

ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
(Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών - Διανυσματική Ανάλυση)
3ο Φυλλάδιο Ασκήσεων (υποδείξεις)

Άσκηση 1. (α) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = 4x^3y^2 + 2y$. Να βρείτε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της επιφάνειας $z = f(x, y)$ στο σημείο $(1, -2, 12)$.

(β) Να βρείτε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της επιφάνειας $e^{x-2y} + x^2 \sin z = 1$ στο σημείο $(2, 1, 0)$.

Υπόδειξη: (α) Η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στο σημείο $(1, -2, 12)$ είναι

$$z = f(1, -2) + f_x(1, -2)(x - 1) + f_y(1, -2)(y + 2)$$

και αφού $f_x = 12x^2y^2$ και $f_y = 8x^3y + 2$ βρίσκουμε ότι η εξίσωση θα είναι

$$48x - 14y - z = 64.$$

(β) Θέτουμε

$$f(x, y, z) = e^{x-2y} + x^2 \sin z - 1$$

και επομένως το $\nabla f(2, 1, 0) = (1, -2, 4)$ είναι κάθετο διάνυσμα στην ισοσταθμική επιφάνεια $f(x, y, z) = 0$. Η ζητούμενη εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου θα είναι

$$x - 2y + 4z = 0.$$

□

Άσκηση 2. Έστω $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Θέτουμε $F(x, y) = g(f(x, y))$. Αποδείξτε ότι για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ τα διανύσματα $\nabla f(x, y)$ και $\nabla F(x, y)$ είναι παράλληλα.

Υπόδειξη: $F_x(x, y) = g'(f(x, y)) \cdot f_x(x, y)$ και $F_y(x, y) = g'(f(x, y)) \cdot f_y(x, y)$ και άρα $\nabla F(x, y) = \lambda \nabla f(x, y)$, με $\lambda = g'(f(x, y))$. □

Άσκηση 3. Αν η συνάρτηση $f(u, v)$ είναι παραγωγίσιμη, αποδείξτε ότι για τη συνάρτηση

$$F(x, y, z) = x^2 f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$$

ισχύει

$$xF_x + yF_y + zF_z = 2F.$$

Υπόδειξη: Θέτουμε $u = \frac{y}{x}$, $v = \frac{z}{x}$ και από τον κανόνα της αλυσίδας (και τους κανόνες παραγώγισης) έχουμε

$$\begin{aligned} F_x &= 2xf\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) - yf_u - zf_v \\ F_y &= xf_u \\ F_z &= xf_v. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$xF_x + yF_y + zF_z = 2F.$$

□

Άσκηση 4. Έστω $f(u, v)$ παραγωγίσιμη συνάρτηση και

$$g(x, y) = f(x - y, y - x).$$

Να υπολογίσετε τις μερικές παραγώγους $g_x(1, 1)$ και $g_y(1, 1)$, αν είναι γνωστό ότι $f_u(0, 0) = 2$ και $f_v(0, 0) = 1$.

Υπόδειξη: Αν $u = x - y$ και $v = y - x$, τότε $u_x = 1$, $u_y = -1$, $v_x = -1$ και $v_y = 1$. Συνεπώς

$$g_x = f_u u_x + f_v v_x = f_u - f_v.$$

Όμως $g(1, 1) = f(0, 0)$ και άρα

$$g_x(1, 1) = f_u(0, 0) - f_v(0, 0) = 1.$$

Αντίστοιχα $g_y(1, 1) = -1$. □

Άσκηση 5. Έστω $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμες συναρτήσεις και $\alpha \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$u(x, t) = f(x - \alpha t) + g(x + \alpha t).$$

Αποδείξτε ότι

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Υπόδειξη: Υπολογίζουμε τις

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= -\alpha f'(x - \alpha t) + \alpha g'(x + \alpha t) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) &= f'(x - \alpha t) + g'(x + \alpha t) \end{aligned}$$

και στη συνέχεια τις

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &= \alpha^2 f''(x - \alpha t) + \alpha^2 g''(x + \alpha t) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) &= f''(x - \alpha t) + g''(x + \alpha t). \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \alpha^2 f''(x - \alpha t) + \alpha^2 g''(x + \alpha t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t)$$

για κάθε $(x, t) \in \mathbb{R}^2$. □

Άσκηση 6. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $f_x(x, y)x + f_y(x, y)y \geq 0$ για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Αποδείξτε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο στο $(0, 0)$.

Υπόδειξη: Έστω $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ με $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$. Από το θεώρημα μέσης τιμής έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0) - f(0, 0) &= f_x(\xi x_0, \xi y_0)x_0 + f_y(\xi x_0, \xi y_0)y_0 \\ &= \frac{1}{\xi} (f_x(\xi x_0, \xi y_0)\xi x_0 + f_y(\xi x_0, \xi y_0)\xi y_0). \end{aligned}$$

Θέτοντας $x = \xi x_0$ και $y = \xi y_0$ παίρνουμε

$$f(x_0, y_0) - f(0, 0) = \frac{1}{\xi} (f_x(x, y)x + f_y(x, y)y) \geq 0,$$

άρα $f(x_0, y_0) \geq f(0, 0)$. Επειδή αυτό συμβαίνει για κάθε $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, συμπεραίνουμε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο στο $(0, 0)$. □

Άσκηση 7. Έστω $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Έστω $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$F(x, y) = f(x, y, g(x, y))$$

(α) Να βρεθεί η παράγωγος της F συναρτήσει των μερικών παραγώγων της f και g .

(β) Αν $F(x, y) = 0$ για κάθε (x, y) , να εκφράσετε τις μερικές παραγώγους της g συναρτήσει των μερικών παραγώγων της f .

Υπόδειξη: (α) Για $z = g(x, y)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} F_x &= f_x + f_z \frac{\partial z}{\partial x} = f_x + f_z g_x, \\ F_y &= f_y + f_z \frac{\partial z}{\partial y} = f_y + f_z g_y, \\ F' &= [f_x \ f_y] = [f_x + f_z g_x \ f_y + f_z g_y]. \end{aligned}$$

(β) Αν $F = 0$ για κάθε (x, y) τότε $F' = [0 \ 0]$. Επομένως

$$g_x = -\frac{f_x}{f_z}, \quad g_y = -\frac{f_y}{f_z}, \quad \text{για } f_z \neq 0.$$

□

Άσκηση 8. Έστω $F(x, y) = f(ax + by) + g\left(\frac{ax}{y}\right)$, με $f, g \in C^2$ πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής και a, b πραγματικές σταθερές. Να υπολογιστούν οι $F_{xx}, F_{xy}, F_{yx}, F_{yy}$.

Υπόδειξη:

$$\begin{aligned} F_x &= af'(ax + by) + \frac{a}{y} g'\left(\frac{ax}{y}\right) \\ F_{xx} &= a^2 f''(ax + by) + \frac{a^2}{y^2} g''\left(\frac{ax}{y}\right) \\ F_y &= bf'(ax + by) - \frac{ax}{y^2} g'\left(\frac{ax}{y}\right) \\ F_{yy} &= b^2 f''(ax + by) + \left(\frac{ax}{y^2}\right)^2 g''\left(\frac{ax}{y}\right) + \frac{2ax}{y^3} g'\left(\frac{ax}{y}\right) \\ F_{xy} &= ab f''(ax + by) - \frac{a^2 x}{y^3} g''\left(\frac{ax}{y}\right) - \frac{a}{y^2} g'\left(\frac{ax}{y}\right) = F_{yx} \end{aligned}$$

□

Άσκηση 9. Έστω $f(x, y)$ παραγωγίσιμη συνάρτηση που ικανοποιεί την $f(x + t, y + t) = f(x, y)$ για όλα τα $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ και $t \in \mathbb{R}$.

(α) Αποδείξτε ότι για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ισχύει ότι $f_x(x, y) + f_y(x, y) = 0$.

(β) Αν $f_x(0, 0) \neq 0$ αποδείξτε ότι το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ δεν υπάρχει.

(γ) Αν η f είναι ειδικότερα C^2 (δηλαδή έχει συνεχείς μερικές παραγώγους έως και δεύτερης τάξης) αποδείξτε ότι $f_{xx}(x, y) = f_{yy}(x, y) = -f_{xy}(x, y)$ για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Υπόδειξη: (α) (α' τρόπος) Έστω $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ και έστω $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση

$$F(t) = f(x_0 + t, y_0 + t)$$

Από τον κανόνα της αλυσίδας για την καμπύλη $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ με $x(t) = x_0 + t$ και $y(t) = y_0 + t$, έχουμε

$$\begin{aligned} F'(t) &= f_x(x_0 + t, y_0 + t) \cdot x'(t) + f_y(x_0 + t, y_0 + t) \cdot y'(t) \\ &= f_x(x_0 + t, y_0 + t) + f_y(x_0 + t, y_0 + t) \end{aligned}$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Από την άλλη πλευρά, έχουμε $F(t) = f(x_0, y_0) = c$ και άρα

$$F'(t) = 0.$$

Συνεπώς θα πρέπει

$$f_x(x_0 + t, y_0 + t) + f_y(x_0 + t, y_0 + t) = 0 \quad (1)$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Θέτοντας στην (1) $t = 0$ έχουμε ότι

$$f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0) = 0.$$

(β' τρόπος) Από τον ορισμό της παραγωγισιμότητας της f έχουμε

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)h - f_y(x_0, y_0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0 \quad (2)$$

και άρα θέτοντας $h = k = t$ και χρησιμοποιώντας την $f(x_0 + t, y_0 + t) = f(x_0, y_0)$ για όλα τα $t \in \mathbb{R}$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t, y_0 + t) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)t - f_y(x_0, y_0)t}{\sqrt{2}|t|} &= 0 \implies \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_x(x_0, y_0)t + f_y(x_0, y_0)t}{|t|} &= 0 \implies f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0) = 0. \end{aligned}$$

(β) Θέτουμε $f_x(0, 0) = a \neq 0$. Τότε, από το (α) έχουμε $f_y(0, 0) = -a$ και από τον ορισμό της παραγωγισιμότητας της f στο $(0, 0)$ έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)x - f_y(0, 0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - ax + ay}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \implies \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{f(x, y) - f(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} - a \frac{x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Συνεπώς, αν το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = L$ υπήρχε θα είχαμε ότι

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{L}{a}.$$

Όμως το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ δεν υπάρχει. Πράγματι, για $x = y = t$, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$ ενώ για

$x = t > 0$ και $y = -t$ παίρνουμε $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(γ) Από το (α) έχουμε $f_x + f_y = 0 \Rightarrow f_x = -f_y$. Παραγωγίζοντας ως προς x παίρνουμε

$$f_x = -f_y \Rightarrow f_{xx} = -f_{yx}. \quad (3)$$

Ομοίως, $f_x + f_y = 0 \Rightarrow f_y = -f_x$ και παραγωγίζοντας ως προς y παίρνουμε

$$f_y = -f_x \Rightarrow f_{yy} = -f_{xy}. \quad (4)$$

Επειδή η f είναι C^2 , από το θεώρημα Schwarz έχουμε $f_{xy} = f_{yx}$ και άρα από τις (3) και (4) παίρνουμε ότι $f_{xx} = f_{yy} = -f_{xy}$. $\square$

Άσκηση 10. Έστω f μία C^2 συνάρτηση και $w = f(x, y)$. Αν $x = u + v$ και $y = u - v$, αποδείξτε ότι

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

Υπόδειξη: Έχουμε τα εξής

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial u} \\ &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{aligned}$$

□

Άσκηση 11. Η διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

καλείται διαφορική εξίσωση Laplace και κάθε λύση της καλείται αρμονική συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ είναι αρμονική.

Υπόδειξη: Με απευθείας υπολογισμό βλέπουμε ότι

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

□

Άσκηση 12. (α) Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f(x, y)$ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους έως και δεύτερης τάξης. Αποδείξτε ότι αν $x = r \cos \theta$ και $y = r \sin \theta$ είναι ο μετασχηματισμός σε πολικές συντεταγμένες, τότε

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

(β) Να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές λύσεις $f(x, y)$ της εξίσωσης Laplace σε δύο διαστάσεις (βλ. Άσκηση 11), οι οποίες εξαρτώνται μόνο από το $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, δηλαδή μόνο από την απόσταση του σημείου (x, y) από την αρχή των αξόνων.

Υπόδειξη: (α) Έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta. \end{aligned}$$

Οπότε

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial r} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial r} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial r^2} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cos^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Αντίστοιχα,

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial f}{\partial x} r \sin \theta + \frac{\partial f}{\partial y} r \cos \theta .$$

Οπότε,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \theta^2} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} r^2 \sin^2 \theta - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} r^2 \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} r^2 \cos^2 \theta - \frac{\partial f}{\partial x} r \cos \theta - \frac{\partial f}{\partial y} r \sin \theta . \end{aligned}$$

Τελικά,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} .$$

(β) Αφού η f θα είναι λύση της εξίσωσης Laplace σε δύο διαστάσεις θα ισχύει

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 .$$

Χρησιμοποιώντας επομένως το (α) θα έχουμε ότι

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = 0 .$$

Αλλά εφόσον η f εξαρτάται μόνο από το r

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = 0$$

και άρα

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} = 0 .$$

Το τελευταίο είναι ισοδύναμο με

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) = 0$$

και συνεπώς

$$r \frac{\partial f}{\partial r} = c_1 \implies \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{c_1}{r} .$$

Αρα,

$$f = c_1 \ln r + c_2 .$$

□

Άσκηση 13. Σε αντιστοιχία με την Άσκηση 11, μια συνάρτηση f τριών μεταβλητών καλείται αρμονική αν ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση Laplace σε τρεις διαστάσεις, δηλαδή

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 .$$

Αν η f είναι αρμονική και

$$2x = u^2 - v^2, y = uv, z = w ,$$

αποδείξτε ότι

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + (u^2 + v^2) \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} = 0 .$$

Υπόδειξη: Έχουμε ότι

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}u + \frac{\partial f}{\partial y}v$$

και

$$\frac{\partial f}{\partial v} = -\frac{\partial f}{\partial x}v + \frac{\partial f}{\partial y}u.$$

Παραγωγίζοντας ξανά βλέπουμε ότι

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}u^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}uv + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}v^2$$

και

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = -\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}v^2 - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}uv + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}u^2.$$

Επίσης

$$\frac{\partial^2 f}{\partial w^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Οπότε, χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι η f είναι αρμονική, έχουμε ότι

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + (u^2 + v^2)\frac{\partial^2 f}{\partial w^2} = 0.$$

□

Άσκηση 14. (α) Αποδείξτε ότι η $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $u(x, t) = e^{bt-ax}$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$, ικανοποιεί την εξίσωση διάχυσης $u_t = cu_{xx}$.

(β) Αποδείξτε ότι η $u(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ για $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ είναι αρμονική συνάρτηση.

(γ) Αποδείξτε ότι η $u(x, y) = e^{-x/2}f(5x - 2y)$, για τυχούσα C^2 συνάρτηση f , επαληθεύει την

$$2u_x + 5u_y + u = 0.$$

Υπόδειξη: (α) Η u είναι C^∞ στο $\mathbb{R}^2$.

$$u_x = -ae^{bt-ax}, \quad u_{xx} = a^2e^{bt-ax}, \quad u_t = be^{bt-ax}.$$

Οπότε για $c = b/a^2$ έχουμε $u_t = cu_{xx}$.

(β) Έστω $w = w(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Οπότε $u(x, y, z) = h(w(x, y, z))$ με $h(w) = 1/w$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dh}{dw} \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{w^2} \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = -\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = -\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

Αλλιώς $f(x, y) = 1$ και $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}g - f\frac{\partial g}{\partial x}}{g^2} = -\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2} = -\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

Έστω τώρα $f(x, y) = x$ και $g(x, y) = (x^2 + y^2 + z^2)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} u \right) = (\text{ομοίως με πριν}) = \frac{-g^{3/2} - x \frac{\partial}{\partial x}(g^{3/2})}{g^3} = \frac{-g^{3/2} + x \frac{3}{2} 2x g^{1/2}}{g^3} \\ &= \frac{2x^2 - y^2 - z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \end{aligned}$$

Λόγω συμμετρίας της u ως προς x, y, z έχουμε

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2y^2 - x^2 - z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$$

Οπότε $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ και άρα u αρμονική.

(γ) Υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{-x/2} f(5x - 2y) \right) = \frac{\partial e^{-x/2}}{\partial x} f(5x - 2y) + e^{-x/2} \frac{\partial f(5x - 2y)}{\partial x} \\ &= \frac{-1}{2} e^{-x/2} f(5x - 2y) + 5e^{-x/2} f'(5x - 2y) \frac{\partial(5x - 2y)}{\partial x} = \frac{-1}{2} e^{-x/2} f(5x - 2y) + 5e^{-x/2} f'(5x - 2y) \\ u_y &= \dots = -2e^{-x/2} f'(5x - 2y) \end{aligned}$$

και τελικά

$$2u_x + 5u_y + u = -e^{-x/2} f(5x - 2y) + 10e^{-x/2} f'(5x - 2y) - 10e^{-x/2} f'(5x - 2y) + e^{-x/2} f(5x - 2y) = 0.$$

□

Άσκηση 15. (α) Αποδείξτε ότι η $u(x, y) = f(bx - ay)$, όπου $f \in C^2(\mathbb{R})$, επαληθεύει την εξίσωση

$$au_x + bu_y = 0.$$

(β) Αποδείξτε ότι η $u(x, y) = f(bx - ay)e^{cx/a}$, όπου $f \in C^2(\mathbb{R})$, επαληθεύει την εξίσωση

$$au_x + bu_y = cu, \quad c \neq 0.$$

Υπόδειξη: (α) Υπολογίζουμε τις $u_x(x, y) = bf'(bx - ay)$ και $u_y(x, y) = -af'(bx - ay)$. Έπεται ότι

$$au_x(x, y) + bu_y(x, y) = abf'(bx - ay) - abf'(bx - ay) = 0.$$

(β) Υπολογίζουμε τις $u_x(x, y) = bf'(bx - ay)e^{cx/a} + \frac{c}{a}f(bx - ay)e^{cx/a}$ και $u_y(x, y) = -af'(bx - ay)e^{cx/a}$. Έπεται ότι

$$\begin{aligned} au_x(x, y) + bu_y(x, y) &= abf'(bx - ay)e^{cx/a} + cf(bx - ay)e^{cx/a} - abf'(bx - ay)e^{cx/a} \\ &= cf(bx - ay)e^{cx/a} = cu(x, y). \end{aligned}$$

□