

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ



ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες και 50 λεπτά.

9 Φεβρουαρίου 2026

ΘΕΜΑ 1ο Δίνεται το σημείο $P(6, -1, 8)$, η ευθεία $\epsilon_1: x - 1 = \frac{y + 2}{2} = \frac{z - 4}{3}$ και τα επίπεδα $\Pi_1: 2x - y + 1 = 0$ και $\Pi_2: 3x - z + 2 = 0$. [3 μον.]

- (i) Βρείτε την ορθογώνια προβολή του $\overrightarrow{OP}$ στο διάνυσμα διεύθυνσης $\vec{a}$ της ϵ_1 . [0.6]
- (ii) Βρείτε το ίχνος του σημείου P στο επίπεδο Π_1 . [0.7]
- (iii) Βρείτε τις παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας ϵ_2 που είναι η τομή των επιπέδων Π_1 και Π_2 , καθώς και τη διανυσματική εξίσωση του επιπέδου Π_2 . [0.8]
- (iv) Βρείτε την αναλυτική εξίσωση του επιπέδου Π_3 που ορίζουν οι ϵ_1 και ϵ_2 , καθώς και την απόστασή του από το παράλληλό του επίπεδο Π'_3 που είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$. [0.9]

ΘΕΜΑ 2ο Να επιλύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} -2x + \kappa y + z = -\kappa \\ x + y = \kappa \\ 2\kappa x - y + (\kappa + 2)z = 1 \end{cases} \quad \text{για τα διάφορα } \kappa \in \mathbb{R}. \quad [2 \text{ μον.}]$$

ΘΕΜΑ 3ο [3 μον.]

- A. (i) Δείξτε ότι για δύο υποχώρους $U, W \leq V$ ενός γραμμικού χώρου, η τομή τους είναι και αυτή υπόχωρος του γραμμικού χώρου. [0.4]
- (ii) Δείξτε ότι αν $\vec{u}_1, \dots, \vec{v}_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου V , τότε και τα $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. [0.4]
- B. Έστω τα σύνολα $U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 2x_2 - x_3 = 0\}$ και $V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$.
 - (i) Δείξτε ότι οι U, V είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$ και βρείτε μια βάση και την διάστασή τους. [0.9]
 - (ii) Βρείτε βάση και διάσταση των $U \cap V, U + V$ και επαληθεύστε το Θεώρημα Διάστασης. [0.9]
 - (iii) Δώστε γεωμετρική ερμηνεία για τους υπόχωρους $U, V, U \cap V, U + V$. [0.4]

ΘΕΜΑ 4ο [2 μον.]

- A. Έστω γραμμική απεικόνιση $f: V \rightarrow W$. Δείξτε ότι είναι 1-1 αν και μόνο αν $\ker f = \{\vec{0}\}$. [0.4]
- B. Έστω $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ γραμμική απεικόνιση με τύπο $f(x, y, z) = (x + 2y + z, 3x - y, 2x + y - z)$.
 - (i) Βρείτε τον πίνακα της f ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$, και τον αντίστροφό του. [0.7]
 - (ii) Βρείτε μια βάση και τη διάσταση του $\ker f$ και $\text{Im} f$. Είναι η f αυτομορφισμός; [0.9]

Καλή επιτυχία!

Χ. Βασιλακοπούλου