

ΣΕΜΦΕ
Συναρτησιακή Ανάλυση Ι
 Λύσεις του 8ου φυλλαδίου ασκήσεων

Ασκηση 1. Να δείξετε ότι το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$$

είναι συνεχής συνάρτηση.

Λύση. Αν $\lim x_n = x$ και $\lim y_n = y$, τότε

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| &= |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y \rangle + \langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle| \\ &= |\langle x_n, y_n - y \rangle + \langle x_n - x, y \rangle| \\ &\leq \|x_n\| \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \|y\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Άρα το εσωτερικό γινόμενο είναι συνεχής συνάρτηση. □

Ασκηση 2. Έστω H χώρος εσωτερικού γινομένου. Δείξτε ότι αν για μια ακολουθία (x_n) ισχύει $\lim \|x_n\| = \|x\|$ και $\lim \langle x_n, x \rangle = \langle x, x \rangle$, τότε

$$\lim x_n = x.$$

Λύση. Έχουμε ότι

$$\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 - 2\langle x_n, x \rangle + \|x\|^2.$$

Επομένως αν ισχύει η υπόθεση

$$\lim \|x_n - x\| = 0,$$

δηλαδή $\lim x_n = x$. □

Ασκηση 3. Να δείξετε ότι ο

$$Y = \{x = (x_n) \in l^2 : x_{2n} = 0, n \in \mathbb{N}\}$$

είναι κλειστός υπόχωρος του l^2 και βρείτε τον $Y^\perp$.

Λύση. Έστω (x_k) ακολουθία του Y με $\lim x_k = x$. Αν $x_k = (x_n^k)_n$ και $x = (x_n)$, τότε

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_n^k = x_n,$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Όμως $x_{2n}^k = 0$, για κάθε k και για κάθε n στο $\mathbb{N}$ και συνεπώς $x_{2n} = 0$, για κάθε n στο $\mathbb{N}$. Δηλαδή $x \in Y$ και άρα ο Y είναι κλειστός.

Αν $x = (x_n) \in Y^\perp$, τότε

$$x_{2n+1} = \langle x, e_{2n+1} \rangle = 0$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς

$$Y^\perp = \{x = (x_n) \in l^2 : x_{2n+1} = 0, n \in \mathbb{N}\}$$

□

Άσκηση 4. Έστω M, N κλειστοί υπόχωροι του χώρου Hilbert H και υποθέτουμε ότι $M \perp N$. Να δείξετε ότι το σύνολο

$$M + N = \{x + y : x \in M, y \in N\}$$

είναι επίσης κλειστός υπόχωρος του H .

Λύση. Αφού $M \perp N$ έχουμε ότι

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2, \text{ για κάθε } x \in M, y \in N.$$

Συνεπώς $\|x + y\| \geq \|x\|$ και $\|x + y\| \geq \|y\|$, για κάθε $x \in M, y \in N$.

Έστω $(x_n + y_n)$ ακολουθία του $M + N$ με $\lim(x_n + y_n) = z$. Τότε η $(x_n + y_n)$ είναι Cauchy και συνεπώς λόγω των παραπάνω ανισοτήτων θα είναι Cauchy η (x_n) και η (y_n) . Επομένως $\lim x_n = x$ και $\lim y_n = y$, με $x \in M$ και $y \in Y$, αφού M, N κλειστοί υπόχωροι του H . Άρα $z = x + y$ και ο $M + N$ είναι κλειστός υπόχωρος του H . $\square$

Άσκηση 5. Έστω $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ένα ορθοκανονικό σύνολο στον χώρο Hilbert H . Να δείξετε ότι

$$\|x - \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k\| \geq \|x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k\|,$$

για κάθε $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Λύση. Έστω $M = \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$ η γραμμική θήκη των $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Το συμπέρασμα προκύπτει διότι

$$d(x, M) = \|x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k\|.$$

$\square$

Άσκηση 6. Βρείτε τις τρεις πρώτες συναρτήσεις που προκύπτουν εφαρμόζοντας τη μέθοδο Gram-Schmidt στο σύνολο $\{x^n : n = 0, 1, \dots\}$ του $C[-1, 1]$ με τη $\|\cdot\|_2$. Στη συνέχεια βρείτε αριθμούς α, β και γ που ελαχιστοποιούν την ποσότητα

$$\int_{-1}^1 |x^4 - \alpha - \beta x - \gamma x^2|^2 dx.$$

Λύση. Έχουμε ότι

$$e_0(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}, e_1(x) = \frac{\sqrt{6}}{2}x \text{ και } e_2(x) = \frac{\sqrt{10}}{2}(3x^2 - 1).$$

Για να βρούμε την ελάχιστη τιμή της ποσότητας

$$\int_{-1}^1 |x^4 - \alpha - \beta x - \gamma x^2|^2 dx$$

αρκεί να βρούμε τους συντελεστές Fourier της συνάρτησης $f(x) = x^4$ ως προς το ορθοκανονικό σύνολο $\{e_0, e_1, e_2\}$ αφού τότε η συνάρτηση

$$g = \sum_{n=0}^2 \langle f, e_n \rangle$$

θα είναι το πλησιέστερο σημείο της f από το τη γραμμική θήκη των $\{e_0, e_1, e_2\}$.

Μετά από πράξεις βρίσκουμε

$$\langle f, e_0 \rangle = \frac{\sqrt{2}}{5}, \langle f, e_1 \rangle = 0 \text{ και } \langle f, e_2 \rangle = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

Επομένως

$$g(x) = \frac{\sqrt{2}}{5} + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x^2 - 1) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{10}}{5} + \frac{3\sqrt{10}}{5}x^2.$$

Τελικά

$$\alpha = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{10}}{5}, \beta = 0 \text{ και } \gamma = \frac{3\sqrt{10}}{5}.$$

□

Άσκηση 7. Έστω $\{e_n\}$ μία ορθοκανονική βάση στον χώρο Hilbert H . Να δείξετε ότι

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \langle y, e_n \rangle,$$

για κάθε $x, y \in H$.

Λύση. Αφού η $\{e_n\}$ είναι μία ορθοκανονική βάση στον χώρο Hilbert H , έχουμε ότι για κάθε $x, y \in H$

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n \text{ και } y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, e_n \rangle e_n.$$

Συνεπώς

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n, \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, e_n \rangle e_n \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \langle y, e_n \rangle.$$

□