

ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ Ι

Άσκηση 1 Έστω Ω ένα μη αριθμήσιμο σύνολο. Ορίζουμε

$$\mathcal{A} = \{E \subset \Omega : \text{το } E \text{ ή το } \Omega \setminus E \text{ είναι αριθμήσιμο}\}.$$

Δείξτε ότι η $\mathcal{A}$ είναι μια σ -άλγεβρα υποσυνόλων του Ω .

Άσκηση 2 Θεωρείστε $\Omega = \mathbb{N}$ και $\mathcal{A}_n = \mathcal{P}(\{1, 2, \dots, n\}) \cup \{A \subset \mathbb{N} : \{n+1, n+2, \dots\} \subset A\}$. Δείξτε ότι:

α) $\{\mathcal{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ αύξουσα ακολουθία σ -αλγεβρών του Ω .

β) $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ δεν είναι σ -άλγεβρα.

Άσκηση 3 Αν τα $\mu_1, \dots, \mu_n$ είναι μέτρα πιθανότητας ορισμένα σε έναν μετρήσιμο χώρο $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ και τα $a_1, \dots, a_n$ είναι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $a_1 + \dots + a_n = 1$, δείξτε ότι και το $\pi : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ με τύπο

$$\pi(A) = \sum_{i=1}^n a_i \mu_i(A), \quad \forall A \in \mathcal{A},$$

είναι μέτρο πιθανότητας στον $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$. Επομένως, το σύνολο $\mathcal{M}(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ των μέτρων πιθανότητας ορισμένων στον $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ είναι κυρτό.

Άσκηση 4 Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ χώρος πιθανότητας. Να δειχτεί ότι:

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

2. $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A), \quad \forall A \in \mathcal{A}$.

3. $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B), \quad \forall A, B \in \mathcal{A}$.

4. Αν $A, B \in \mathcal{A}$ με $A \subseteq B$, τότε

$$\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B).$$

5. Αν $(A_n) \subseteq \mathcal{A}$, τότε

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

6. Αν $A_n \subseteq A_{n+1}$ για κάθε n (αύξουσα ακολουθία), τότε

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n).$$

7. Αν $A_n \supseteq A_{n+1}$ για κάθε n (φθίνουσα ακολουθία), τότε

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Άσκηση 5 Μια μονότονη κλάση $\mathcal{M}$ υποσυνόλων του Ω είναι μια οικογένεια υποσυνόλων του Ω η οποία είναι κλειστή ως προς αύξοντα και φθίνοντα όρια. Δηλαδή,

• Αν $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ και $A_n \subset A_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$.

• Αν $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ και $A_{n+1} \subset A_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$.

α) Δείξτε ότι αν $\{M_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ είναι μια οικογένεια από μονότονες κλάσεις, τότε η $\bigcap_{\alpha \in \mathcal{I}} M_\alpha$ είναι μονότονη κλάση.

β) Αν $\mathcal{A}$ είναι μια συλλογή υποσυνόλων του Ω , η μονότονη κλάση που παράγει η $\mathcal{A}$ είναι η τομή όλων των μονότονων κλάσεων που περιέχουν την $\mathcal{A}$. Θα τη συμβολίζουμε με $\mathfrak{m}(\mathcal{A})$ και είναι φυσικά η ελάχιστη μονότονη κλάση που περιέχει την $\mathcal{A}$. Δείξτε ότι αν η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα, τότε $\mathfrak{m}(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$.