**Αρμονική Ανάλυση (2025–26)**
**Ασκήσεις – Φυλλάδιο 2**

(Παραδίδετε έξι από τις ασκήσεις. Ημερομηνία παράδοσης: 10 Μαΐου 2026)

**1.** Θεωρούμε την $2\pi$-περιοδική συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x$ αν $-\pi\leqslant x<\pi$. Αποδείξτε ότι

$$f(x)=2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\sin kx}{k}$$

για κάθε $x\in(-\pi,\pi)$.

**2.** Θεωρούμε την $2\pi$-περιοδική συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=-1$ αν $-\pi<x<0$, $f(x)=1$ αν $0<x<\pi$, και $f(-\pi)=f(0)=f(\pi)=0$. Αποδείξτε ότι

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επιλέγοντας κατάλληλα το $x$ αποδείξτε ότι

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k+1}.$$

**3.** Έστω $f\in\mathcal{R}(\mathbb{T})$. Αν $(k_n)$ είναι μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών και $(t_n)$ είναι τυχούσα ακολουθία πραγματικών αριθμών, υπολογίστε το

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos^2(k_nx+t_n)\,dx.$$

**4.** Έστω $f\in\mathcal{C}(\mathbb{T})$ και έστω $\alpha\in\mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $\alpha/\pi\notin\mathbb{Q}$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}f(x+k\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,dt$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

**5.** Έστω $f,g\in\mathcal{R}(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)(f(x)-s_n(f,x))\,dx=0.$$

**6.** Έστω $f\in\mathcal{C}(\mathbb{T})$. Εξηγήστε γιατί $\|f-s_n(f)\|_2\leqslant\|f-\sigma_n(f)\|_2$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, και με βάση αυτήν την παρατήρηση αποδείξτε ότι $\lim\limits_{n\to\infty}\|f-s_n(f)\|_2=0$.

(β) Έστω $f\in\mathcal{R}(\mathbb{T})$, η οποία είναι συνεχής στο $x_0$. Αποδείξτε ότι αν υπάρχει το $\lim\limits_{n\to\infty}s_n(f,x_0)$ τότε είναι ίσο με $f(x_0)$.

**7.** Έστω $f\in C(\mathbb{T})$. Υποθέτουμε ότι $f(0)=0$ και ότι υπάρχει η $f'(0)$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση

$$g(x)=\frac{f(x)}{e^{ix}-1}$$

επεκτείνεται συνεχώς στο 0, άρα $g \in C(\mathbb{T})$. Στη συνέχεια, αποδείξτε ότι $\widehat{f}(k) = \widehat{g}(k-1) - \widehat{g}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ και από αυτό συμπεράνατε ότι

$$s_n(f,0) \longrightarrow 0 = f(0).$$

**8.** (α) Έστω $g, f, f_n \in \mathcal{R}([a,b])$ με $\|f_n - f\|_2 \to 0$. Ορίζουμε

$$h(x) = \int_a^x f(t)g(t)\,dt \quad \text{και} \quad h_n(x) = \int_a^x f_n(t)g(t)\,dt, \qquad x \in [a,b].$$

Αποδείξτε ότι $h_n \to h$ ομοιόμορφα.
(β) Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι, για κάθε $x \in [0, 2\pi]$,

$$\int_0^x f(t)\,dt = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x (a_k \cos kt + b_k \sin kt)\,dt,$$

δηλαδή μπορούμε να ολοκληρώσουμε τη σειρά Fourier της $f$ όρο προς όρο, ακόμα κι αν αυτή αποκλίνει.

**9.** Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Ορίζουμε

$$F(x) = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|s_n(f,x) - \sigma_{n+1}(f,x)|^2}{n} \right)^{1/2}.$$

Αποδείξτε ότι $\|F\|_2 \leqslant \|f\|_2$.

**10.** (α) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ αύξουσα και παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε η $f'$ να είναι ολοκληρώσιμη και $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a,b]$ τέτοιο ώστε

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a) \int_a^{\xi} g(x)\,dx + f(b) \int_{\xi}^b g(x)\,dx.$$

[*Υπόδειξη:* Θεωρήστε την $G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$ και χρησιμοποιήστε ολοκλήρωση κατά παράγοντες.]
(β) Έστω $h \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Υποθέτουμε ότι $h = f_1 - f_2$ στο $[-\pi, \pi]$, όπου $f_1, f_2 : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ αύξουσες και παραγωγίσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε οι $f_1', f_2'$ να είναι ολοκληρώσιμες. Αποδείξτε ότι υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $a_k(h) \leqslant \frac{M}{k}$ και $b_k(h) \leqslant \frac{M}{k}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.