ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
(Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών - Διανυσματική Ανάλυση)
4ο Φυλλάδιο Ασκήσεων (2025-26)

Άσκηση 1. Να υπολογίσετε το πολυώνυμο Taylor δεύτερης τάξης των συναρτήσεων:

(α) $f(x,y) = \sin(x^2+y^2)$, με κέντρο το σημείο $(0,0)$.

(β) $f(x,y) = \cos x \sin y$, με κέντρο το σημείο $(0,0)$.

Άσκηση 2. Να υπολογίσετε το πολυώνυμο Taylor δεύτερης τάξης των συναρτήσεων:

(α) $f(x,y) = (x+y)^2$, με κέντρο το σημείο $(0,0)$.

(β) $g(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$, με κέντρο το σημείο $(0,0)$.

Άσκηση 3. Να υπολογίσετε το πολυώνυμο Taylor δεύτερης τάξης της συνάρτησης $f(x,y) = (1+x)^y$, με κέντρο το σημείο $(0,2)$.

Άσκηση 4. Να υπολογιστούν τα πολυώνυμα πρώτης και δεύτερης τάξης της $f(x,y) = \sqrt{x+4y-1}$ με κέντρο το $(5,3)$. Να συγκρίνετε τις προσεγγίσεις της $f(4.9, 3.1)$ με την τιμή της συνάρτησης.

Άσκηση 5. Υπολογίστε το πολυώνυμο Taylor της $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ δεύτερης τάξης με κέντρο το $(1,0)$ και εξετάστε αν υπάρχει το $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x^2+y^2)}{(x-1)^2+y^2}$.

Άσκηση 6. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ C^2-συνάρτηση τέτοια ώστε $f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ και $f_{xx}(0,0) = f_{yy}(0,0) = 2$. Εξετάστε αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{x^2+y^2}.$$

Άσκηση 7. Εξετάστε αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xe^{y^2} + y\cos x - x - y}{|x|+|y|}.$$

Άσκηση 8. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ C^2 συνάρτηση. Υποθέτουμε τα εξής:

(α) $f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ και

(β) υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $|f_{xx}(x,y)|, |f_{xy}(x,y)|, |f_{yy}(x,y)| \leq M$ για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Αποδείξτε ότι $|f(x,y)| \leq \dfrac{M}{2}\left(|x|+|y|\right)^2$.

Άσκηση 9. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ C^{n+1} συνάρτηση τέτοια ώστε όλες οι μερικές της παράγωγοι τάξης $n+1$ είναι ίσες με 0. Αποδείξτε ότι η f είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ n.

Άσκηση 10. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ C^2 συνάρτηση τέτοια ώστε $f(0,0) = 1$, $f_x(0,0) = 1$, $f_y(0,0) = 2$ και $f_{xx}(x,y) = f_{yy}(x,y) = f_{xy}(x,y) = 4$, για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Να βρείτε τον τύπο της f.

Άσκηση 11. Έστω C^2 συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες: (α) το $(0,0)$ είναι κρίσιμο σημείο για την f, δηλαδή $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, (β) $f_{xx}(x,y) = f_{yy}(x,y) = f_{xy}(x,y) \geq 0$ για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Αποδείξτε ότι το $(0,0)$ είναι σημείο ολικού ελαχίστου για την f.

Άσκηση 12. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, όπου $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, $f \in C^m(A)$, και $(a_1, a_2) \in A$. Αποδείξτε ότι το πολυώνυμο Taylor

$$T_m(x, y) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{\partial^{k-j} f}{\partial x^{k-j} \partial y^j}(a_1, a_2)(x - a_1)^{k-j}(y - a_2)^j \ ,$$

είναι το μοναδικό πολυώνυμο βαθμού $\leq m$ που έχει ίδια τιμή και τις ίδιες παραγώγους τάξης $1, \ldots, m$ με την f στο (a_1, a_2).

Άσκηση 13. Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ C^2 συνάρτηση, A ανοικτό, και $a = (a_1, a_2) \in A$. Αποδείξτε ότι το πολυώνυμο Taylor δεύτερης τάξης με κέντρο το a είναι το μοναδικό πολυώνυμο δευτέρου βαθμού που ικανοποιεί την

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} \frac{f(x, y) - T_2(x, y)}{\|(x, y) - (a_1, a_2)\|^2} = 0 \ .$$