ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
(Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών - Διανυσματική Ανάλυση)
1ο Φυλλάδιο Ασκήσεων (2025-26)

Άσκηση 1. Έστω $x, y \in \mathbb{R}^d$. Αποδείξτε ότι:

(α) $2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2$.

(β) $\|x+y\| \cdot \|x-y\| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2$, με ισότητα αν και μόνο αν $\langle x, y\rangle = 0$.

Άσκηση 2. Έστω x και y μη μηδενικά διανύσματα στον $\mathbb{R}^d$. Αποδείξτε ότι:

(α) Τα διανύσματα $\|y\|x + \|x\|y$ και $\|y\|x - \|x\|y$ είναι ορθογώνια.

(β) Το διάνυσμα $z = \|x\|y + \|y\|x$ διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν τα x και y.

[*Υπόδειξη:* Η γωνία που σχηματίζουν δύο μη μηδενικά διανύσματα x και y είναι η μοναδική γωνία $\theta \in [0, \pi]$ με $\cos\theta = \dfrac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$.]

Άσκηση 3. Έστω $B = \{\|x\| \in \mathbb{R}^d : \|x\| < 1\}$ η ανοικτή μοναδιαία μπάλα του $\mathbb{R}^d$.

(α) Έστω $x \in B$. Αποδείξτε ότι για κάθε $y \in \mathbb{R}^d$ με $\|y - x\| < 1 - \|x\|$ ισχύει ότι $y \in B$ (δηλ. $\|y\| < 1$). Συμπεράνατε ότι η ανοικτή μοναδιαία μπάλα είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$.

(β) Αποδείξτε ότι η B είναι κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Δηλαδή, αν $x, y \in B$ τότε για κάθε $t \in (0,1)$ ισχύει ότι $(1-t)x + ty \in B$.

Άσκηση 4. Αποδείξτε ότι το σύνολο $U = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ και } y > 0\big\}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.

Άσκηση 5. Έστω $F \subseteq \mathbb{R}^d$. Αποδείξτε ότι το F είναι κλειστό αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία (x_n) με $x_n \in F$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $x_n \to x \in \mathbb{R}^d$ ισχύει ότι $x \in F$.

Άσκηση 6. Έστω $F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \cdots$ μια φθίνουσα ακολουθία μη κενών κλειστών και φραγμένων υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$. Αποδείξτε ότι

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \varnothing.$$

[*Υπόδειξη:* Επιλέξτε $x_n \in F_n$, $n \in \mathbb{N}$ και εφαρμόστε το θεώρημα Bolzano-Weierstrass.]

Άσκηση 7. Έστω v μη μηδενικό διάνυσμα στον $\mathbb{R}^d$ και έστω $t \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι ο ημίχωρος

$$H = \{x \in \mathbb{R}^d : \langle v, x\rangle < t\}$$

είναι ανοικτό σύνολο. Στη συνέχεια, αποδείξτε ότι ο ημίχωρος $F = \{x \in \mathbb{R}^d : \langle v, x\rangle \geq t\}$ και το υπερεπίπεδο $C = \{x \in \mathbb{R}^d : \langle v, x\rangle = t\}$ είναι κλειστά σύνολα.

Άσκηση 8. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει το όριο $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\,, \quad f(x,y) = \frac{x^4 y^4}{(x^2 + y^4)^3}$$
$$f(x,y) = \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}\,, \quad f(x,y) = \frac{x - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Άσκηση 9. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \, .$$

Αποδείξτε ότι κατά μήκος κάθε ευθείας $y = \lambda x$, το $f(x,y)$ προσεγγίζει το 0, καθώς $(x,y) \to 0$, αλλά δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Άσκηση 10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$, ορισμένη στο $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \neq 0\}$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to 0} \lim_{y \to 0} f(x,y) = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} f(x,y) = -1.$$

Εξετάστε αν υπάρχει το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Άσκηση 11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$, ορισμένη στο $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2y^2 + (x-y)^2 \neq 0\}$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} f(x,y) = 0,$$

αλλά το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει.

Άσκηση 12. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x,y) = x \sin\frac{1}{y}$ αν $y \neq 0$ και $f(x,y) = 0$ αν $y = 0$. Αποδείξτε ότι $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ αλλά

$$\lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} f(x,y) \neq \lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} f(x,y).$$

Άσκηση 13. Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \, .$$

Άσκηση 14. Έστω $a, b, c \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{ax^2 + bxy + cy^2}{x^2+y^2} = 0.$$

Τι μπορείτε να συμπεράνετε για τους a, b, c;

Άσκηση 15. (α) Έστω $x_n, x \in \mathbb{R}^d$ με $x_n \to x$. Αποδείξτε ότι $\|x_n\| \to \|x\|$.

(β) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^d \to B(0,1)$ με $f(x) = \dfrac{x}{1+\|x\|}$ είναι συνεχής 1-1 και επί, με αντίστροφη την $g : B(0,1) \to \mathbb{R}^d$ με $g(y) = \dfrac{y}{1-\|y\|}$. Αποδείξτε ότι η g είναι επίσης συνεχής.

[*Υπόδειξη:* Για το (α) χρησιμοποιήστε την τριγωνική ανισότητα, για το (β) μπορείτε να εφαρμόσετε την αρχή της μεταφοράς.]