ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
(Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών - Διανυσματική Ανάλυση)
1ο Φυλλάδιο Ασκήσεων (υποδείξεις)

Άσκηση 1. Έστω $x, y \in \mathbb{R}^d$. Αποδείξτε ότι:

(α) $2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2$.

(β) $\|x+y\| \cdot \|x-y\| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2$, με ισότητα αν και μόνο αν $\langle x, y\rangle = 0$.

Υπόδειξη: (α) Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle + \langle x,x\rangle - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle \\ &= 2\langle x,x\rangle + 2\langle y,y\rangle = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.\end{aligned}$$

(β) Χρησιμοποιώντας την ανισότητα $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ που ισχύει για κάθε $a, b \geq 0$, από το (α) παίρνουμε

$$\|x+y\| \cdot \|x-y\| \leq \frac{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}{2} = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

□

Άσκηση 2. Έστω x και y μη μηδενικά διανύσματα στον $\mathbb{R}^d$. Αποδείξτε ότι:

(α) Τα διανύσματα $\|y\|x + \|x\|y$ και $\|y\|x - \|x\|y$ είναι ορθογώνια.

(β) Το διάνυσμα $z = \|x\|y + \|y\|x$ διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν τα x και y.

[*Υπόδειξη:* Η γωνία που σχηματίζουν δύο μη μηδενικά διανύσματα x και y είναι η μοναδική γωνία $\theta \in [0, \pi]$ με $\cos\theta = \dfrac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$.]

Υπόδειξη: (α) Υπολογίζουμε το εσωτερικό γινόμενο

$$\begin{aligned}(\|y\|x + \|x\|y) \cdot (\|y\|x - \|x\|y) &= \|y\|^2\langle x,x\rangle - \|y\|\,\|x\|\langle x,y\rangle + \|x\|\,\|y\|\langle y,x\rangle - \|x\|^2\langle y,y\rangle \\ &= \|y\|^2\|x\|^2 - \|x\|^2\|y\|^2 = 0.\end{aligned}$$

(β) Η γωνία που σχηματίζουν δύο μη μηδενικά διανύσματα u και v είναι η μοναδική γωνία $\theta \in [0, \pi]$ με

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}.$$

Συνεπώς, η γωνία θ που σχηματίζουν τα z και x έχει συνημίτονο ίσο με

$$\frac{1}{\|z\|\,\|x\|}\langle \|x\|y + \|y\|x, x\rangle = \frac{1}{\|z\|\,\|x\|}(\|x\|\langle y,x\rangle + \|y\|\,\|x\|^2) = \frac{1}{\|z\|}(\langle y,x\rangle + \|y\|\,\|x\|)$$

και η γωνία φ που σχηματίζουν τα z και y έχει συνημίτονο ίσο με

$$\frac{1}{\|z\|\,\|y\|}\langle \|x\|y + \|y\|x, y\rangle = \frac{1}{\|z\|\,\|y\|}(\|y\|\langle x,y\rangle + \|x\|\,\|y\|^2) = \frac{1}{\|z\|}(\langle x,y\rangle + \|x\|\,\|y\|).$$

Αφού οι θ, φ έχουν το ίδιο συνημίτονο και ανήκουν στο $[0, \pi]$, έπεται ότι $\theta = \varphi$. □

Άσκηση 3. Έστω $B = \{\|x\| \in \mathbb{R}^d : \|x\| < 1\}$ η ανοικτή μοναδιαία μπάλα του $\mathbb{R}^d$.

(α) Έστω $x \in B$. Αποδείξτε ότι για κάθε $y \in \mathbb{R}^d$ με $\|y - x\| < 1 - \|x\|$ ισχύει ότι $y \in B$ (δηλ. $\|y\| < 1$). Συμπεράνατε ότι η ανοικτή μοναδιαία μπάλα είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$.

(β) Αποδείξτε ότι η B είναι κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Δηλαδή, αν $x, y \in B$ τότε για κάθε $t \in (0,1)$ ισχύει ότι $(1-t)x + ty \in B$.

Υπόδειξη: (α) Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε

$$\|y\| = \|(y-x) + x\| \leq \|y - x\| + \|x\| < 1 - \|x\| + \|x\| = 1,$$

άρα $y \in B$. Αυτό δείχνει ότι για κάθε $x \in B$ αν θέσουμε $\delta = 1 - \|x\| > 0$ τότε η ανοικτή μπάλα $B(x,\delta)$ περιέχεται στην B, δηλαδή το x είναι εσωτερικό σημείο της B. Άρα, η B είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$.

(β) Έχουμε $\|x\| < 1$ και $\|y\| < 1$. Για κάθε $t \in (0,1)$, από τις ιδιότητες της Ευκλείδειας νόρμας παίρνουμε

$$\|(1-t)x + ty\| \leq \|(1-t)x\| + \|ty\| = (1-t)\|x\| + t\|y\| < (1-t)\cdot 1 + t \cdot 1 = 1,$$

άρα $(1-t)x + ty \in B$. □

Άσκηση 4. Αποδείξτε ότι το σύνολο $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ και } y > 0\}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.

Υπόδειξη: Έστω $(x_0, y_0) \in U$. Ορίζουμε $\delta = \min\{x_0, y_0\} > 0$ (διότι $x_0 > 0$ και $y_0 > 0$). Τότε, αν $(x,y) \in B((x_0,y_0),\delta)$ (στην ανοικτή μπάλα με κέντρο το (x_0,y_0) και ακτίνα δ) έχουμε ότι

$$|x - x_0| \leq \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$$

άρα $x > x_0 - \delta \geq 0$, δηλαδή $x > 0$. Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι $|y - y_0| < \delta$, άρα $y > 0$. Αυτό δείχνει ότι $(x,y) \in U$ για κάθε $(x,y) \in B((x_0,y_0),\delta)$, δηλαδή το (x_0,y_0) είναι εσωτερικό σημείο του U.

Αφού το (x_0,y_0) ήταν τυχόν σημείο του U, το U είναι ανοικτό σύνολο. □

Άσκηση 5. Έστω $F \subseteq \mathbb{R}^d$. Αποδείξτε ότι το F είναι κλειστό αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία (x_n) με $x_n \in F$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $x_n \to x \in \mathbb{R}^d$ ισχύει ότι $x \in F$.

Υπόδειξη: ($\Longrightarrow$) Υποθέτουμε προς απαγωγή σε άτοπο ότι υπάρχει ακολουθία (x_n) με $x_n \in F$ και $x = \lim x_n \notin F$. Τότε, $x \in \mathbb{R}^d \setminus F$ και (αφού το F είναι κλειστό) το $\mathbb{R}^d \setminus F$ είναι ανοικτό, άρα υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $\|y - x\| < \delta \implies y \in \mathbb{R}^d \setminus F$. Όμως, η (x_n) συγκλίνει στο x, άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\|x_n - x\| < \delta$ για κάθε $n \geq n_0$. Συνεπώς, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε ότι $x_n \in \mathbb{R}^d \setminus F$, και καταλήγουμε σε άτοπο.

($\Longleftarrow$) Έστω ότι το F δεν είναι κλειστό. Τότε, το $\mathbb{R}^n \setminus F$ δεν είναι ανοικτό, άρα υπάρχει $x \notin F$ που δεν είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}^d \setminus F$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ η ανοικτή μπάλα με κέντρο το x και ακτίνα ε δεν περιέχεται ολόκληρη στο $\mathbb{R}^d \setminus F$, άρα υπάρχει $y \in F$ τέτοιο ώστε $\|x - y\| < \varepsilon$. Εφαρμόζοντας αυτήν την παρατήρηση με $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$ βρίσκουμε $y_n \in F$ τέτοια ώστε $\|x - y_n\| < \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε, $\|x - y_n\| \to 0$ άρα $y_n \to x$ και όλα τα y_n ανήκουν στο F, άρα η υπόθεση μας δίνει ότι $x \in F$, και έχουμε οδηγηθεί σε άτοπο. □

Άσκηση 6. Έστω $F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \cdots$ μια φθίνουσα ακολουθία μη κενών κλειστών και φραγμένων υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$. Αποδείξτε ότι

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \varnothing.$$

Υπόδειξη: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ επιλέγουμε $x_n \in F_n$. Αφού η (F_n) είναι φθίνουσα, έχουμε $x_n \in F_1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και αφού το F_1 είναι φραγμένο σύνολο, η ακολουθία (x_n) είναι φραγμένη. Από το θεώρημα Bolzano-Weierstrass, υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) οποία συγκλίνει σε κάποιο $x \in \mathbb{R}^d$. Θα δείξουμε ότι $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, οπότε $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \varnothing$.

Έστω $m \in \mathbb{N}$. Για κάθε $n \geq m$ έχουμε $k_n \geq k_m \geq m$, και αφού $x_{k_n} \in F_{k_n}$ και $F_{k_n} \subseteq F_m$ έχουμε ότι $x_{k_n} \in F_m$. Η ακολουθία $(x_{k_n})_{n \geq m}$ είναι υπακολουθία της (x_{k_n}), περιέχεται στο κλειστό σύνολο F_m και συγκλίνει στο x. Από την προηγούμενη άσκηση συμπεραίνουμε ότι $x \in F_m$. Το $m \in \mathbb{N}$ ήταν τυχόν, άρα $x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} F_m$. □

Άσκηση 7. Έστω v μη μηδενικό διάνυσμα στον $\mathbb{R}^d$ και έστω $t \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι ο ημίχωρος

$$H = \{x \in \mathbb{R}^d : \langle v, x\rangle < t\}$$

είναι ανοικτό σύνολο. Στη συνέχεια, αποδείξτε ότι ο ημίχωρος $F = \{x \in \mathbb{R}^d : \langle v, x\rangle \geq t\}$ και το υπερεπίπεδο $C = \{x \in \mathbb{R}^d : \langle v, x\rangle = t\}$ είναι κλειστά σύνολα.

Υπόδειξη: Έστω $x_0 \in H$, δηλαδή $\langle v, x_0\rangle < t$. Πρέπει να βρούμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για όλα τα $y \in \mathbb{R}^d$ με $\|y - x_0\| < \delta$ να ισχύει ότι $y \in H$, δηλαδή $\langle v, y\rangle < t$. Παρατηρούμε ότι αν $y \in \mathbb{R}^d$ και $\|y - x_0\| < \delta$ τότε από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$\langle v, y\rangle = \langle v, y - x_0\rangle + \langle v, x_0\rangle \leq \|v\|\, \|y - x_0\| + \langle v, x_0\rangle \leq \delta\|v\| + \langle v, x_0\rangle,$$

άρα αρκεί να επιλέξουμε το δ έτσι ώστε $0 < \delta < \dfrac{1}{\|v\|}(t - \langle v, x_0\rangle)$.

Παρατηρούμε ότι $F = \mathbb{R}^d \setminus H$ άρα το F είναι κλειστό σύνολο. Ομοίως, ο ημίχωρος

$$F' = \{x \in \mathbb{R}^d : \langle v, x\rangle \leq t\} = \{x \in \mathbb{R}^d : \langle -v, x\rangle \geq t\}$$

είναι κλειστό σύνολο, άρα το υπερεπίπεδο $C = F \cap F'$ είναι κλειστό σύνολο (η τομή δύο κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο, ή ισοδύναμα η ένωση δύο ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο – εξηγήστε γιατί). $\square$

Άσκηση 8. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει το όριο $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\,, \quad f(x,y) = \frac{x^4y^4}{(x^2 + y^4)^3}$$
$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^4 + y^4}\,, \quad f(x,y) = \frac{x - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Υπόδειξη: (α) Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} 1 = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{-y^2}{y^2} = \lim_{y\to 0}(-1) = -1.$$

Τα δύο όρια είναι διαφορετικά, άρα το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ δεν υπάρχει.

(β) Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^8}{(x^2 + x^4)^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{(1 + x^2)^3} = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0} f(x^2,x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^{12}}{(2x^4)^3} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{8} = \frac{1}{8}.$$

Τα δύο όρια είναι διαφορετικά, άρα το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4y^4}{(x^2 + y^4)^3}$ δεν υπάρχει.

(γ) Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} 0 = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{2x^4} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Τα δύο όρια είναι διαφορετικά, άρα το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^4 + y^4}$ δεν υπάρχει.

(δ) Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x\to 0^+} f(x,0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{-y^2}{y^2} = \lim_{y\to 0}(-1) = -1.$$

Τα δύο όρια είναι διαφορετικά, άρα το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x - y^2}{x^2 + y^2}$ δεν υπάρχει. $\square$

Άσκηση 9. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}\ .$$

Αποδείξτε ότι κατά μήκος κάθε ευθείας $y = \lambda x$, το $f(x,y)$ προσεγγίζει το 0, καθώς $(x,y) \to 0$, αλλά δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Υπόδειξη: Για κάθε $\lambda \neq 0$ έχουμε

$$\lim_{x\to 0} f(x,\lambda x) = \lim_{x\to 0} \frac{\lambda x^3}{x^4 + \lambda^2 x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\lambda x}{x^2 + \lambda^2} = 0$$

και επίσης, για $\lambda = 0$,

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^4} = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

Όμως,

$$\lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Τα δύο όρια είναι διαφορετικά, άρα το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-y^2}{x^2+y^2}$ δεν υπάρχει. □

Άσκηση 10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$, ορισμένη στο $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \neq 0\}$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = -1.$$

Εξετάστε αν υπάρχει το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Υπόδειξη: Για κάθε $x \neq 0$ έχουμε ότι $x + y \neq 0$ αν το y είναι αρκετά κοντά στο 0, δηλαδή $(x,y) \in A$, και

$$\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{x-y}{x+y} = \frac{x}{x} = 1,$$

άρα

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{x\to 0} 1 = 1.$$

Ομοίως, για κάθε $y \neq 0$ έχουμε ότι $x + y \neq 0$ αν το x είναι αρκετά κοντά στο 0, δηλαδή $(x,y) \in A$, και

$$\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x-y}{x+y} = \frac{-y}{y} = -1,$$

άρα

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0}(-1) = -1.$$

Το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει, διότι

$$\lim_{(t,0)\to(0,0)} f(t,0) = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{(0,t)\to(0,0)} f(0,t) = -1.$$

Άσκηση 11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$, ορισμένη στο $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2y^2 + (x-y)^2 \neq 0\}$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = 0,$$

αλλά το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει.

Υπόδειξη: Για κάθε $x \neq 0$ έχουμε ότι $x^2y^2 + (x-y)^2 \neq 0$ αν το y είναι αρκετά κοντά στο 0, δηλαδή $(x,y) \in A$, και

$$\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \frac{0}{x^2} = 0,$$

άρα

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

Ομοίως, για κάθε $y \neq 0$ έχουμε ότι $x^2y^2 + (x-y)^2 \neq 0$ αν το x είναι αρκετά κοντά στο 0, δηλαδή $(x,y) \in A$, και

$$\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \frac{0}{y^2} = 0,$$

άρα

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

Το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει, διότι

$$\lim_{(t,0)\to(0,0)} f(t,0) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{(t,t)\to(0,0)} f(t,t) = 1.$$

Άσκηση 12. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x,y) = x \sin\frac{1}{y}$ αν $y \neq 0$ και $f(x,y) = 0$ αν $y = 0$. Αποδείξτε ότι $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ αλλά

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) \neq \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right).$$

Υπόδειξη: Το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ υπάρχει, διότι $|f(x,y)| = \left|x \sin\frac{1}{y}\right| = |x| \left|\sin\frac{1}{y}\right| \leq |x|$ και $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |x| = 0$, οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε το κριτήριο παρεμβολής.

Για κάθε $x \neq 0$ έχουμε ότι δεν υπάρχει το

$$\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} x \sin\frac{1}{y}$$

διότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{y\to 0} \sin\frac{1}{y}$ (αυτό μπορείτε να το αιτιολογήσετε με την αρχή της μεταφοράς, θεωρώντας τις ακολουθίες $y_n = \frac{1}{2\pi n} \to 0$ και $y_n' = \frac{1}{2\pi n + \pi/2} \to 0$). Άρα, δεν έχει καν νόημα να μιλήσουμε για το

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right).$$

Από την άλλη πλευρά, ισχύει ότι

$$\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{y} = 0,$$

διότι $\left|x \sin\frac{1}{y}\right| \leq |x| \to 0$, άρα

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

Άσκηση 13. Υπολογίστε το όριο
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$

Υπόδειξη: Παρατηρούμε ότι $\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le \dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}|y| \le |y|$ για κάθε $(x,y)\neq(0,0)$. Από το κριτήριο παρεμβολής συμπεραίνουμε ότι $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$. □

Άσκηση 14. Έστω $a,b,c\in\mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{ax^2+bxy+cy^2}{x^2+y^2}=0.$$

Τι μπορείτε να συμπεράνετε για τους a,b,c;

Υπόδειξη: Περιοριζόμαστε στις ευθείες $x=0$, $y=0$ και $y=x$. Έχουμε
$$f(0,y)=\frac{cy^2}{y^2}=c\to 0$$
όταν $y\to 0$, άρα $c=0$. Ομοίως,
$$f(x,0)=\frac{ax^2}{x^2}=a\to 0$$
όταν $x\to 0$, άρα $a=0$. Από τα παραπάνω, $f(x,y)=\dfrac{bxy}{x^2+y^2}$, και αφού
$$f(x,x)=\frac{bx^2}{2x^2}=\frac{b}{2}\to 0$$
όταν $x\to 0$, συμπεραίνουμε ότι $b=0$. Τελικά, $a=b=c=0$. □

Άσκηση 15. (α) Έστω $x_n,x\in\mathbb{R}^d$ με $x_n\to x$. Αποδείξτε ότι $\|x_n\|\to\|x\|$.

(β) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^d\to B(0,1)$ με $f(x)=\dfrac{x}{1+\|x\|}$ είναι συνεχής 1-1 και επί, με αντίστροφη την $g:B(0,1)\to\mathbb{R}^d$ με $g(y)=\dfrac{y}{1-\|y\|}$. Αποδείξτε ότι η g είναι επίσης συνεχής.

Υπόδειξη: (α) Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε
$$\|x_n\|\le\|x_n-x\|+\|x\| \implies \|x_n\|-\|x\|\le\|x_n-x\|$$
και
$$\|x\|\le\|x-x_n\|+\|x_n\| \implies \|x\|-\|x_n\|\le\|x_n-x\|$$
δηλαδή
$$\big|\,\|x_n\|-\|x\|\,\big|\le\|x_n-x\|\longrightarrow 0.$$
Έπεται ότι $\|x_n\|\to\|x\|$.

(β) Η f είναι καλά ορισμένη αφού για κάθε $x\in\mathbb{R}^d$ έχουμε
$$\|f(x)\|=\frac{\|x\|}{1+\|x\|}<1$$
δηλαδή $f(x)\in B(0,1)$. Για το επί παρατηρούμε ότι αν $y\in B(0,1)$ τότε
$$f\left(\frac{y}{1-\|y\|}\right)=\frac{y}{1-\|y\|}\cdot\frac{1}{1+\frac{\|y\|}{1-\|y\|}}=y.$$

Τέλος, αν $f(x_1) = f(x_2) = y$ τότε $\frac{x_1}{1+\|x_1\|} = \frac{x_2}{1+\|x_2\|}$ άρα $x_1 = \lambda x_2$ όπου $\lambda = \frac{1+\|x_1\|}{1+\|x_2\|} > 0$, και

$$\frac{\lambda x_2}{1+\|\lambda x_2\|} = \frac{x_2}{1+\|x_2\|} \implies \frac{\lambda}{1+\lambda\|x_2\|} = \frac{1}{1+\|x_2\|}$$

απ' όπου έπεται ότι $\lambda = 1$ και τελικά $x_1 = x_2$. Αυτό δείχνει ότι η f είναι 1-1.

Για τη συνέχεια της f, έστω $x_n, x \in \mathbb{R}^d$ με $x_n \to x$. Από το (α) έχουμε ότι $\lambda_n := \frac{1}{1+\|x_n\|} \to \frac{1}{1+\|x\|} = \lambda$. Θα δείξουμε ότι $\lambda_n x_n \to \lambda x$, δηλαδή $f(x_n) \to f(x)$. Αυτό αποδεικνύει ότι η f είναι συνεχής στο τυχόν $x \in \mathbb{R}^d$.

Πράγματι, αρχικά παρατηρήστε ότι η $\|x_n\|$ είναι φραγμένη από κάποιον $M > 0$ ως συγκλίνουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών. Τότε,

$$\begin{aligned}\|\lambda_n x_n - \lambda x\| &= \|(\lambda_n - \lambda)x_n + \lambda(x - x_n)\| \leq |\lambda_n - \lambda|\, \|x_n\| + |\lambda|\, \|x_n - x\| \\ &\leq M\, |\lambda_n - \lambda| + |\lambda|\, \|x_n - x\| \longrightarrow 0\end{aligned}$$

και έχουμε το ζητούμενο. Για την g δουλεύουμε με τον ίδιο τρόπο. $\square$