Αρμονική Ανάλυση (2025–26)
Ασκήσεις – Φυλλάδιο 1

(Παραδίδετε έξι από τις ασκήσεις. Ημερομηνία παράδοσης: 29 Μαρτίου 2026)

1. (α) Έστω $f_n, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f_n \longrightarrow f$ ομοιόμορφα. Υποθέτουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

(β) Αν $f_n, g_n : [0,1] \to [0,1]$ είναι συνεχείς συναρτήσεις και $f_n \to f$, $g_n \to g$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$, αποδείξτε ότι η ακολουθία (h_n) όπου $h_n = f_n \circ g_n$ (δηλ. $h_n(x) = f_n(g_n(x))$) συγκλίνει ομοιόμορφα στην $h = f \circ g$.

2. Δίνεται η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) όπου $f_n : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = \frac{x^2}{x^2 + (1 - nx)^2}, \qquad x \in [0,+\infty).$$

(α) Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο στη συνάρτηση $f \equiv 0$.

(β) Αποδείξτε ότι η σύγκλιση της (f_n) στην f δεν είναι ομοιόμορφη στο διάστημα $[0,+\infty)$, αλλά είναι ομοιόμορφη σε κάθε διάστημα της μορφής $[\alpha,+\infty)$, όπου $\alpha > 0$.

3. Εξετάστε αν οι σειρές συναρτήσεων

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{k(1 + kx^3)} \qquad \text{και} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^3 e^{-k^2 x}$$

συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $[0,+\infty)$.

4. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k \sin(kx)}{k!}$ συγκλίνει απολύτως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k \sin(kx)}{k!}$$

είναι συνεχής.

5. Δίνεται η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) όπου $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = e^{-x^2/n^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(α) Εξετάστε την (f_n) ως προς την κατά σημείο και την ομοιόμορφη σύγκλιση.

(β) Εξετάστε τη σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - e^{-x^2/k^2})$$

ως προς την κατά σημείο και την ομοιόμορφη σύγκλιση.

6. Έστω $f \in C^1(\mathbb{T})$ με $|f'(x) - f'(y)| \leqslant M|x-y|^\alpha$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ (για κάποιο $M > 0$ και $0 < \alpha \leqslant 1$). Αποδείξτε ότι $s_n(f) \longrightarrow f$ ομοιόμορφα.

7. Έστω $f \in C(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = 0$ για κάθε $k \geqslant 0$. Αποδείξτε ότι η f είναι περιττή συνάρτηση.

8. (α) Έστω $f \in C(\mathbb{T})$ και $g \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ ώστε $f * g = f$. Αποδείξτε ότι η f είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο.
(β) Έστω (f_n) ακολουθία στον $\mathcal{R}(\mathbb{T})$ με την ιδιότητα: για κάθε $g \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$,

$$\lim_{n\to\infty} \|g - g * f_n\|_1 = 0.$$

Αποδείξτε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \widehat{f_n}(k) = 1$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

9. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η 2π-περιοδική συνάρτηση με

$$f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{για } |x| \leqslant \pi.$$

Υπολογίστε τη σειρά Fourier της f και χρησιμοποιώντας την υπολογίστε το

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}.$$

10. Αποδείξτε ότι για κάθε πραγματική συνάρτηση $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ ισχύει η ταυτότητα

$$\pi b_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi/n} \left[f\left(\frac{2k\pi}{n} + \theta\right) - f\left(\frac{2k\pi}{n} + \frac{\pi}{n} + \theta\right)\right] \sin n\theta\,d\theta.$$

για κάθε $n \geqslant 1$ και συμπεράνατε ότι αν η f είναι φθίνουσα στο $(0, 2\pi)$ τότε $b_n(f) \geqslant 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.