

ΣΕΜΦΕ
Συναρτησιακή Ανάλυση
Λύσεις του 7ου φυλλαδίου ασκήσεων

Άσκηση 1. Έστω X διανυσματικός χώρος και $\|\cdot\|, |||\cdot|||$ δύο νόρμες στον X για τις οποίες υπάρχει $c > 0$ τέτοιο ώστε $\|x\| \leq c|||x|||$, για κάθε $x \in X$. Αν υποθέσουμε ότι ο X είναι χώρος Banach και με τις δύο νόρμες να δείξετε ότι οι $\|\cdot\|$ και $|||\cdot|||$ είναι ισοδύναμες.

Λύση. Ο ταυτοτικός τελεστής

$$I : (X, |||\cdot|||) \rightarrow (X, \|\cdot\|)$$

με $Ix = x$, για κάθε $x \in X$, είναι προφανώς γραμμικός '1-1' και επί. Από την υπόθεση

$$\|Ix\| = \|x\| \leq c|||x|||, \text{ για κάθε } x \in X$$

και επομένως ο I είναι φραγμένος. Αφού ο X είναι χώρος Banach και με τις δύο νόρμες μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Αντίστροφης Απεικόνισης και άρα ο I^{-1} θα είναι φραγμένος. Δηλαδή υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε

$$|||x||| = |||I^{-1}x||| \leq C\|x\|, \text{ για κάθε } x \in X$$

και συνεπώς οι $\|\cdot\|$ και $|||\cdot|||$ είναι ισοδύναμες. □

Άσκηση 2. Για κάθε $x = (x_n) \in c_0$ ορίζουμε

$$\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |x_n|.$$

Να δείξετε ότι η $\|\cdot\|$ είναι νόρμα και ότι ο $(c_0, \|\cdot\|)$ δεν είναι χώρος Banach.

Λύση. Κατ'αρχήν $\|x\| \geq 0$. Επίσης αν $x = (x_n) \neq 0$ τότε θα υπάρχει κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $x_{n_0} \neq 0$ και συνεπώς

$$\|x\| \geq \frac{|x_{n_0}|}{2^{n_0}} > 0.$$

Άρα αν $\|x\| = 0$, τότε $x = 0$.

Αν $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε προφανώς $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$. Η τριγωνική ανισότητα είναι άμεση.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ όπου το 1 είναι στη θέση n . Τότε

$$\|e_n\| = \frac{1}{2^n} < 1 = \|e_n\|_{\infty}$$

και συνεπώς δεν υπάρχει $c > 0$ τέτοιο ώστε $\|x\|_{\infty} \leq c\|x\|$, για κάθε $x \in c_0$. Από την άσκηση 1 έχουμε επομένως ότι ο $(c_0, \|\cdot\|)$ δεν είναι χώρος Banach. □

Άσκηση 3. Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \rightarrow Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής επί. Να δείξετε ότι υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $y \in Y$ να υπάρχει $x \in X$ με $y = Tx$ και $\|x\| \leq M\|y\|$.

Λύση. Από το θεώρημα ανοικτής απεικόνισης ο T είναι ανοικτός και συνεπώς το σύνολο $T(B(0, 1))$ είναι ανοικτό στον Y . Άρα θα υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε $B(0, r) \subseteq T(B(0, 1))$ και θέτουμε $M = \frac{2}{r}$. Αν $y \in Y$ με $y \neq 0$, τότε

$$\left\| \frac{ry}{2\|y\|} \right\| = \frac{r}{2} < r$$

και συνεπώς θα υπάρχει $z \in B(0, 1)$ τέτοιο ώστε $Tz = \frac{ry}{2\|y\|}$. Αυτό όμως συνεπάγεται ότι

$$T\left(\frac{2\|y\|z}{r}\right) = y.$$

Θέτουμε $x = \frac{2\|y\|z}{r}$ και έχουμε ότι

$$\|x\| = \frac{2}{r}\|y\|\|z\| < \frac{2}{r}\|y\| = M\|y\|.$$

Άρα για κάθε $y \in Y$ υπάρχει $x \in X$ με $y = Tx$ και $\|x\| \leq M\|y\|$. □

Άσκηση 4. Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \rightarrow Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής επί που είναι ανοικτή απεικόνιση. Να δείξετε ότι εάν ο X είναι χώρος Banach, τότε και ο Y είναι χώρος Banach.

Λύση. Έστω (y_n) μία ακολουθία του Y για την οποία υποθέτουμε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\|$$

συγκλίνει. Ακολουθώντας τα ίδια βήματα με την άσκηση 3 μπορούμε να δείξουμε ότι υπάρχει $M > 0$ και ακολουθία (x_n) στον X τέτοια ώστε $y_n = Tx_n$ και $\|x_n\| \leq M\|y_n\|$. Συνεπώς από το κριτήριο σύγκρισης για σειρές με μη αρνητικούς όρους θα συγκλίνει και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$. Όμως ο X είναι χώρος Banach και συνεπώς θα συγκλίνει και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Λόγω της συνέχειας του T έχουμε ότι θα συγκλίνει και η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} Tx_n = \sum_{n=1}^{\infty} y_n.$$

Επομένως από την άσκηση 5 ο Y είναι χώρος Banach. □

Άσκηση 5. Έστω X χώρος με νόρμα. Να δείξετε ότι ο X είναι χώρος Banach αν και μόνο αν κάθε απολύτως συγκλίνουσα σειρά συγκλίνει.

Λύση. Το ευθύ είναι άμεσο. Για το αντίστροφο έστω (x_n) μία Cauchy ακολουθία του X . Τότε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ θα υπάρχει $n_k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\|x_n - x_m\| < \frac{1}{k^2}, \text{ για κάθε } n, m \geq n_k.$$

Παρατηρείστε ότι μπορούμε να επιλέξουμε τα n_k με τέτοιο τρόπο ώστε η ακολουθία (n_k) να είναι γνησίως αύξουσα (δλδ η (x_{n_k}) να είναι μία υπακολουθία της (x_n)) και

$$\|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\| < \frac{1}{k^2}, \text{ για κάθε } k \in \mathbb{N}.$$

Τότε από το κριτήριο σύγκρισης για σειρές με μη αρνητικούς όρους η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\|$$

θα συγχλίνει και συνεπώς από υπόθεση θα συγχλίνει και η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_{n_k} - x_{n_{k+1}}).$$

Η τελευταία όμως είναι τηλεσκοπική και συνεπώς η (x_{n_k}) θα είναι συγχλίνουσα. Όμως αν μία Cauchy ακολουθία έχει συγχλίνουσα υπακολουθία, τότε συγχλίνει και έτσι ο X είναι χώρος Banach.

□