ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
(Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών - Διανυσματική Ανάλυση)
4ο Φυλλάδιο Ασκήσεων (υποδείξεις)

Άσκηση 1. Να υπολογίσετε το πολυώνυμο Taylor δεύτερης τάξης των συναρτήσεων:

(α) $f(x,y) = \sin(x^2+y^2)$, με κέντρο το σημείο $(0,0)$.

(β) $f(x,y) = \cos x \sin y$, με κέντρο το σημείο $(0,0)$.

Υπόδειξη: (α) Υπολογίζουμε τις $f_x(x,y) = 2x\cos(x^2+y^2)$, $f_y(x,y) = 2y\cos(x^2+y^2)$ και στη συνέχεια τις

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= 2\cos(x^2+y^2) - 4x^2\sin(x^2+y^2), \\ f_{xy}(x,y) &= -4xy\sin(x^2+y^2), \\ f_{yy}(x,y) &= 2\cos(x^2+y^2) - 4y^2\sin(x^2+y^2). \end{aligned}$$

Έπεται ότι $f(0,0)=0$, $f_x(0,0)=0$, $f_y(0,0)=0$, $f_{xx}(0,0)=2$, $f_{xy}(0,0)=0$ και $f_{yy}(0,0)=2$. Συνεπώς,

$$T_2(x,y) = f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + \frac{1}{2}(f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2) = x^2+y^2.$$

(β) Υπολογίζουμε τις $f_x(x,y) = -\sin x \sin y$, $f_y(x,y) = \cos x \cos y$ και στη συνέχεια τις

$$f_{xx}(x,y) = -\cos x \sin y, \qquad f_{xy}(x,y) = -\sin x \cos y, \qquad f_{yy}(x,y) = -\cos x \sin y.$$

Έπεται ότι $f(0,0)=0$, $f_x(0,0)=0$, $f_y(0,0)=1$, $f_{xx}(0,0)=0$, $f_{xy}(0,0)=0$ και $f_{yy}(0,0)=0$. Συνεπώς,

$$T_2(x,y) = f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + \frac{1}{2}(f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2) = y.$$

□

Άσκηση 2. Να υπολογίσετε το πολυώνυμο Taylor δεύτερης τάξης των συναρτήσεων:

(α) $f(x,y) = (x+y)^2$, με κέντρο το σημείο $(0,0)$.

(β) $g(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$, με κέντρο το σημείο $(0,0)$.

Υπόδειξη: (α) Υπολογίζουμε τις $f_x(x,y) = 2(x+y)$, $f_y(x,y) = 2(x+y)$ και στη συνέχεια τις

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= 2, \\ f_{xy}(x,y) &= 2, \\ f_{yy}(x,y) &= 2. \end{aligned}$$

Έπεται ότι $f(0,0)=0$, $f_x(0,0)=0$, $f_y(0,0)=0$, $f_{xx}(0,0)=2$, $f_{xy}(0,0)=2$ και $f_{yy}(0,0)=2$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} T_2(x,y) &= f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + \frac{1}{2}(f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2) \\ &= \frac{1}{2}(2x^2 + 2\cdot 2xy + 2y^2) = (x+y)^2. \end{aligned}$$

(β) Υπολογίζουμε τις $f_x(x,y) = -\frac{2x}{(x^2+y^2+1)^2}$, $f_y(x,y) = -\frac{2y}{(x^2+y^2+1)^2}$ και στη συνέχεια τις

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= -2\frac{y^2-3x^2+1}{(x^2+y^2+1)^3}, \\ f_{xy}(x,y) &= -2\frac{x^2-3y^2+1}{(x^2+y^2+1)^3}, \\ f_{yy}(x,y) &= \frac{8xy}{(x^2+y^2+1)^3}. \end{aligned}$$

Έπεται ότι $f(0,0)=1$, $f_x(0,0)=0$, $f_y(0,0)=0$, $f_{xx}(0,0)=-2$, $f_{xy}(0,0)=0$ και $f_{yy}(0,0)=-2$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}T_2(x,y) &= f(0,0)+f_x(0,0)x+f_y(0,0)y+\frac{1}{2}(f_{xx}(0,0)x^2+2f_{xy}(0,0)xy+f_{yy}(0,0)y^2)\\ &= 1+\frac{1}{2}((-2)x^2+(-2)y^2)=1-x^2-y^2.\end{aligned}$$

□

Άσκηση 3. Να υπολογίσετε το πολυώνυμο Taylor δεύτερης τάξης της συνάρτησης $f(x,y)=(1+x)^y$, με κέντρο το σημείο $(0,2)$.

Υπόδειξη: Υπολογίζουμε τις $f_x(x,y)=y(1+x)^{y-1}$, $f_y(x,y)=(1+x)^y\ln(1+x)$ και στη συνέχεια τις

$$\begin{aligned}f_{xx}(x,y) &= y(y-1)(1+x)^{y-2},\\ f_{xy}(x,y) &= (1+y\ln(1+x))(1+x)^{y-1},\\ f_{yy}(x,y) &= (1+x)^y\ln^2(1+x).\end{aligned}$$

Έπεται ότι $f(0,2)=1$, $f_x(0,2)=2$, $f_y(0,2)=0$, $f_{xx}(0,2)=2$, $f_{xy}(0,2)=1$ και $f_{yy}(0,0)=0$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}T_2(x,y) &= f(0,2)+f_x(0,2)x+f_y(0,2)(y-2)+\frac{1}{2}(f_{xx}(0,2)x^2+2f_{xy}(0,2)x(y-2)+f_{yy}(0,2)(y-2)^2)\\ &= 1+2x+\frac{1}{2}(2x^2+2x(y-2))=1+2x+x^2+xy-2x=1+x^2+xy.\end{aligned}$$

□

Άσκηση 4. Να υπολογιστούν τα πολυώνυμα πρώτης και δεύτερης τάξης της $f(x,y)=\sqrt{x+4y-1}$ με κέντρο το $(5,3)$. Να συγκρίνετε τις προσεγγίσεις της $f(4.9,3.1)$ με την τιμή της συνάρτησης.

Υπόδειξη: Παραυηρούμε αρχικά ότι $f(5,3)=4$. Υπολογίζουμε τις $f_x(x,y)=\dfrac{1}{2}(x+4y-1)^{-1/2}$ απ' όπου βλέπουμε ότι $f_x(5,3)=1/8$ και $f_y(x,y)=2(x+4y-1)^{-1/2}$ απ' όπου βλέπουμε ότι $f_y(5,3)=1/2$. Οι παράγωγοι δεύτερης τάξης είναι $f_{xx}(x,y)=-\dfrac{(x+4y-1)^{-3/2}}{4}$, άρα $f_{xx}(5,3)=-1/256$, $f_{xy}(x,y)=-(x+4y-1)^{-3/2}$, άρα $f_{xy}(5,3)=-1/64$, και $f_{yy}(x,y)=-4(x+4y-1)^{-3/2}$, άρα $f_{yy}(5,3)=-1/16$. Έπεται ότι

$$T_1(x,y)=\frac{15}{8}+\frac{1}{8}x+\frac{1}{2}y$$

και

$$T_2(x,y)=\frac{671}{512}+\frac{49}{256}x+\frac{49}{64}y-\frac{1}{512}x^2-\frac{1}{64}xy-\frac{1}{32}y^2.$$

Έχουμε $T_1(4.9,3.1)=4.0375000$, $T_2(4.9,3.1)=4.0373242$ και $f(4.9,3.1)=4.0373258$. Όπως είναι λογικό, η τετραγωνική προσέγγιση είναι καλύτερη. □

Άσκηση 5. Υπολογίστε το πολυώνυμο Taylor της $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ δεύτερης τάξης με κέντρο το $(1,0)$ και εξετάστε αν υπάρχει το $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)}\frac{\ln(x^2+y^2)}{(x-1)^2+y^2}$.

Υπόδειξη: Έχουμε

$$f_x(x,y)=\frac{2x}{x^2+y^2},\quad f_y(x,y)=\frac{2y}{x^2+y^2}$$

και

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= \frac{2(x^2+y^2)-2x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ f_{yy}(x,y) &= \frac{2(x^2+y^2)-2y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} \\ f_{xy}(x,y) &= (f_x)_y = \frac{-2x\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}. \end{aligned}$$

Άρα,

$$f_x(1,0)=2, \quad f_y(1,0)=0, \quad f_{xx}(1,0)=-2, \quad f_{yy}(1,0)=2, \quad f_{xy}(1,0)=0$$

οπότε το πολυώνυμο Taylor της $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ δεύτερης τάξης με κέντρο το $(1,0)$ είναι το

$$\begin{aligned} T_2(x,y) &= f(1,0)+f_x(1,0)(x-1)+f_y(1,0)y+\frac{1}{2}\left(f_{xx}(1,0)(x-1)^2+2f_{xy}(1,0)(x-1)y+f_{yy}(1,0)y^2\right) \\ &= 2(x-1)-(x-1)^2+y^2. \end{aligned}$$

Από το θεώρημα Taylor έχουμε ότι

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x^2+y^2)-\left(2(x-1)-(x-1)^2+y^2\right)}{(x-1)^2+y^2} = 0.$$

Αν υπήρχε το $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x^2+y^2)}{(x-1)^2+y^2}$, τότε θα υπήρχε και το

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{2(x-1)-(x-1)^2+y^2}{(x-1)^2+y^2}$$

και τα δύο όρια θα ήταν ίσα. Όμως, το παραπάνω όριο δεν υπάρχει αφού για $x=1+u$ με $u\neq 0$, $u\to 0$ και $y=0$ το όριο ισούται με

$$\lim_{u\to 0} \frac{2u-u^2}{u^2} = \lim_{u\to 0}\left(\frac{2}{u}\right)-1,$$

το οποίο δεν υπάρχει, αφού $\displaystyle\lim_{u\to 0^+}\left(\frac{2}{u}\right)=+\infty$ ενώ $\displaystyle\lim_{u\to 0^-}\left(\frac{2}{u}\right)=-\infty$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x^2+y^2)}{(x-1)^2+y^2}$ δεν υπάρχει. □

Άσκηση 6. Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ C^2-συνάρτηση τέτοια ώστε $f(0,0)=f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$ και $f_{xx}(0,0)=f_{yy}(0,0)=2$. Εξετάστε αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{x^2+y^2}.$$

Υπόδειξη: Το πολυώνυμο Taylor δεύτερης τάξης με κέντρο το $(0,0)$ δίνεται από τον τύπο

$$T_2(x,y) = \frac{1}{2}\left(2x^2+2bxy+2y^2\right) = x^2+bxy+y^2,$$

όπου $b=f_{xy}(0,0)$. Από το θεώρημα Taylor παίρνουμε ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-T_2(x,y)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-x^2-y^2-bxy}{x^2+y^2} = 0,$$

άρα θα πρέπει να ισχύει η

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{f(x,y)}{x^2+y^2} - 1 - b\frac{xy}{x^2+y^2} \right) = 0. \tag{1}$$

Αν $b = 0$ τότε από την (1) παίρνουμε

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{x^2+y^2} = 1.$$

Αν $b \neq 0$ τότε το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει. Πράγματι, αν το όριο $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{x^2+y^2} = \ell$ υπήρχε (πεπερασμένο ή άπειρο) τότε από την (1) θα έπρεπε να υπάρχει και το όριο $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{\ell-1}{b}$. Όμως, το όριο αυτό δεν υπάρχει αφού στην ευθεία $y = x$ έχουμε $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}$, ενώ στην ευθεία $y = -x$ έχουμε $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = -\frac{1}{2}$. □

Άσκηση 7. Εξετάστε αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xe^{y^2} + y\cos x - x - y}{|x|+|y|}.$$

Υπόδειξη: Θεωρούμε την $f(x,y) = xe^{y^2} + y\cos x$. Υπολογίζουμε τις $f_x(x,y) = e^{y^2} - y\sin x$ και $f_y(x,y) = 2xye^{y^2} + \cos x$. Έπεται ότι $f(0,0) = 0$, $f_x(0,0) = 1$ και $f_y(0,0) = 1$. Συνεπώς,

$$T_1(x,y) = f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y = x + y.$$

Γνωρίζουμε ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xe^{y^2} + y\cos x - x - y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - T_1(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

και

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x|+|y|} \leq 1$$

για κάθε $(x,y) \neq (0,0)$. Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι

$$\frac{xe^{y^2} + y\cos x - x - y}{|x|+|y|} = \frac{xe^{y^2} + y\cos x - x - y}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x|+|y|} \longrightarrow 0$$

όταν $(x,y) \to (0,0)$ ως γινόμενο συνάρτησης που τείνει στο 0 με συνάρτηση απολύτως φραγμένη από 1. □

Άσκηση 8. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ C^2 συνάρτηση. Υποθέτουμε τα εξής:

(α) $f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ και

(β) υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $|f_{xx}(x,y)|, |f_{xy}(x,y)|, |f_{yy}(x,y)| \leq M$ για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Αποδείξτε ότι $|f(x,y)| \leq \dfrac{M}{2}\left(|x|+|y|\right)^2$.

Υπόδειξη: Η ζητούμενη ανισότητα ισχύει κατά τετριμμένο τρόπο αν $(x,y) = (0,0)$. Έστω $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ με $(x,y) \neq (0,0)$. Από τον τύπο Taylor υπάρχει (ξ,η) στο ανοικτό ευθύγραμμο τμήμα με άκτα τα $(0,0)$ και (x,y) τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + \frac{1}{2}\left(f_{xx}(\xi,\eta)x^2 + 2f_{xy}(\xi,\eta)xy + f_{yy}(\xi,\eta)y^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(f_{xx}(\xi,\eta)x^2 + 2f_{xy}(\xi,\eta)xy + f_{yy}(\xi,\eta)y^2\right). \end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned}|f(x,y)| &\le \frac{1}{2}\left(|f_{xx}(\xi,\eta)|x^2 + 2|f_{xy}(\xi,\eta)|\cdot|xy| + |f_{yy}(\xi,\eta)|y^2\right)\\ &\le \frac{M}{2}\left(x^2+2|xy|+y^2\right) = \frac{M}{2}\left(|x|+|y|\right)^2.\end{aligned}$$

□

Άσκηση 9. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ C^{n+1} συνάρτηση τέτοια ώστε όλες οι μερικές της παράγωγοι τάξης $n+1$ είναι ίσες με 0. Αποδείξτε ότι η f είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ n.

Υπόδειξη: Το πολυώνυμο Taylor της f τάξης n με κέντρο το $(0,0)$ δίνεται από τον τύπο

$$T_n(x,y) = f(0,0) + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j} f_{x^{k-j}y^j}(0,0)\, x^{k-j}y^j,$$

όπου $f_{x^{k-j}y^j}(0,0)$ είναι η k-τάξης μερική παράγωγος της f στο $(0,0)$, όπου παραγωγίζουμε j-φορές ως προς y και $k-j$-φορές ως προς x (από το θεώρημα Schwarz δεν έχει σημασία η σειρά με την οποία παραγωγίζουμε ως προς τις μεταβλητές x και y παρά μόνο το πλήθος των παραγωγίσεων). Από τον τύπο Taylor έχουμε ότι για κάθε $(x,y) \neq (0,0)$ υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε

$$f(x,y) = T_n(x,y) + \frac{1}{(n+1)!}\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j} f_{x^{n+1-j}y^j}(\xi x, \xi y)\, x^{n+1-j}y^j.$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι $f_{x^{n+1-j}y^j} = 0$ για όλα τα $k = 0,\dots,n+1$, άρα $f(x,y) = T_n(x,y)$ για κάθε $(x,y) \neq (0,0)$. Επειδή στο $(0,0)$ έχουμε επίσης $T_n(0,0) = f(0,0)$, συμπεραίνουμε ότι $f(x,y) = T_n(x,y)$ για όλα τα $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ και άρα η f είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ n. □

Άσκηση 10. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ C^2 συνάρτηση τέτοια ώστε $f(0,0) = 1$, $f_x(0,0) = 1$, $f_y(0,0) = 2$ και $f_{xx}(x,y) = f_{yy}(x,y) = f_{xy}(x,y) = 4$, για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Να βρείτε τον τύπο της f.

Υπόδειξη: Από τον τύπο Taylor έχουμε ότι για κάθε $(x,y) \neq (0,0)$ υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε

$$f(x,y) = T_1(x,y) + \frac{1}{2}\left[f_{xx}(\xi x,\xi y)x^2 + 2f_{xy}(\xi x,\xi y)xy + f_{yy}(\xi x,\xi y)y^2\right],$$

όπου

$$T_1(x,y) = f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y$$

είναι το πολυώνυμο Taylor της f πρώτης τάξης με κέντρο το $(0,0)$. Αντικαθιστώντας τα δεδομένα, έχουμε ότι

$$f(x,y) = 1 + x + 2y + \frac{1}{2}\left(4x^2+8xy+4y^2\right) = 1 + x + 2y + 2x^2 + 4xy + 2y^2.$$

□

Άσκηση 11. Έστω C^2 συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες: (α) το $(0,0)$ είναι κρίσιμο σημείο για την f, δηλαδή $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, (β) $f_{xx}(x,y) = f_{yy}(x,y) = f_{xy}(x,y) \geq 0$ για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Αποδείξτε ότι το $(0,0)$ είναι σημείο ολικού ελαχίστου για την f.

Υπόδειξη: Έστω $(x,y) \neq (0,0)$. Από τον τύπο Taylor έχουμε ότι υπάρχει (ξ,η) στο ανοικτό ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα $(0,0)$ και (x,y) τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned}f(x,y) &= f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + \frac{1}{2}\left(f_{xx}(\xi,\eta)x^2 + 2f_{xy}(\xi,\eta)xy + f_{yy}(\xi,\eta)y^2\right)\\ &= f(0,0) + \frac{1}{2}\left(f_{xx}(\xi,\eta)x^2 + 2f_{xy}(\xi,\eta)xy + f_{yy}(\xi,\eta)y^2\right).\end{aligned}$$

Αφού $f_{xx} = f_{yy} = f_{xy} \geq 0$, θέτοντας

$$a = f_{xx}(\xi, \eta) = f_{yy}(\xi, \eta) = f_{xy}(\xi, \eta)$$

βλέπουμε ότι $a \geq 0$ και

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,0) + \frac{1}{2}\left(f_{xx}(\xi,\eta)x^2 + 2f_{xy}(\xi,\eta)xy + f_{yy}(\xi,\eta)y^2\right) \\ &= f(0,0) + \frac{a}{2}\left(x^2 + 2xy + y^2\right) = f(0,0) + \frac{a}{2}\left(x+y\right)^2 \geq f(0,0). \end{aligned}$$

Αφού το (x, y) είναι τυχόν σημείο του $\mathbb{R}^2$ διαφορετικό από το $(0, 0)$, έπεται ότι η f έχει ολικό ελάχιστο στο $(0, 0)$. □

Άσκηση 12. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, όπου $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, $f \in C^m(A)$, και $(a_1, a_2) \in A$. Αποδείξτε ότι το πολυώνυμο Taylor

$$T_m(x,y) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{\partial^{k-j} f}{\partial x^{k-j} \partial y^j}(a_1,a_2)(x-a_1)^{k-j}(y-a_2)^j \ ,$$

είναι το μοναδικό πολυώνυμο βαθμού $\leq m$ που έχει ίδια τιμή και τις ίδιες παραγώγους τάξης $1, \ldots, m$ με την f στο (a_1, a_2).

Υπόδειξη: Παρατηρούμε ότι

$$\left.\frac{d^\ell (x-a)^i}{dx^\ell}\right|_{x=a} = \begin{cases} \ell! \ , & \text{για } i = \ell \ , \\ 0 \ , & \text{για } i \neq \ell \ . \end{cases}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial^{\ell+p}(x-a_1)^i(y-a_2)^j}{\partial x^\ell \partial y^p}\right|_{(x,y)=(a_1,a_2)} &= \left.\frac{d^\ell (x-a_1)^i}{dx^\ell}\right|_{x=a_1} \cdot \left.\frac{d^p (y-a_2)^j}{dy^p}\right|_{y=a_2} \\ &= \begin{cases} \ell! p! \ , & \text{για } (i,j) = (\ell,p) \ , \\ 0 \ , & \text{για } (i,j) \neq (\ell,p) \ . \end{cases} \end{aligned}$$

Για (ℓ, p) τέτοια ώστε $0 \leq \ell + p \leq m$ έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{\ell+p} T_m}{\partial x^\ell \partial y^p}(a_1,a_2) &= \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!} \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \frac{\partial^j f}{\partial x^i \partial y^{j-i}}(a_1,a_2) \left.\frac{\partial^{\ell+p}}{\partial x^\ell \partial y^p}(x-a_1)^i(y-a_2)^j\right|_{x=a_1 \ , \ y=a_2} \\ &= \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!} \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \frac{\partial^j f}{\partial x^i \partial y^{j-i}}(a_1,a_2) \ \left.\frac{d^\ell (x-a_1)^i}{dx^\ell}\right|_{x=a_1} \cdot \left.\frac{d^p (y-a_2)^{j-i}}{dy^p}\right|_{y=a_2} \end{aligned}$$

Οι όροι του αθροίσματος μηδενίζονται για $(i, j - i) \neq (\ell, p)$ δηλαδή $(i, j) \neq (\ell, \ell + p)$. Επομένως,

$$\frac{\partial^{\ell+p} T_m}{\partial x^\ell \partial y^p}(a_1,a_2) = \frac{1}{(\ell+p)!} \binom{\ell+p}{\ell} \frac{\partial^{\ell+p} f}{\partial x^\ell \partial y^p}(a_1,a_2)\ell! p! = \frac{\partial^{\ell+p} f}{\partial x^\ell \partial y^p}(a_1,a_2).$$

Για τη μοναδικότητα, έστω $P_m(x, y)$ πολυώνυμο βαθμού $\leq m$ με $\frac{\partial^{\ell+p} P_m}{\partial x^\ell \partial y^p}(a_1,a_2) = \frac{\partial^{\ell+p} f}{\partial x^\ell \partial y^p}(a_1,a_2)$. Τότε για το πολυώνυμο $R(x, y) = T_m(x, y) - P_m(x, y)$ βαθμού $\leq m$ θα ισχύει ότι

$$\frac{\partial^{\ell+p} R}{\partial x^\ell \partial y^p}(a_1,a_2) = \frac{\partial^{\ell+p}\left[T_m(a_1,a_2) - P_m(a_1,a_2)\right]}{\partial x^\ell \partial y^p} = 0 \ ,$$

για $0 \leq \ell + p \leq m$.

Έστω $\dfrac{\partial^j f}{\partial x^i \partial y^{j-i}}(a_1, a_2) = c_{i,j-i} \in \mathbb{R}$. Τότε,

$$R(x,y) = \sum_{j=0}^{m} \left[\sum_{i=0}^{j} c_{i,j-i}(x-a_1)^i (y-a_2)^{j-i} \right]$$

άρα

$$0 = \frac{\partial^{\ell+p} R}{\partial x^\ell \partial y^p}(a_1, a_2) = c_{\ell,p}\ell! p!$$

για $0 \leq \ell + p \leq m$, το οποίο δείχνει ότι $R \equiv 0$. □

Άσκηση 13. Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ C^2 συνάρτηση, A ανοικτό, και $a = (a_1, a_2) \in A$. Αποδείξτε ότι το πολυώνυμο Taylor δεύτερης τάξης με κέντρο το a είναι το μοναδικό πολυώνυμο δευτέρου βαθμού που ικανοποιεί την

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} \frac{f(x,y) - T_2(x,y)}{\|(x,y) - (a_1,a_2)\|^2} = 0 \ .$$

Υπόδειξη: Έστω $P_2(x,y)$ ένα άλλο πολυώνυμο βαθμού ≤ 2 με την ιδιότητα

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} \frac{f(x,y) - P_2(x,y)}{\|(x,y) - (a_1,a_2)\|^2} = 0 \ .$$

Τότε, η συνάρτηση $R(x,y) = T_2(x,y) - P_2(x,y)$ είναι πολυώνυμο βαθμού ≤ 2 τέτοιο ώστε

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} \frac{R(x,y)}{\|(x,y) - (a_1,a_2)\|^2} = 0.$$

Μπορούμε να γράψουμε

$$R(x,y) = A + B(x-a_1) + C(y-a_2) + D(x-a_1)^2 + E(x-a_1)(y-a_2) + F(y-a_2)^2.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{(x,a_2)\to(a_1,a_2)} \frac{R(x,a_2)}{(x-a_1)^2} = 0 \implies \lim_{x\to a_1} \frac{A + B(x-a_1) + D(x-a_1)^2}{(x-a_1)^2} = 0 \implies A = B = D = 0.$$

Ομοίως

$$\lim_{(a_1,y)\to(a_1,a_2)} \frac{R(a_1,y)}{(y-a_2)^2} = 0 \implies \lim_{y\to a_2} \frac{C(y-a_2) + F(y-a_2)^2}{(y-a_2)^2} = 0 \implies C = F = 0.$$

Τέλος, για $x = a_1 + t$, $y = a_2 + t$ έχουμε

$$\lim_{t\to 0} \frac{R(a_1+t, a_2+t)}{2t^2} = 0 \implies \lim_{t\to 0} \frac{Et^2}{2t^2} = 0 \implies E = 0.$$

Από τα παραπάνω έπεται ότι $R \equiv 0$, δηλαδή $T_2 = P_2$. □