

ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
(Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών - Διανυσματική Ανάλυση)
2ο Φυλλάδιο Ασκήσεων (2025-26)

Άσκηση 1. (α) Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους ως προς x και y της συνάρτησης

$$f(x, y) = 5x^2y^3 + \sin(x^2y) + e^{xy}.$$

(β) Ομοίως για τη συνάρτηση $g(x, y) = x^y$, $x > 0$ και $y \in \mathbb{R}$.

(γ) Είναι οι παραπάνω συναρτήσεις παραγωγίσιμες;

Άσκηση 2. (α) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0) = c$ για όλα τα μοναδιαία διανύσματα $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$. Αποδείξτε ότι $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = c = 0$.

(β) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ και $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ τέτοιο ώστε για κάθε μοναδιαίο $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ να ισχύει ότι $\frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0) = u_1^2$. Αποδείξτε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0) .

Άσκηση 3. (α) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ μερικώς παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.

(β) Έστω $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ μερικώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε $\nabla f(x, y) = \nabla g(x, y)$ για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x, y) = g(x, y) + c$ για όλα τα $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Άσκηση 4. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0, 0) = 0$ και $f(x, y) = \frac{2x^3 + 3xy^2 + y^3}{x^2 + y^2}$ αν $(x, y) \neq (0, 0)$.

(α) Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $(0, 0)$.

(β) Αποδείξτε, με χρήση του ορισμού της κατά κατεύθυνση παραγώγου, ότι η $\frac{\partial f}{\partial u}(0, 0)$ υπάρχει για κάθε $u = (u_1, u_2)$ μοναδιαίο διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$.

(γ) Αποδείξτε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$.

Άσκηση 5. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{αν } y = x^2 \text{ και } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

δηλαδή η f παίρνει την τιμή 0 σε όλα τα σημεία του $\mathbb{R}^2$ εκτός από τα σημεία $(x, y) \neq (0, 0)$ της παραβολής $y = x^2$, όπου λαμβάνει την τιμή 1. Δείξτε τα εξής.

(α) Η f είναι ασυνεχής στο $(0, 0)$ και άρα και μη παραγωγίσιμη.

(β) Για κάθε μοναδιαίο διάνυσμα $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ ισχύει ότι $\frac{\partial f}{\partial u}(0, 0) = 0$.

Άσκηση 6. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0, 0) = 0$ και $f(x, y) = \frac{|x| \sin x + y^3}{|x| + |y|}$ αν $(x, y) \neq (0, 0)$.

- (α) Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $(0, 0)$.
- (β) Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους $f_x(0, 0)$ και $f_y(0, 0)$.
- (γ) Αποδείξτε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$.

Άσκηση 7. Εξετάστε ως προς την παραγωγισιμότητα στο $(0, 0)$ τη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^4}$ αν $(x, y) \neq (0, 0)$ και $f(0, 0) = 0$.

Άσκηση 8. Να βρεθούν $a, b, c \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{e^{xy} - c - ax - by}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}} = 0.$$

Είναι τα a, b, c μονοσήμαντα ορισμένα;

Άσκηση 9. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y) = \frac{x^5}{x^4 + y^6}$ αν $(x, y) \neq (0, 0)$ και $f(0, 0) = 0$.

- (α) Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $(0, 0)$.
- (β) Δείξτε με χρήση του ορισμού της κατά κατεύθυνση παραγώγου ότι η $\frac{\partial f}{\partial u}(0, 0)$ υπάρχει για κάθε $u = (u_1, u_2)$ μοναδιαίο διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$.
- (γ) Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$.

Άσκηση 10. Έστω

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^2}{x^2 + y^4} & , \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι της f στο $(0, 0)$. Είναι η f συνεχής; Παραγωγίσιμη;

Άσκηση 11. Να βρείτε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της επιφάνειας $z = y \cos(x - y)$, στο σημείο $(2, 2, 2)$.

Άσκηση 12. (α) Αποδείξτε ότι το εφαπτόμενο επίπεδο στην επιφάνεια $xyz = 1$ σε ένα σημείο της επιφάνειας δεν είναι ποτέ οριζόντιο.

(β) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y) = x^3 + y^3 + xy$. Να βρεθεί το μοναδιαίο διάνυσμα $u = (u_1, u_2)$ για το οποίο μεγιστοποιείται η κατευθυνόμενη παράγωγος $\frac{\partial f}{\partial u}(1, 1)$.

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοιχτό και $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Αν οι f και g έχουν την ίδια τιμή και τις ίδιες μερικές παραγώγους στο (x_0, y_0) , τότε τα γραφήματά τους έχουν το ίδιο εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα γραφήματά τους εφάπτονται στο σημείο αυτό.

Άσκηση 13. Να βρείτε τα σημεία στα οποία εφάπτονται τα γραφήματα των συναρτήσεων $f(x, y) = x^2 - 2xy - y^2$ και $g(x, y) = x^2 - 3xy + 4x - 16$. Ποιό είναι το κοινό εφαπτόμενο επίπεδο;

Άσκηση 14. Ένα έντομο βρίσκεται μέσα σε τοξικό περιβάλλον. Ο βαθμός τοξικότητας, στο σημείο (x, y) , δίνεται από τη συνάρτηση

$$T(x, y) = 2x^2 - 4y^2.$$

Το έντομο βρίσκεται στο σημείο $(-1, 2)$. Σε ποιά κατεύθυνση πρέπει να κινηθεί για να βρεθεί το ταχύτερο δυνατόν σε περιοχή χαμηλότερης τοξικότητας;

Άσκηση 15. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση και $u \in \mathbb{R}^2$. Αν $g(x) = f(\langle u, x \rangle)$, $x \in \mathbb{R}^2$ και $v \in \mathbb{R}^2$ μοναδιαίο διάνυσμα τέτοιο ώστε $v \perp u$, να δείξετε ότι

$$v \perp \nabla g(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^2.$$

Ποιός είναι ο ρυθμός μεταβολής της g στην κατεύθυνση v ;