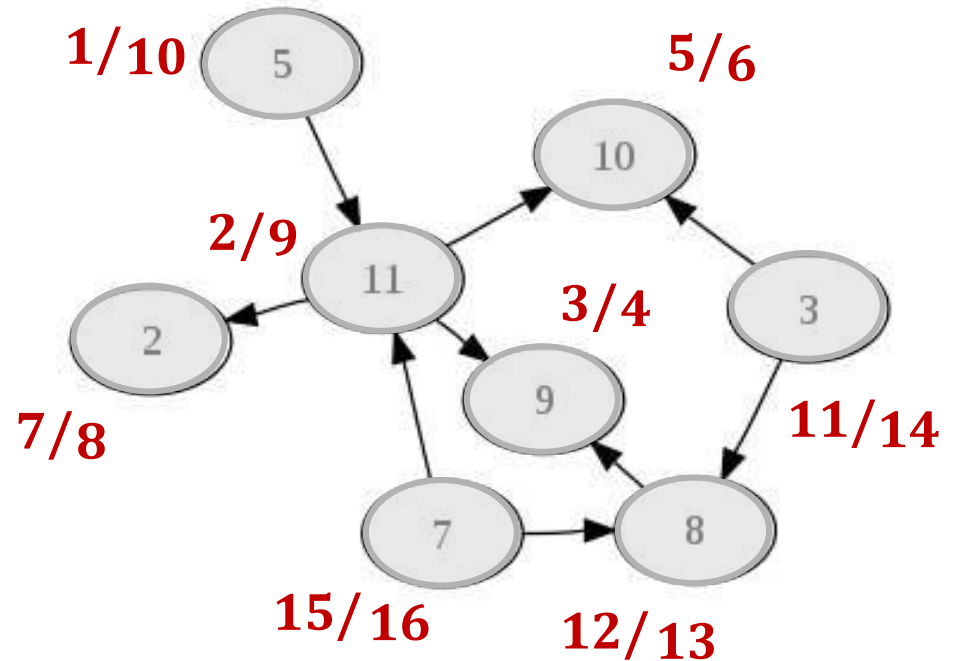
Εφαρμογές DFS: Τοπολογική Ταξινόμηση

■ Μέθοδος **In-degree**



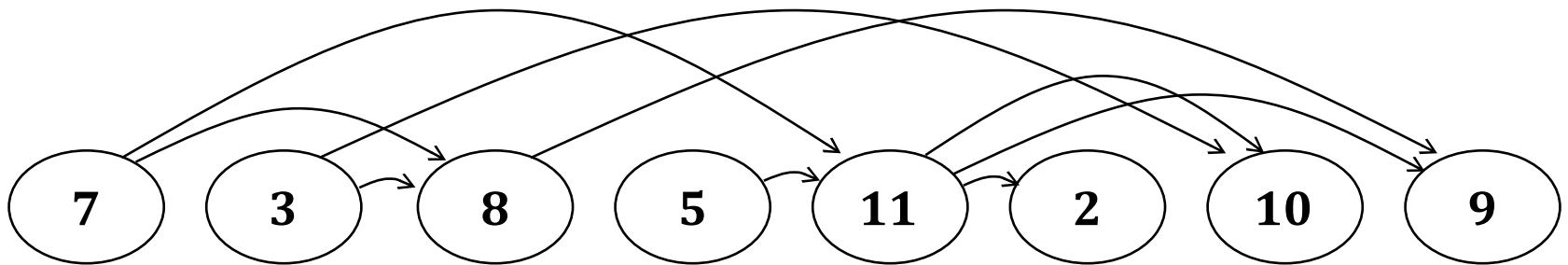
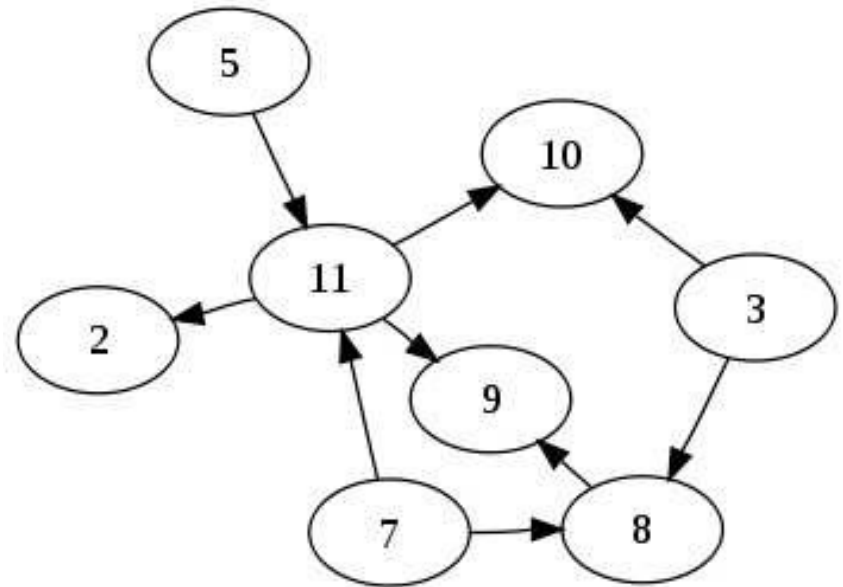
Εφαρμογές DFS: Τοπολογική Ταξινόμηση

■ Μέθοδος **DFS**



Εφαρμογές DFS: Τοπολογική Ταξινόμηση

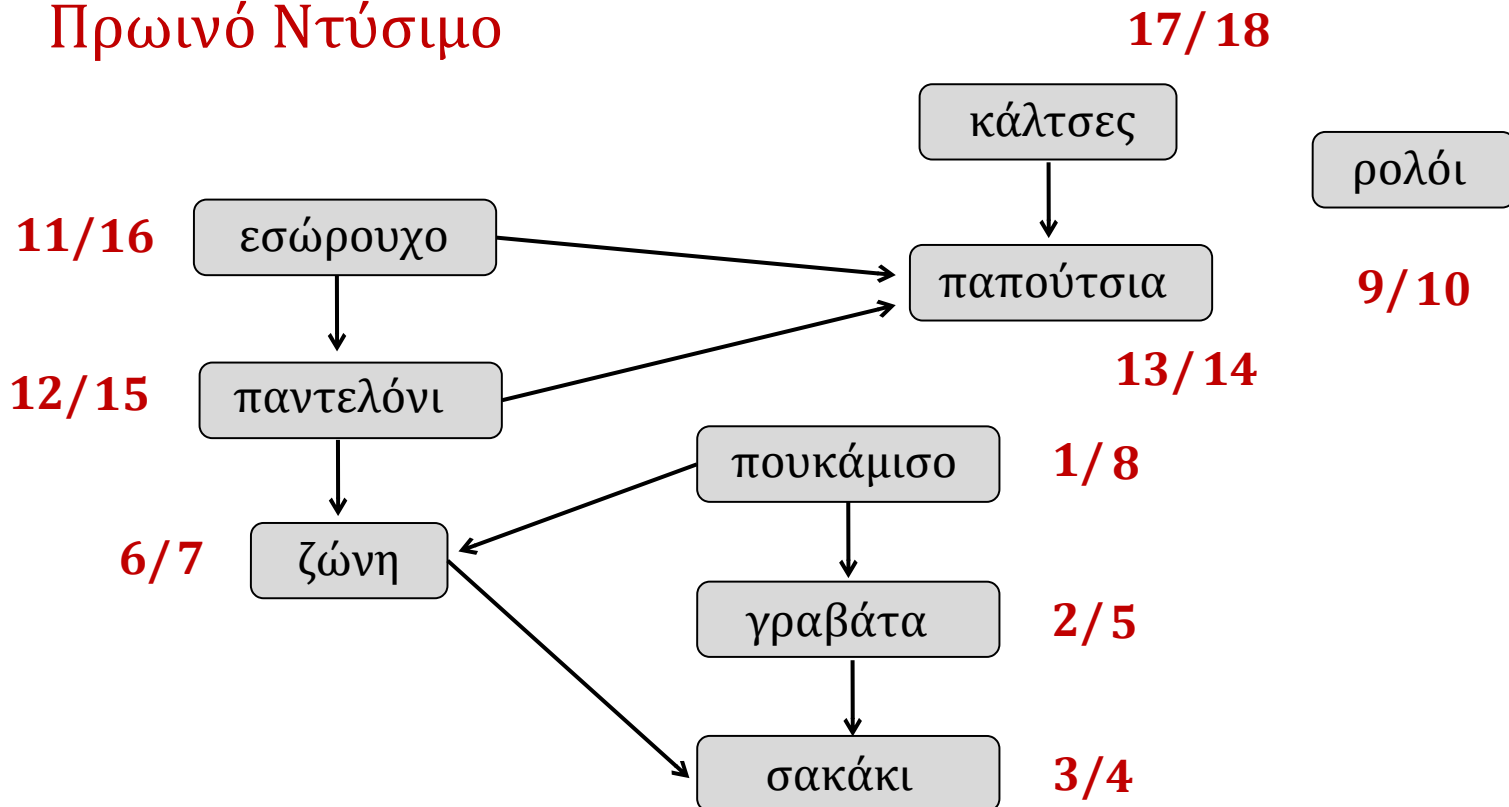
■ Μέθοδος **DFS**



Εφαρμογές Τοπολογικής Ταξινόμησης: scheduling

Ε

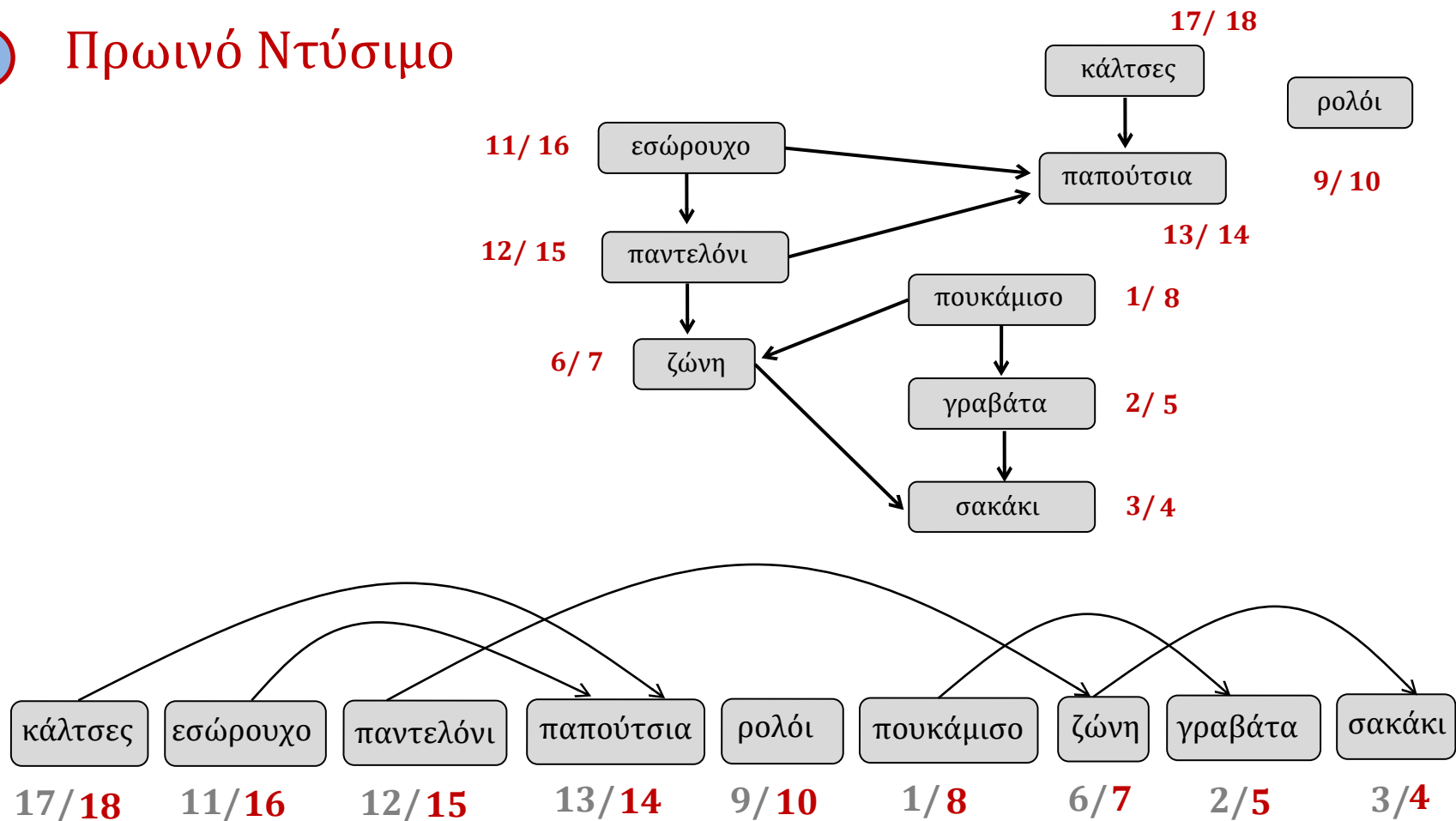
Πρωινό Ντύσιμο



Εφαρμογές TS

Ε

Πρωινό Ντύσιμο



Και λίγο παιχνίδι!

● Το Πρόβλημα του Βαρκάρη

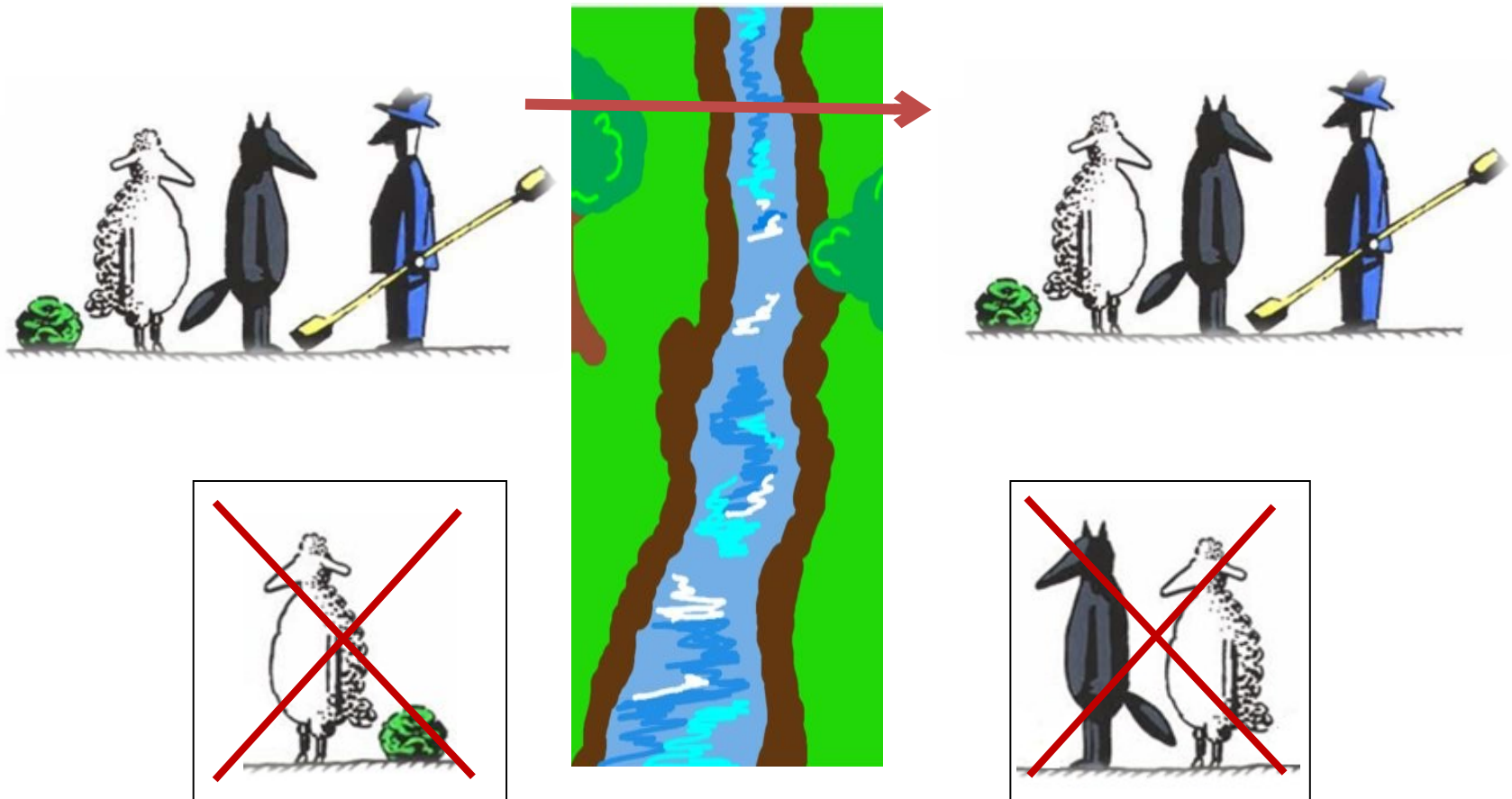
Ένας βαρκάρης θέλει να περάσει στην απέναντι όχθη ενός ποταμού έναν **Λύκο**, ένα **Πρόβατο** και ένα **Λάχανο** ή **Χορτάρι** !



Πως είναι δυνατόν ο βοσκός να τα περάσει απέναντι, έτσι ώστε να μην φάει το **πρόβατο** το **χορτάρι**, ή ο **λύκος** το **πρόβατο** ;

Το Πρόβλημα του Βαρκάρη

■ Ο Λύκος, το Πρόβατο και το Χορτάρι



Το Πρόβλημα του Βαρκάρη: μετατροπή σε εξερεύνηση

■ Επίλυση με γράφο (διάγραμμα) καταστάσεων

1	ΛΠΧ-Β		
2	ΠΧ-Β		Λ
3	ΛΧ-Β		Π
4	ΛΠ-Β		Χ
5	Π-Β		ΛΧ
6	ΛΧ		Β-Π
7	Χ		Β-ΛΠ
8	Π		Β-ΛΧ
9	Λ		Β-ΠΧ
10			Β-ΛΠΧ



Χ Π Λ - Β |

Αρχική
Κατάσταση



| Β - Λ Π Χ

Τελική
Κατάσταση

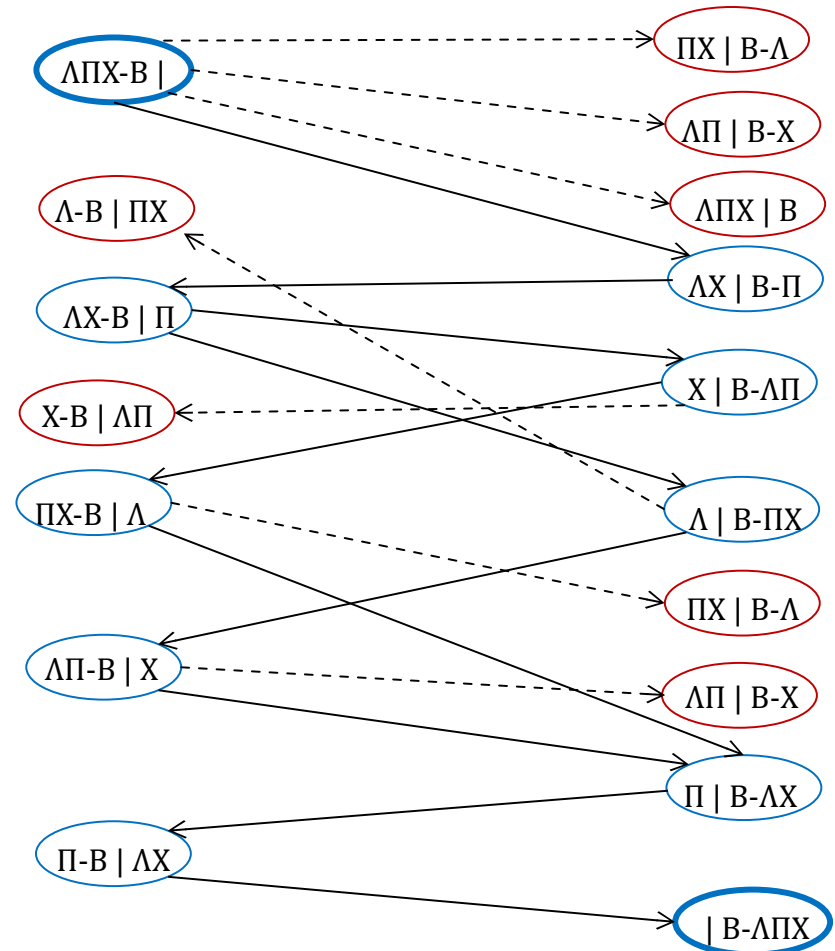
ΕΠΙΤΡΕΠΤΕΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ

Το Πρόβλημα του Βαρκάρη: μετατροπή σε εξερεύνηση

■ Πρόβλημα Βαρκάρη = Εύρεση διαδρομής σε γράφο

1	ΛΠΧ-Β	
2	ΠΧ-Β	Λ
3	ΛΧ-Β	Π
4	ΛΠ-Β	Χ
5	Π-Β	ΛΧ
6	ΛΧ	Β-Π
7	Χ	Β-ΛΠ
8	Π	Β-ΛΧ
9	Λ	Β-ΠΧ
10		Β-ΛΠΧ

ΕΠΙΤΡΕΠΤΕΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ

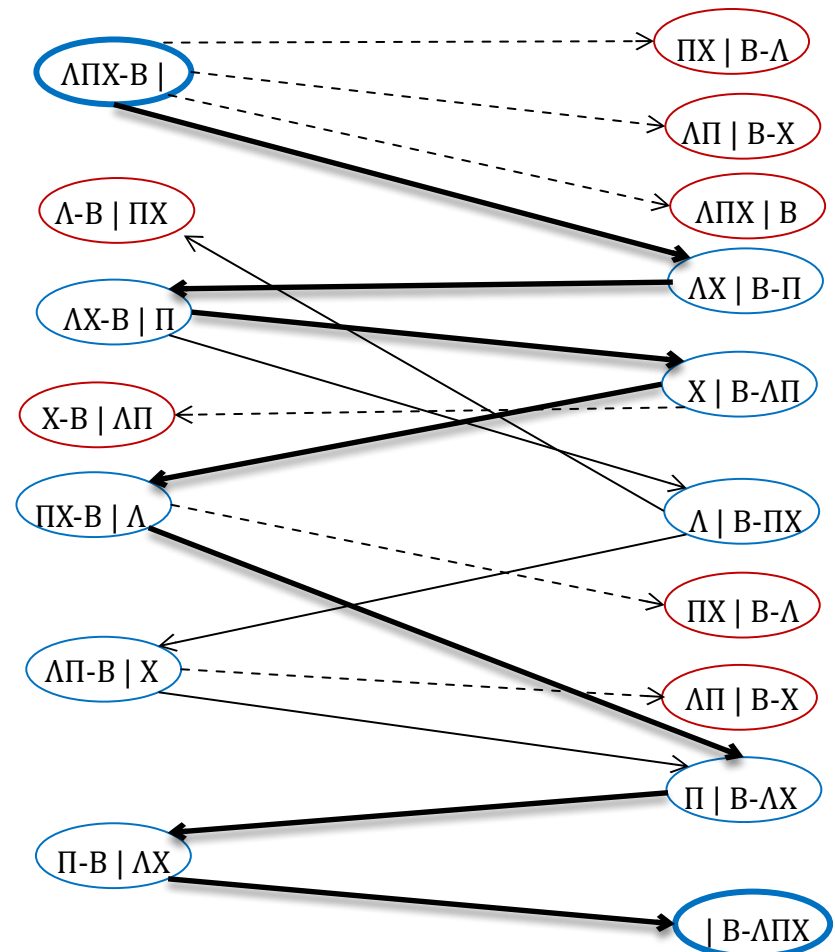


Το Πρόβλημα του Βαρκάρη : μετατροπή σε εξερεύνηση

■ Πρόβλημα Βαρκάρη = Εύρεση διαδρομής σε γράφο

1	ΛΠΧ-Β	
2	ΠΧ-Β	Λ
3	ΛΧ-Β	Π
4	ΛΠ-Β	Χ
5	Π-Β	ΛΧ
6	ΛΧ	Β-Π
7	Χ	Β-ΛΠ
8	Π	Β-ΛΧ
9	Λ	Β-ΠΧ
10		Β-ΛΠΧ

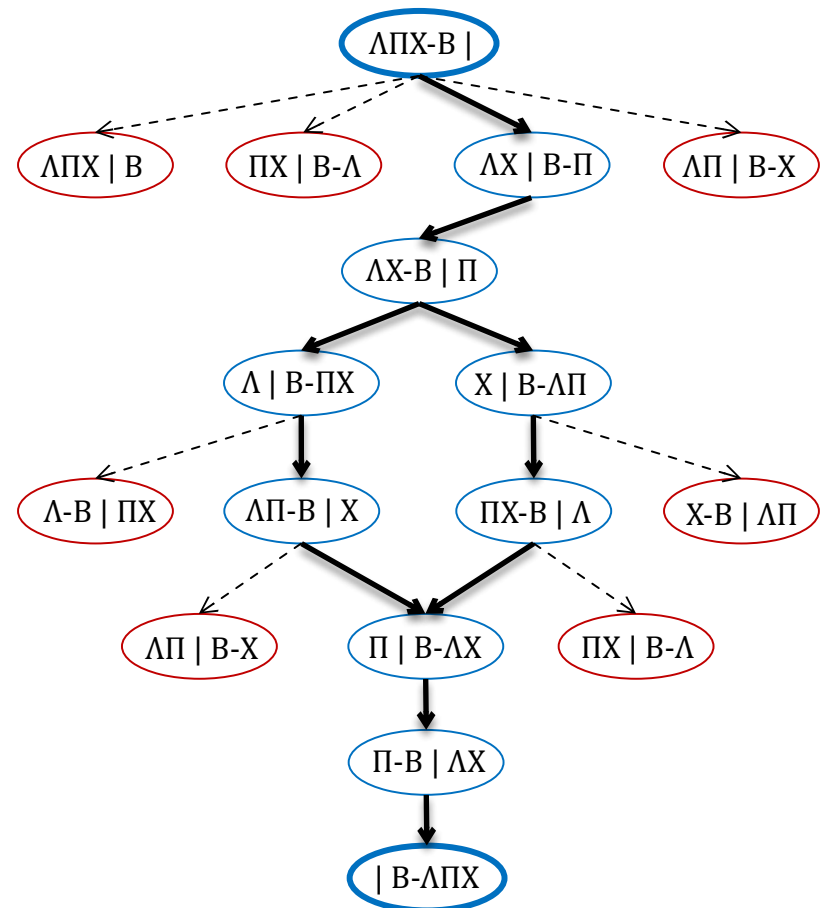
ΕΠΙΤΡΕΠΤΕΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ



Το Πρόβλημα του Βαρκάρη : μετατροπή σε εξερεύνηση

- **Πρόβλημα Βαρκάρη = Εύρεση διαδρομής σε γράφο**

1	ΛΠΧ-Β	
2	ΠΧ-Β	Λ
3	ΛΧ-Β	Π
4	ΛΠ-Β	Χ
5	Π-Β	ΛΧ
6	ΛΧ	Β-Π
7	Χ	Β-ΛΠ
8	Π	Β-ΛΧ
9	Λ	Β-ΠΧ
10		Β-ΛΠΧ

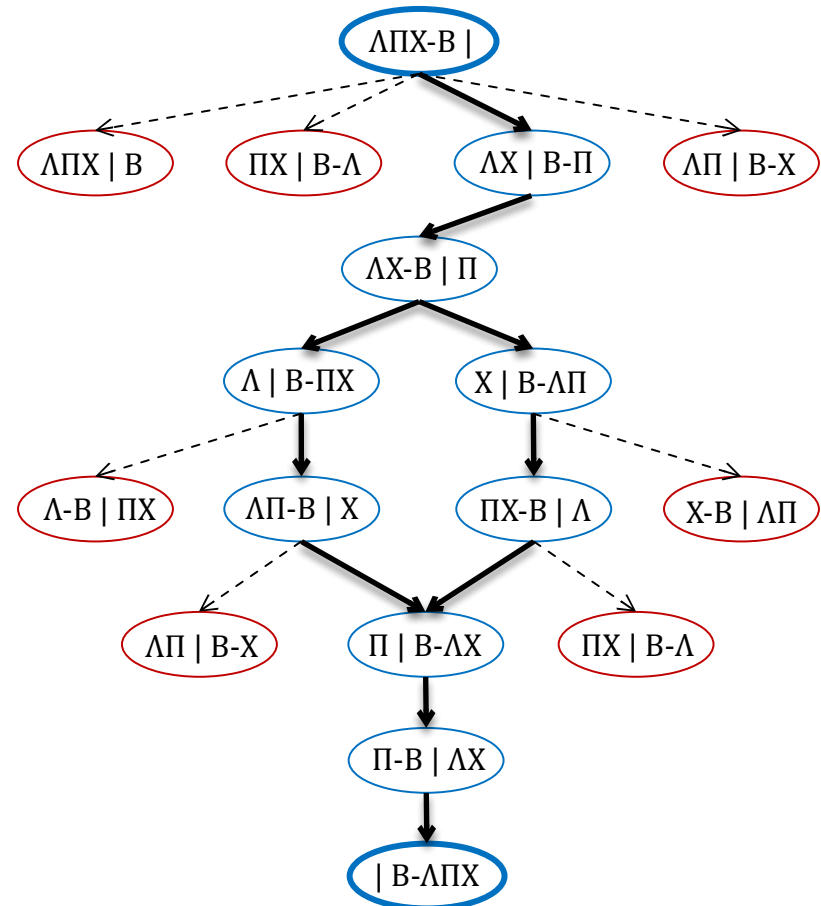


ΕΠΙΤΡΕΠΤΕΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ

Το Πρόβλημα του Βαρκάρη : μετατροπή σε εξερεύνηση

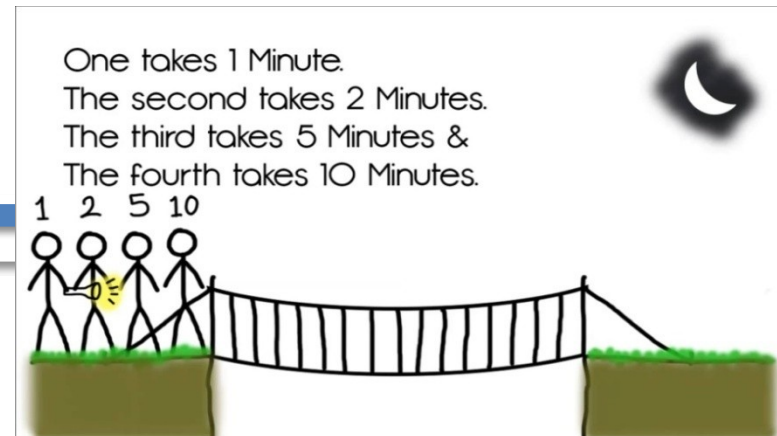
- Μπορούμε να εφαρμόσουμε και σε άλλα προβλήματα;

1	ΛΠΧ-Β	
2	ΠΧ-Β	Λ
3	ΛΧ-Β	Π
4	ΛΠ-Β	Χ
5	Π-Β	ΛΧ
6	ΛΧ	Β-Π
7	Χ	Β-ΛΠ
8	Π	Β-ΛΧ
9	Λ	Β-ΠΧ
10		Β-ΛΠΧ



ΕΠΙΤΡΕΠΤΕΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ

Το Πρόβλημα της Γέφυρας



4 φίλοι (οι **A**, **B**, **Γ**, και **Δ**)

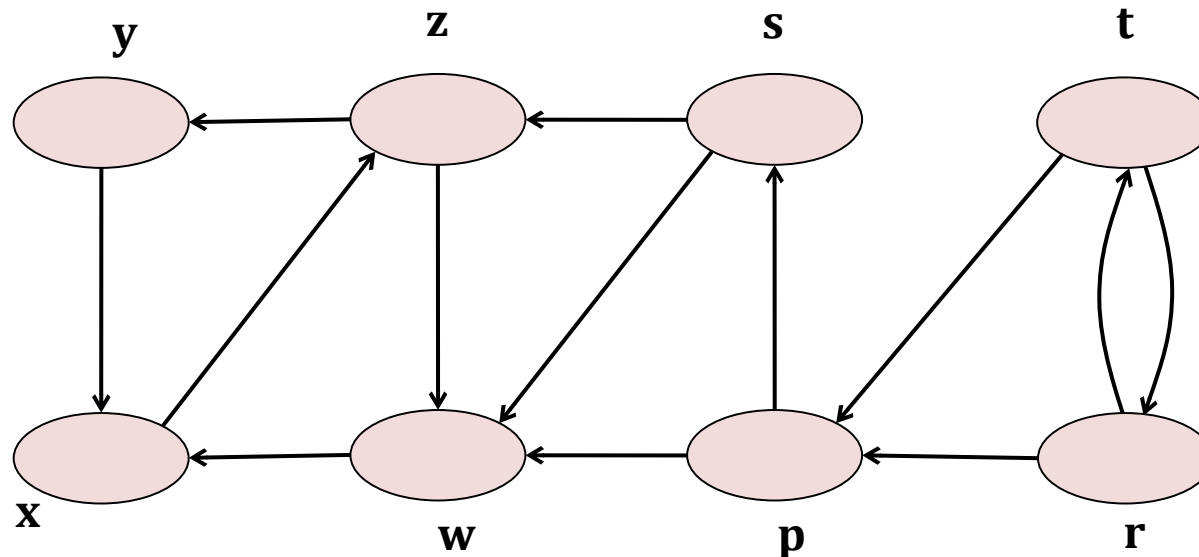
- θέλουν να διασχίσουν μια γέφυρα
- Η γέφυρα αντέχει μόνο 2 άτομα κάθε φορά
- Είναι νύχτα, και έχουν μόνο έναν φακό
- Ο καθένας χρειάζεται διαφορετικό χρόνο να περάσει τη γέφυρα: **1**, **2**, **5**, και **10** λεπτά είναι ο χρόνος για τον **A**, **B**, **Γ**, και **Δ** αντίστοιχα.
- Πόσο γρήγορα μπορούν να περάσουν τη γέφυρα;
 - Ιδέα: φτιάξτε τον **γράφο καταστάσεων**!

Επιπλέον εφαρμογές DFS - BFS

- DFS: Ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες (SCCs)
- DFS: Σημεία άρθρωσης (articulation points) και γέφυρες (bridges)
- BFS: Χωροθέτηση υπηρεσιών
- DFS & BFS: Λαβύρινθοι

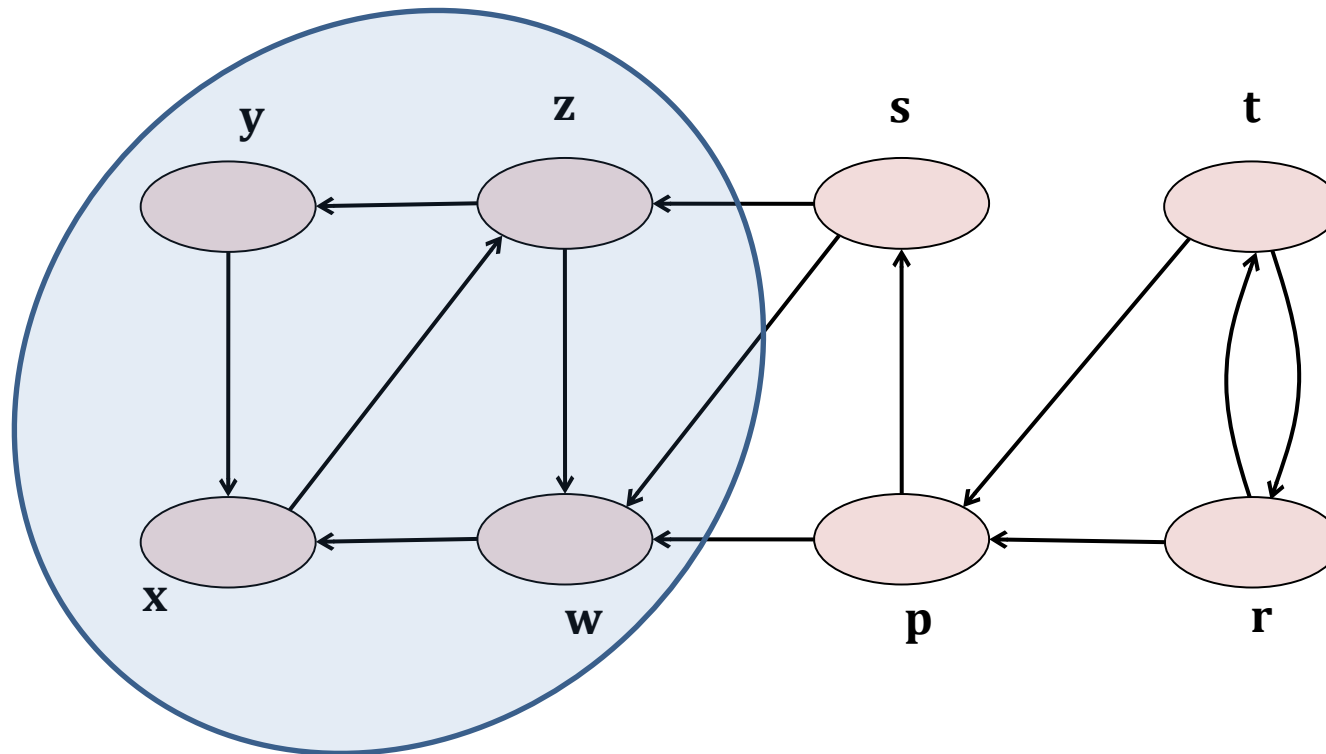
Ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες (SCCs)

Ισχυρή συνεκτικότητα: υπάρχει διαδρομή από κάθε κόμβο σε κάθε άλλο κόμβο



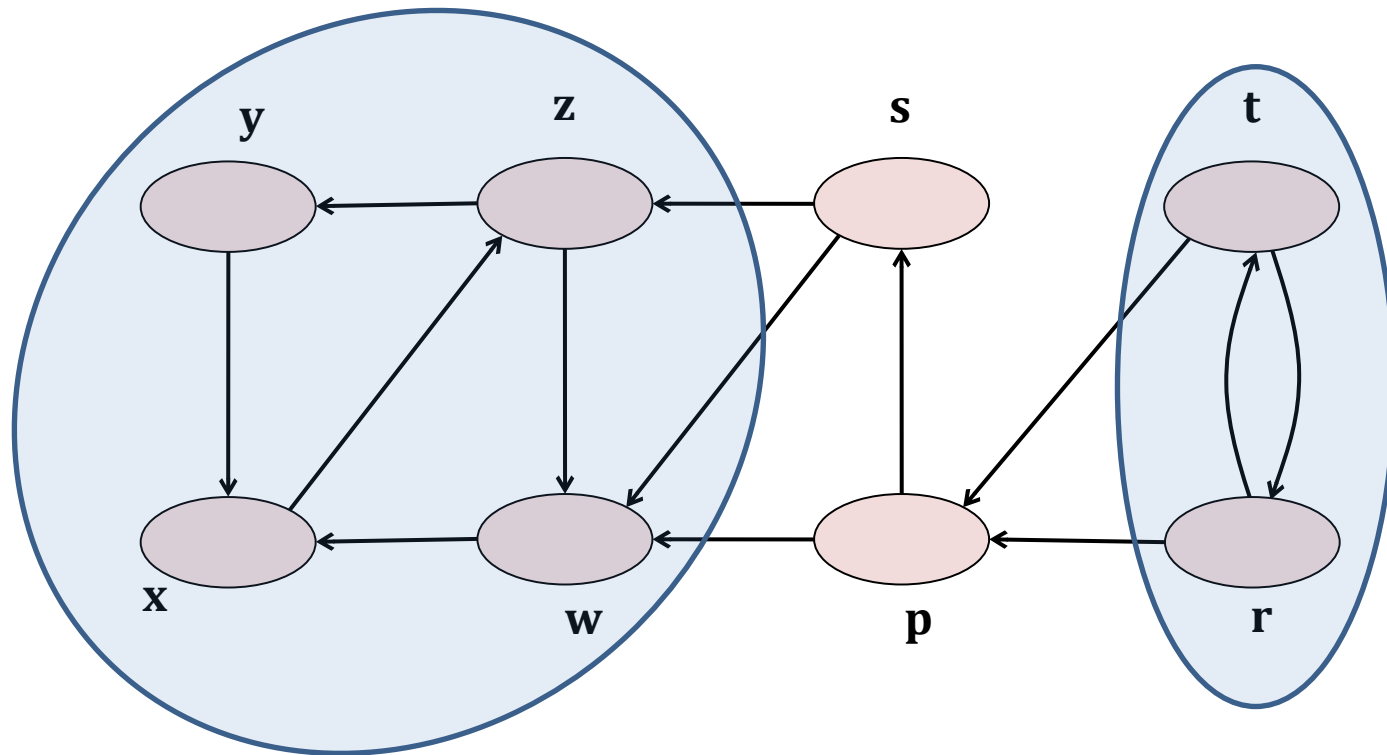
Πώς ελέγχουμε αν ο γράφος μας είναι ισχυρά συνεκτικός;

Ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες (SCCs)



Μία συνεκτική συνιστώσα

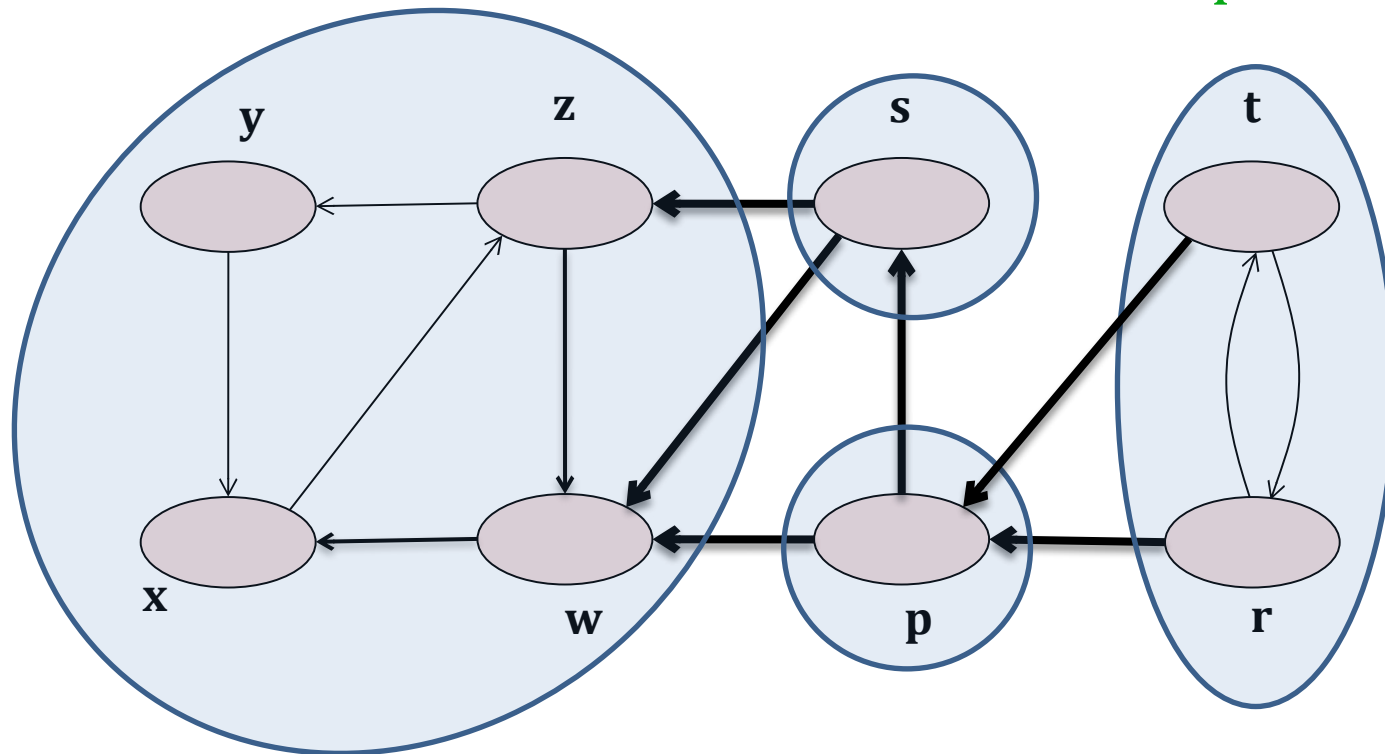
Ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες (SCCs)



... κι άλλη μία!

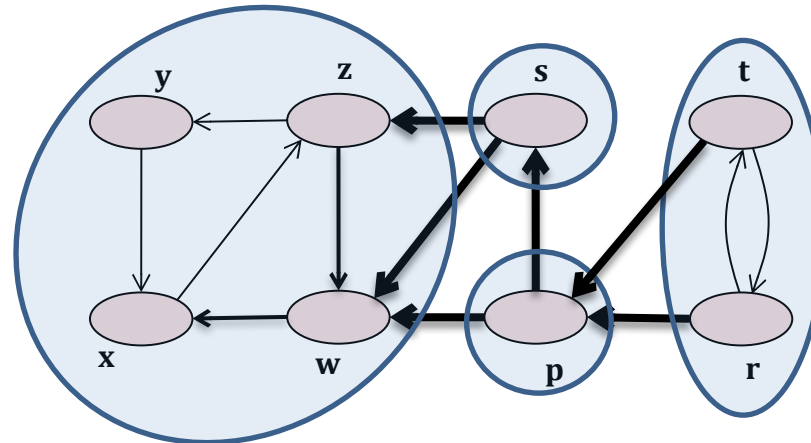
Ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες (SCCs)

DAG of connected components



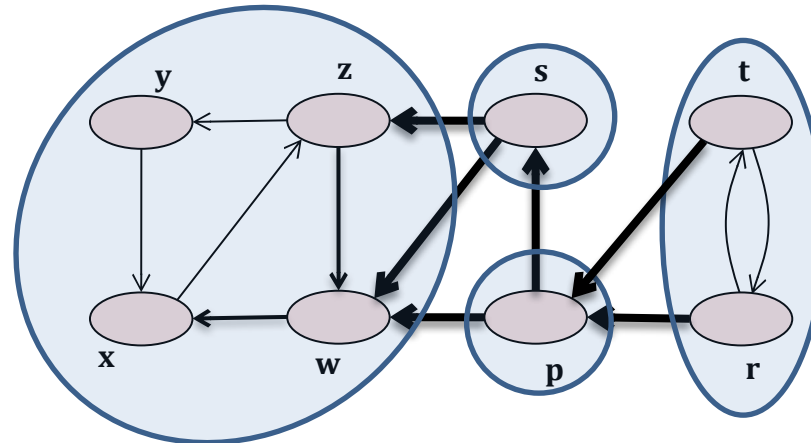
Πώς θα τις βρούμε όλες;

Ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες (SCCs)



- Από πού πρέπει να ξεκινήσει η εξερεύνηση;
 - από συνιστώσα-προορισμό (sink)
- Πώς μπορούμε να βρούμε sink;
 - μπορούμε να βρούμε συνιστώσα-πηγή (source)... με DFS!
 - δουλεύουμε με αντεστραμμένο γράφο!!

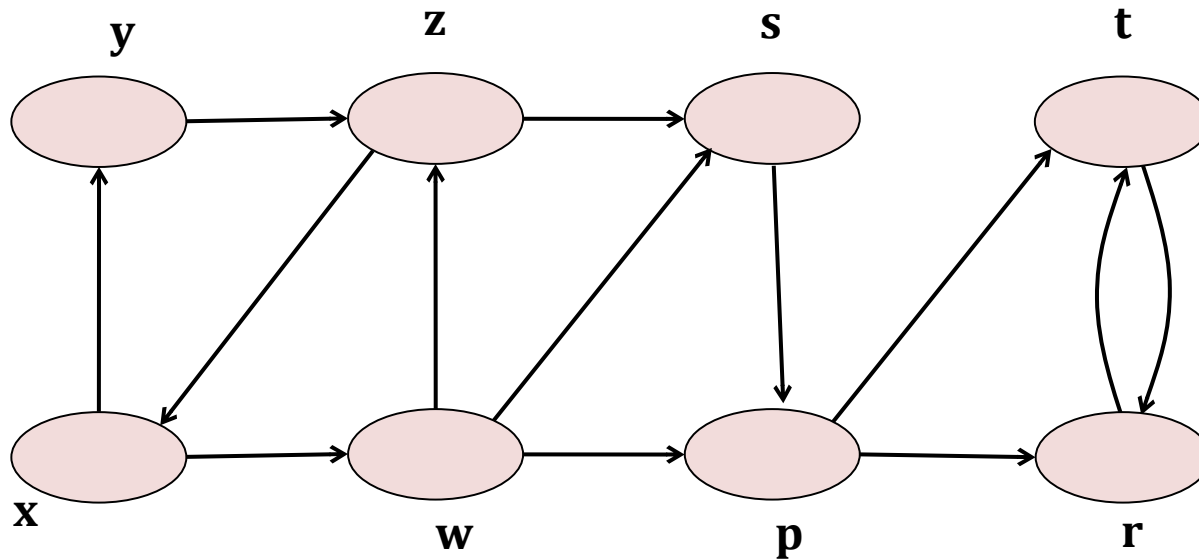
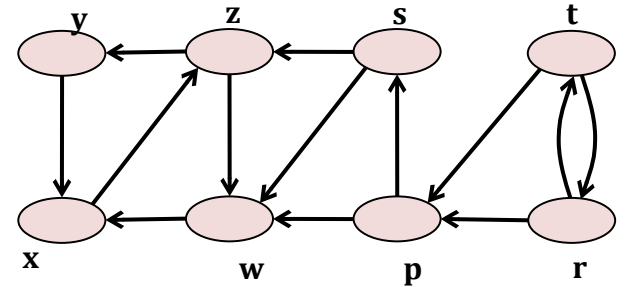
Ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες (SCCs)



- Εκτέλεση DFS στον αντεστραμμένο γράφο G^R
- Ταξινόμηση κόμβων κατά φθίνουσα σειρά χρόνου αναχώρησης $t^R(v)$
- Εκτέλεση DFS στον G , επιλέγοντας κόμβους εκκίνησης με βάση την παραπάνω ταξινόμηση

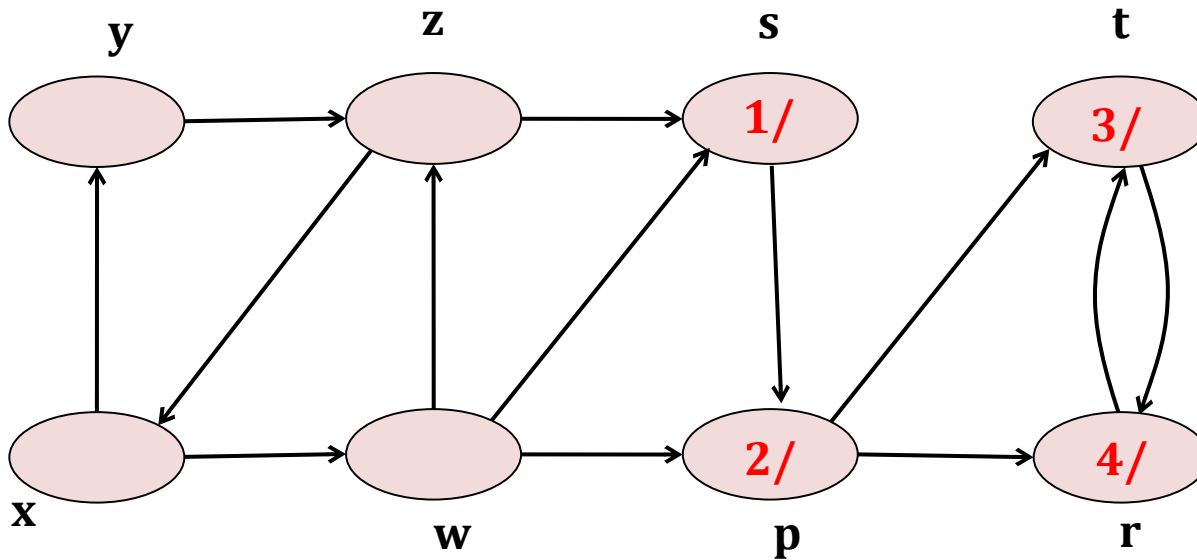
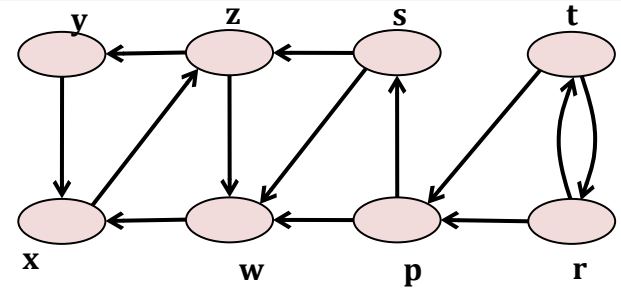
Ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες (SCCs)

Παράδειγμα εκτέλεσης



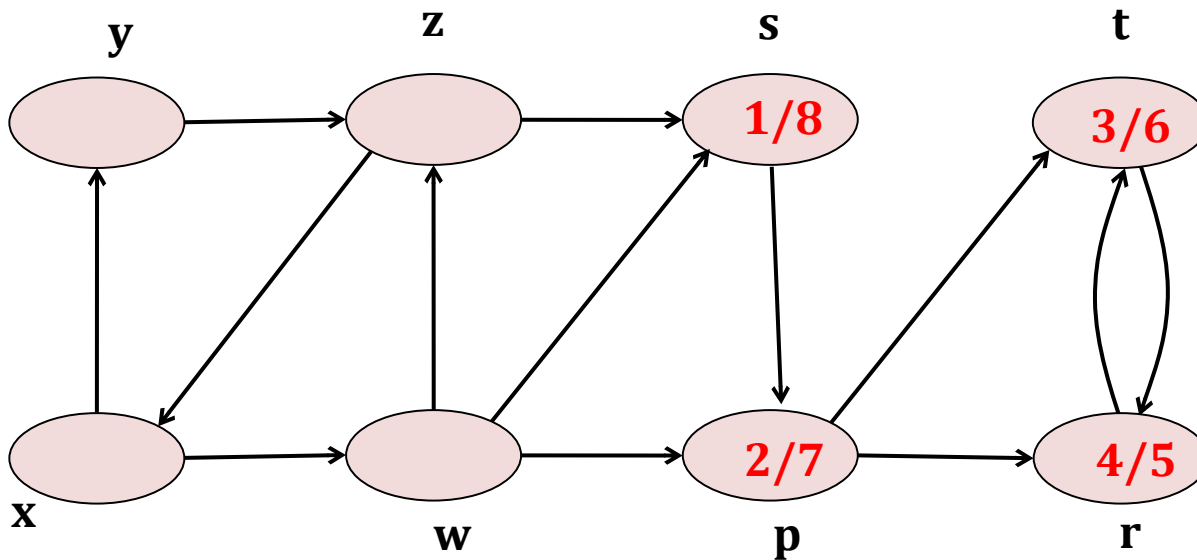
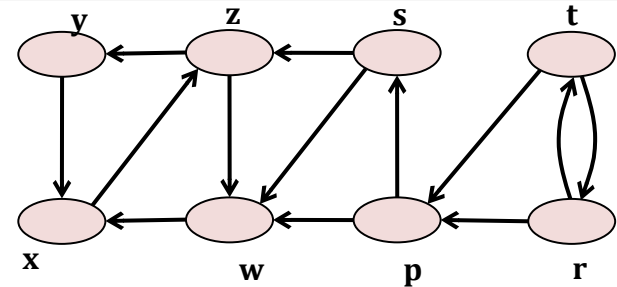
Ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες (SCCs)

Παράδειγμα εκτέλεσης



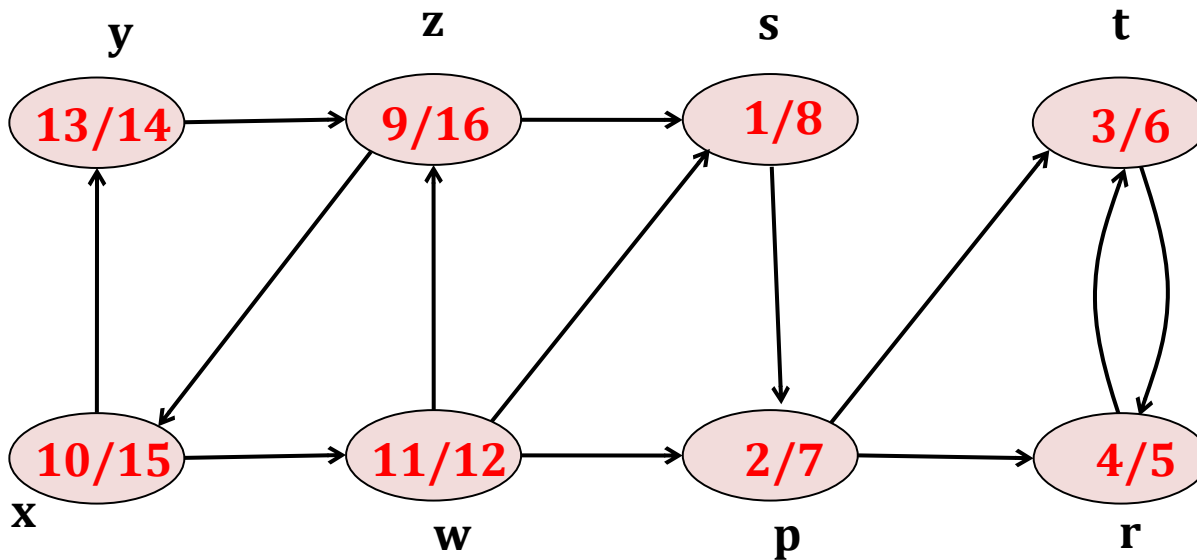
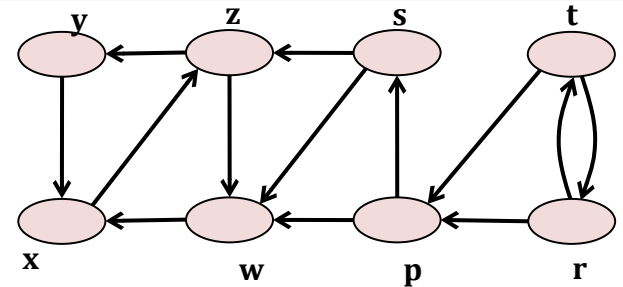
Ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες (SCCs)

Παράδειγμα εκτέλεσης



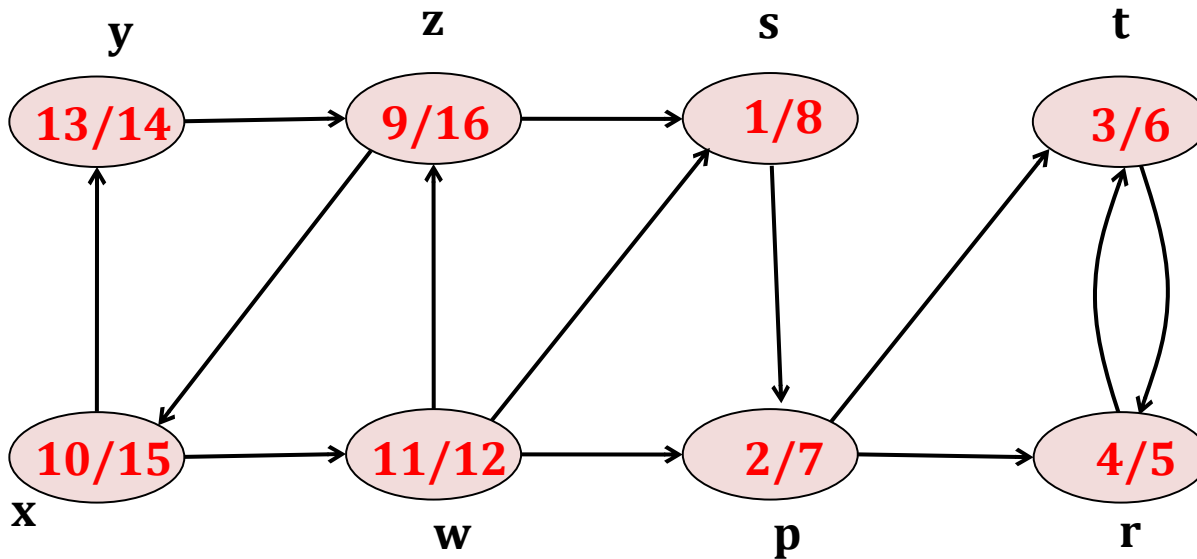
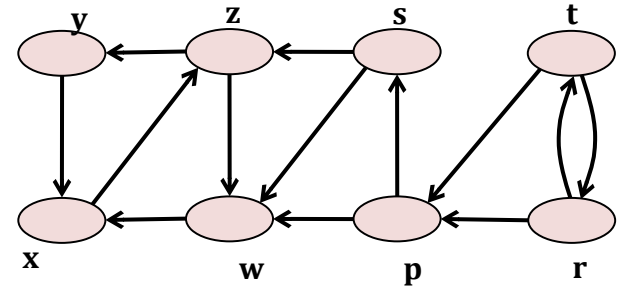
Ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες (SCCs)

Παράδειγμα εκτέλεσης



Ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες (SCCs)

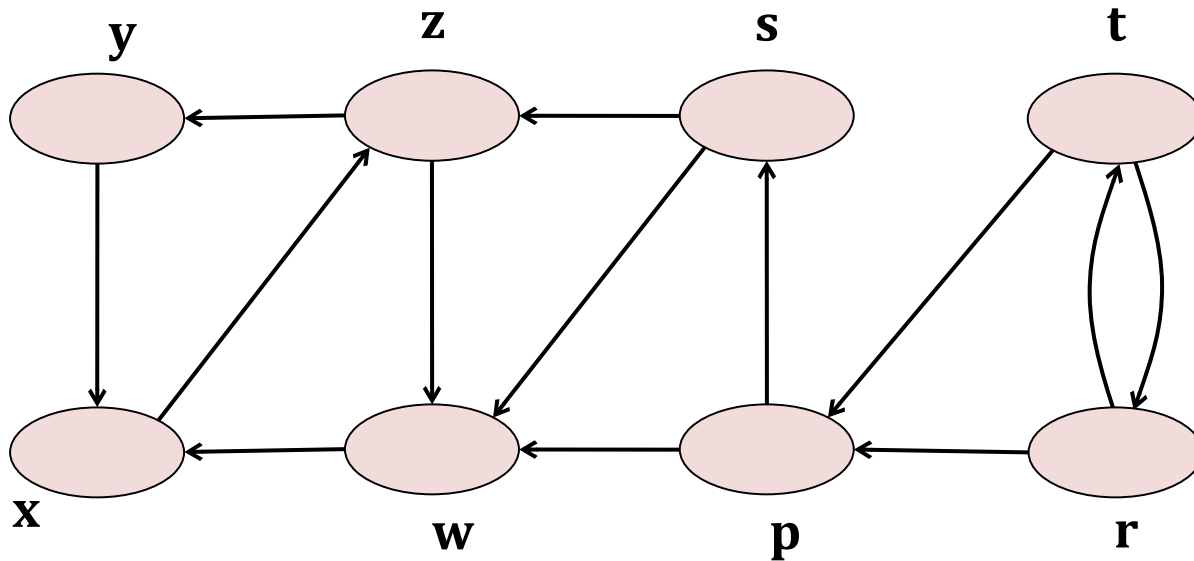
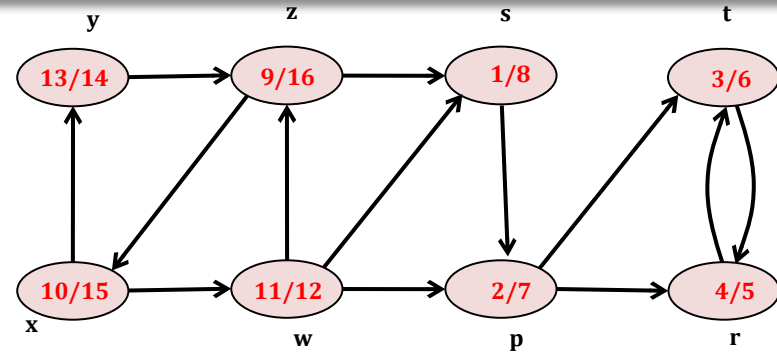
Παράδειγμα εκτέλεσης



Διάταξη κατά φθίνον t^R : z x y w s p t r

Ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες (SCCs)

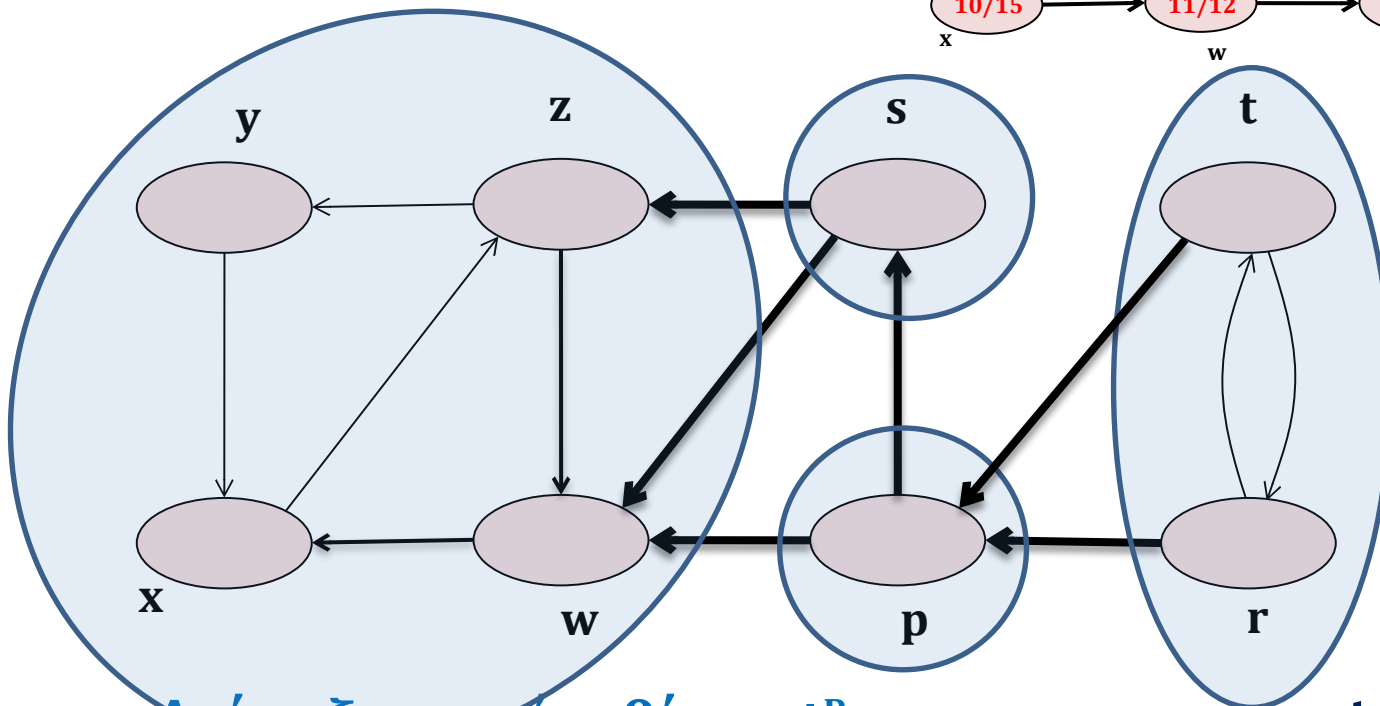
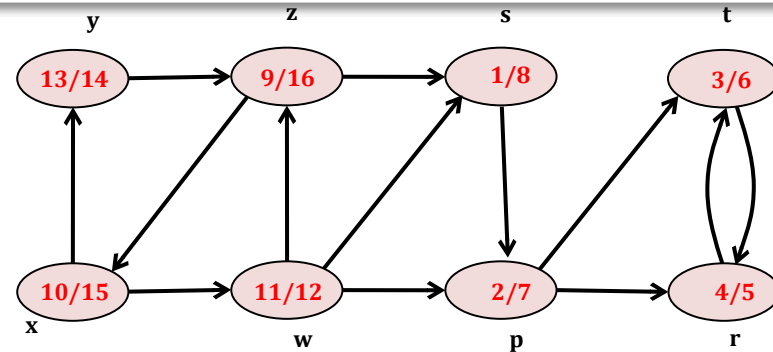
Παράδειγμα εκτέλεσης



Διάταξη κατά φθίνον t^R : z x y w s p t r

Ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες (SCCs)

Παράδειγμα εκτέλεσης



Διάταξη κατά φθίνον t^R : z x y w s p t r