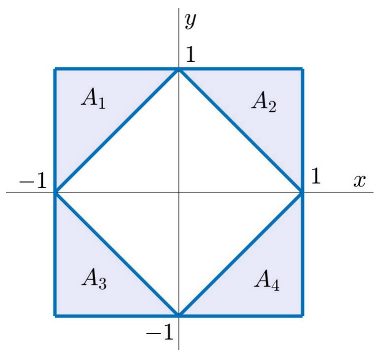
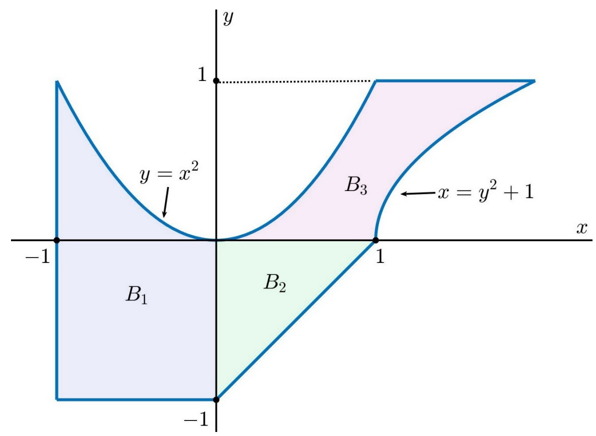
ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
(Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών - Διανυσματική Ανάλυση)
6ο Φυλλάδιο Ασκήσεων (2025-26)

Άσκηση 1. Να γράψετε καθένα από τα χωρία που φαίνονται στις εικόνες σαν ένωση x-απλών και y-απλών χωρίων και να υπολογίσετε τα αντίστοιχα διπλά ολοκληρώματα.



(α) $\iint_A (x^2+y^2)dxdy$



(β) $\iint_B xydxdy$

Άσκηση 2 (μια εναλλακτική απόδειξη του θεωρήματος Schwarz για την ισότητα των μεικτών παραγώγων)**.** Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό.

(α) Έστω $h : U \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν για κάθε ορθογώνιο $R \subseteq U$ ισχύει ότι $\iint_R h(x,y)\ dx\ dy = 0$, αποδείξτε ότι $h \equiv 0$.

(β) Αν $f : U \to \mathbb{R}$, C^2-συνάρτηση (δηλαδή με συνεχείς μερικές παραγώγους έως και δεύτερης τάξης), αποδείξτε ότι για κάθε ορθογώνιο $R = [a,b] \times [c,d] \subseteq U$ ισχύει ότι

$$\iint_R f_{xy}(x,y)\ dx\ dy = \iint_R f_{yx}(x,y)\ dx\ dy = f(b,d) - f(a,d) - f(b,c) + f(a,b).$$

(γ) Αποδείξτε το θεώρημα Schwarz: κάθε C^2-πραγματική συνάρτηση δύο μεταβλητών έχει ίσες μεικτές παραγώγους δεύτερης τάξης.

Άσκηση 3. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iint_D (x+y)^2\ dx\ dy$, όπου D είναι το χωρίο που περικλείεται από τις καμπύλες $x+y=2$, $x+y=4$, $x^2-y^2=4$ και $y=x$.

Άσκηση 4. Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} y \sin\left|x - y^2\right| dxdy.$$

Άσκηση 5. Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα $\iint_D \frac{(x+3y)^3}{(2x^2+2xy+13y^2)^{3/2}}dxdy$, όπου D το χωρίο

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 2x^2+2xy+13y^2\leqslant 1\ ,\ 1\leqslant 2x+6y\leqslant 2\}.$$

Άσκηση 6. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, όπου D είναι το χωρίο που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο και φράσσεται από τις καμπύλες

$$x^2+y^2=2x,\qquad x^2+y^2=4x,\qquad y=x,\qquad y=0.$$

Άσκηση 7. Υπολογίστε το $\iint_A ydxdy$ όπου A το χωρίο που ορίζεται από τις

$$1\leqslant x^2+y^2\ ,\ 0\leqslant x\leqslant 2\ ,\ 0\leqslant y\leqslant x.$$

Άσκηση 8. Εφαρμόστε κατάλληλες αλλαγές συντεταγμένων προκειμένου να υπολογίσετε τα ακόλουθα διπλά ολοκληρώματα:

(α) $\displaystyle\iint_A \frac{1}{x^2y^2}dxdy$, όπου A το χωρίο που φράσσεται από τις καμπύλες $y=x^2$, $y=2x^2$, $x=y^2$, $x=3y^2$.

(β) $\displaystyle\iint_B x^2y^2dxdy$, όπου B το χωρίο στο πρώτο τεταρτημόριο που φράσσεται από τις καμπύλες $y=x^2$, $y=3x^2$, $xy=2$, $xy=6$.

(γ) $\displaystyle\iint_C \left(2x+y^2\right)dxdy$, όπου $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ y\geqslant 0\ ,\ x\leqslant 0\ ,\ 2\leqslant x^2+y^2\leqslant 3\}$.

(δ) $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)dxdy$, όπου D το χωρίο του πρώτου τεταρτημορίου που φράσσεται από τις καμπύλες $xy=2$, $xy=4$, $x^2-y^2=2$ και $x^2-y^2=5$.

Άσκηση 9. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\ dx\ dy$, όπου D είναι το χωρίο του επιπέδου που περιορίζεται από τους κύκλους

$$\frac{x}{2}\leqslant x^2+y^2\leqslant x,\quad \frac{y}{2}\leqslant x^2+y^2\leqslant y.$$

Άσκηση 10. Υπολογίστε το $\iint_A ydxdy$ όπου A το χωρίο που ορίζεται από τις

$$b^2\leqslant x^2+y^2\ ,\ 0\leqslant x\leqslant 2\ ,\ 0\leqslant y\leqslant x$$

για $b\geqslant 0$.

Άσκηση 11. Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό από πολικές σε καρτεσιανές συντεταγμένες, υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\iint_{A'} \frac{1}{\sqrt{\cos^2\theta+\sin\theta/r+1/r^2}}dr\,d\theta$$

όπου $A'=\{(r,\theta):0\leqslant\theta\leqslant\pi/2\ ,\ r\cos\theta\leqslant 1\ ,\ r\sin\theta\leqslant 1\}$.

Άσκηση 12. Να βρείτε το εμβαδόν της φραγμένης επίπεδης περιοχής D που ορίζεται από τις τέσσερεις παραβολές $y = x^2$, $y = 2x^2$, $x = y^2$, $x = 3y^2$.

Άσκηση 13. Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 \leqslant \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2},\ x \geqslant 0\right\}$.

Άσκηση 14. Να βρεθεί ο όγκος V του στερεού K που φράσσεται από τον κώνο $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, τον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 9$ και το επίπεδο $z = 0$.

Άσκηση 15. Να βρεθεί ο όγκος V του στερεού K που φράσσεται από κάτω από το επιπεδο $z = 0$ και από πάνω από το κυκλικό παραβολοειδές $z = 1 - x^2 - y^2$.

Άσκηση 16. Μια λεπτή πλάκα έχει τη μορφή του μέρους ενός κυκλικού δακτυλίου με εξίσωση $a^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant b^2$ που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο, και έχει πυκνότητα ανάλογη της απόστασης από το κέντρο. Να βρείτε το κέντρο μάζας της πλάκας.