Σύντομες Λύσεις Ασκήσεων

Λύση:

(i) Τριγωνική ανισότητα: $\big|\|\vec{a}\| - \|\vec{u}\|\big| \leq \|\vec{a}+\vec{u}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{u}\|$ που εδώ γίνεται $\sqrt{38} - \sqrt{17} \leq \sqrt{75} \leq \sqrt{38} + \sqrt{17}$ που ισχύει.

Ανισότητα Cauchy-Schwarz: $\big|\langle \vec{a}, \vec{u}\rangle\big| \leq \|\vec{a}\|\ \|\vec{u}\|$ που εδώ γίνεται $10 \leq \sqrt{570}$.

(ii) Ισχύει πως $\text{proj}_{\vec{a}}\vec{u} = \dfrac{\langle \vec{a}, \vec{u}\rangle}{\langle \vec{a}, \vec{a}\rangle}\vec{a} = \frac{10}{17}(\text{-}1, 4, 0) = (\text{-}\frac{10}{17}, \frac{40}{17}, 0)$, και $\vec{u}_2 = \vec{u} - \text{proj}_{\vec{a}}\vec{u} = (2, 3, 5) - (\text{-}\frac{10}{17}, \frac{40}{17}, 0) = (\frac{44}{17}, \frac{11}{17}, 5)$. (Ελέγχω και πως $\langle \vec{u}_2, \vec{a}\rangle = 0$.)

(iii) Ψάχνω διάνυσμα $\overrightarrow{b} = (x, y, z)$ που να είναι κάθετο στα διανύσματα $\vec{u} = (2, 3, 5)$ και $\vec{a} = (\text{-}1, 4, 0)$, δηλαδή συγγραμμικό στο $\vec{u} \times \vec{a} = (\text{-}20, \text{-}5, 11)$ και άρα της μορφής $\vec{b} = \kappa(\text{-}20, \text{-}5, 11)$ για $\kappa \in \mathbb{R}$.

Λύση: Αν $\vec{a} = a_1\vec{u} + a_2\vec{v} + a_3\vec{w}$ και $\vec{b} = b_1\vec{u} + b_2\vec{v} + b_3\vec{w}$, ο τύπος εσωτερικού γινομένου γίνεται

$$\begin{aligned}\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle =& \langle a_1\vec{u} + a_2\vec{v} + a_3\vec{w}, b_1\vec{u} + b_2\vec{v} + b_3\vec{w}\rangle = a_1b_1\vec{u}^2 + a_1b_2\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle + a_1b_3\langle \vec{u}, \vec{w}\rangle \\ &+ a_2b_1\langle \vec{v}, \vec{u}\rangle + a_2b_2\vec{v}^2 + a_3b_1\langle \vec{w}, \vec{u}\rangle + a_3b_2\langle \vec{w}, \vec{v}\rangle + a_3b_3\vec{w}^2 = \\ =& 4a_1b_1 + 3\sqrt{3}a_1b_2 + 4a_1b_3 + 3\sqrt{3}a_2b_1 + 9a_2b_2 + 6\sqrt{2}a_2b_3 + 4a_3b_1 + 6\sqrt{2}a_3b_2 + 16a_3b_3\end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας τους τύπους $\vec{x}^2 = \|\vec{x}\|^2$ και $\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\| \cos\widehat{(\vec{x}, \vec{y})}$.

Λύση: Ισχύει πως $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\rangle = (2\vec{i} - 6\vec{j})(3\vec{i} + \vec{j}) = 0$ οπότε $\hat{A} = 90^o$. (Από σχήμα με $A(0, 0, 0)$, βλέπω πως) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = -\vec{i} - 7\vec{j}$ και $\overrightarrow{BA} = 2\vec{i} - 6\vec{j}$. Τότε $\langle \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\rangle = 40$, άρα $\cos(\hat{B}) = \dfrac{40}{\|\overrightarrow{BC}\|\ \|\overrightarrow{BA}\|} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ οπότε $\hat{B} = \arccos\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$. Τέλος $\hat{C} = 90^o - \hat{B}$.

Λύση: Για να είναι κάθετα μεταξύ τους, πρέπει $\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle = -2 + 3\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ αλλά και $\langle \vec{a}, \vec{c}\rangle = -2\lambda + 3\lambda = 0$ που είναι άτοπο, άρα δεν υπάρχουν τέτοια λ.

Για να είναι συγγραμμικά, πρέπει $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{0}$, δηλαδή για παράδειγμα $(-2\lambda - 3\lambda, \lambda, 1) = (0, 0, 0)$ που είναι αδύνατο.

Για να είναι συνεπίπεδα, πρέπει $(\vec{a}\ \ \vec{b}\ \ \vec{c}) = 0$ δηλαδή $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1$.

Λύση:

(i) Ισχύει $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c} \Rightarrow \vec{a} \times (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{b} - \vec{c} = \lambda\vec{a}$ για $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύει και $\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle = \langle \vec{a}, \vec{c}\rangle \Rightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} - \vec{c}\rangle = 0 \Rightarrow \lambda\vec{a}^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$. Άρα $\vec{b} = \vec{c}$.

(ii) Ισχύει $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2\ \ \vec{b}\ \ \vec{c}) = \langle (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times \vec{b}, \vec{c}\rangle = \langle \vec{a}_1 \times \vec{b} + \vec{a}_2 \times \vec{b}, \vec{c}\rangle = \langle \vec{a}_1 \times \vec{b}, \vec{c}\rangle + \langle \vec{a}_2 \times \vec{b}, \vec{c}\rangle = (\vec{a}_1\ \ \vec{b}\ \ \vec{c}) + (\vec{a}_2\ \ \vec{b}\ \ \vec{c})$.

(iii) Ισχύει $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0} \Rightarrow \vec{a}+\vec{b}=-\vec{c} \Rightarrow \vec{c}\times(\vec{a}+\vec{b})=-\vec{c}\times\vec{c} \Rightarrow \vec{c}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{b}=\vec{0} \Rightarrow \vec{c}\times\vec{a}=\vec{b}\times\vec{c}$ και ομοίως το άλλο. Επίσης, $(\vec{a}\ \ \vec{b}\ \ \vec{c})=(-\vec{b}-\vec{c}\ \ \vec{b}\ \ \vec{c})=-(\vec{b}\ \ \vec{b}\ \ \vec{c})-(\vec{c}\ \ \vec{b}\ \ \vec{c})=0$ από προηγούμενο ερώτημα.

(iv) Αφού είναι όλα συνεπίπεδα, τα $\vec{a}\times\vec{b}$ και $\vec{c}\times\vec{d}$ είναι κάθετα στο ίδιο επίπεδο και άρα παράλληλα μεταξύ τους.

Λύση: Ισχύει πως $\vec{x}+\vec{x}\times\vec{a}=\vec{b} \Rightarrow \vec{x}\times\vec{a}=\vec{b}-\vec{x}$ καθώς και $\langle\vec{b},\vec{a}\rangle=\langle(\vec{x}+\vec{x}\times\vec{a}),\vec{a}\rangle=\langle\vec{x},\vec{a}\rangle+\langle\vec{x}\times\vec{a},\vec{a}\rangle=\langle\vec{x},\vec{a}\rangle$. Τότε

$$\vec{b}\times\vec{a}=(\vec{x}+\vec{x}\times\vec{a})\times\vec{a}=\vec{x}\times\vec{a}+(\vec{x}\times\vec{a})\times\vec{a}=(\vec{b}-\vec{x})+(\langle\vec{x},\vec{a}\rangle\vec{a}-\|\vec{a}\|^2\vec{x})=-(1+\|\vec{a}\|^2)\vec{x}+\vec{b}+\langle\vec{b},\vec{a}\rangle\vec{a}$$

$$\Rightarrow \vec{x}=\frac{\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}+\langle\vec{b},\vec{a}\rangle\vec{a}}{1+\|\vec{a}\|^2}$$

Μοναδικότητα; Έστω ότι υπάρχουν δύο λύσεις, $\vec{x}_1$ και $\vec{x}_2$, της εξίσωσης. Τότε

$$\begin{aligned}
\vec{x}_1+\vec{x}_1\times\vec{a}=\vec{b}=\vec{x}_2+\vec{x}_2\times\vec{a} &\Rightarrow\\
\vec{x}_1-\vec{x}_2+(\vec{x}_1-\vec{x}_2)\times\vec{a}=\vec{0} &\Rightarrow\\
\langle\vec{x}_1-\vec{x}_2,\vec{x}_1-\vec{x}_2+(\vec{x}_1-\vec{x}_2)\times\vec{a}\rangle=0 &\Rightarrow\\
(\vec{x}_1-\vec{x}_2)^2=0 &\Rightarrow\\
\vec{x}_1-\vec{x}_2=\vec{0} &\Rightarrow\\
\vec{x}_1=\vec{x}_2 &
\end{aligned}$$

Λύση:

(i) Π_2: θα είναι της μορφής $2x-y+3z+\Delta=0$ με $(0,2,0)$ να την επαληθεύει, δηλαδή $-2+\Delta=0$, άρα η εξίσωση είναι $2x-y+3z+2=0$.

Π_1: χρειαζόμαστε δύο μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{u},\vec{v}$ παράλληλα στο επίπεδο (χρησιμοποιώντας καθετότητα με το $(2,\text{-}1,3)$), και ένα σημείο του επιπέδου, π.χ. το $(0,\text{-}1,1)\in\Pi_1$, και παίρνουμε την διανυσματική εξίσωση $\vec{r}=\kappa\vec{u}+\lambda\vec{v}+(0,\text{-}1,1)$. Εναλλακτικά, γράφω

$$\begin{aligned}
\Pi_1&=\{(x,y,z)\mid y=2x+3z-4\}=\{(x,2x+3z-4,z)\mid x,z\in\mathbb{R}\}=\\
&=\{(\kappa,2\kappa+3\lambda-4,\lambda)\mid\kappa,\lambda\in\mathbb{R}\}=\{\kappa(1,2,0)+\lambda(0,3,1)+(0,-4,0)\mid\kappa,\lambda\in\mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

Οι παραμετρικές εξισώσεις είναι

$$\begin{cases}x=\kappa\\ y=2\kappa+3\lambda-4\\ z=\lambda\end{cases}$$

(ii) Παρατηρώ ότι τα επίπεδα είναι παράλληλα, οπότε παίρνω σημείο $A(1,1,1)\in\Pi_1$ και υπολογίζω την απόσταση με τον τύπο

$$d(\Pi_1,\Pi_2)=d(A,\Pi_2)=\frac{2\cdot1+(-1)\cdot1+3\cdot1+2}{\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}}=\frac{6}{\sqrt{14}}.$$

(iii) Είτε παρατηρώ πως $P_0 \in \Pi_1$, οπότε προσδιορίζω το ίχνος του $P(x,y,z)$ μέσω του συστήματος $\begin{cases} \|\overrightarrow{P_0P}\| = \dfrac{6}{\sqrt{14}} \\ P \in \Pi_2 \end{cases}$ είτε πιο γενικά, μπορώ να λύσω το $\begin{cases} \overrightarrow{P_0P} = \lambda(2,\text{-}1,3) \\ P \in \Pi_2 \end{cases}$ όπου έχω

$$\begin{cases} (x, y+4, z) = (2\lambda, -\lambda, 3\lambda) \\ 2x - y + 3z + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -\lambda - 4 \\ z = 3\lambda \\ y = 2x + 3z + 2 \end{cases} \Rightarrow P = \left(\text{-}\frac{6}{7}, \text{-}\frac{25}{7}, \text{-}\frac{9}{7}\right).$$

(iv) Το Π_3 δίνεται από $x+2y-5=0$, φτιάχνοντας τρία διανύσματα και ζητώντας να είναι συνεπίπεδα, μέσω του μικτού γινομένου για παράδειγμα

$$\begin{vmatrix} x-5 & y & z-1 \\ x-3 & y-1 & z+8 \\ x-7 & y+1 & z \end{vmatrix} = 0$$

ή εναλλακτικά, σχηματίζοντας το κάθετο διάνυσμα $\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = (1,2,0)$ και παίρνοντας ένα από τα 3 σημεία για τη ζητούμενη εξίσωση επιπέδου.

Τα Π_1, Π_3 δεν είναι παράλληλα (ούτε ταυτίζονται) άρα τέμνονται. Θα βρω τη γωνία τους, υπολογίζοντας πρώτα την γωνία μεταξύ των καθέτων σε αυτά τα επίπεδα διανυσμάτων, και μετά παίρνοντας την παραπληρωματική τους γωνία (σχήμα). Έχω $n_1 = (2,\text{-}1,3)$ και $n_3 = (1,2,0)$ οπότε $\langle n_1, n_3 \rangle = 0$ άρα και η γωνία των δύο επιπέδων είναι 90^0.

Λύση:

(i) ϵ_1: παίρνουμε ως διάνυσμα διεύθυνσης το εξωτερικό γινόμενο των καθέτων διανυσμάτων στα δυο επίπεδα των οποίων η τομή την ορίζει, δηλαδή

$$\epsilon_1 \parallel \vec{n} \times \vec{n'} = (1,1,1) \times (1,2,-1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-3,2,1)$$

καθώς και ένα σημείο που ανήκει στην τομή των επιπέδων, π.χ. $(0,5,4) \in \epsilon_1$. Η διανυσματική εξίσωση της ευθείας τότε είναι $\vec{r} = \lambda(-3,2,1) + (0,5,4)$ και οι παραμετρικές της εξισώσεις είναι

$$\begin{cases} x = -3\lambda \\ y = 2\lambda + 5 \\ z = \lambda + 4 \end{cases}$$

ϵ_2: έχουμε $t = x - 2 = \frac{y-5}{2} = \frac{z}{3}$ άρα οι αναλυτικές εξισώσεις είναι

$$x - 2 = \frac{y-5}{\text{-}2} = \frac{z}{3}$$

(ii) Η απόσταση του P από την ϵ_1 υπολογίζεται παίρνοντας πρώτα το ίχνος του $Q(a,b,c)$ μέσω των

$$\begin{cases} a = -3\lambda \\ b = 2\lambda + 5 \\ c = \lambda + 4 \\ \langle \overrightarrow{PQ}, (-3,2,1) \rangle = 0 \Leftrightarrow (13-a)(-3) + (-2-b)2 + (1-c)1 = 0 \Leftrightarrow 3a - 2b - c - 42 = 0 \end{cases}$$

αφού $Q \in \epsilon_1$ και $\overrightarrow{PQ}$ κάθετο στην ευθεία. Βρίσκω το $Q(12,-3,0)$ και μετά ότι η απόσταση $\|\vec{PQ}\| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$.

(iii) Για την εξίσωση επιπέδου, παίρνουμε τα διανύσματα διεύθυνσης (δεν είναι συγγραμμικά - οι ευθείες δεν είναι παράλληλες) και υπολογίζουμε το εξωτερικό τους γινόμενο $(-3,2,1)\times(1,-2,3) = (8,10,4)$ και η εξίσωση επιπέδου είναι $4x+5y+2z+\Delta = 0$. Βάζοντας π.χ. το Q να ανήκει στο επίπεδο, παίρνουμε $\Delta = -33$.

Το Π_0 είναι το επίπεδο $4x+5y+2z=0$.

(iv) Αφού τα διανύσματα διεύθυνσής τους, $(-3,2,1)$ και $(1,0,0)$ αντίστοιχα, δεν είναι συγγραμμικά, σίγουρα δεν είναι παράλληλες. Άρα είτε τέμνονται είτε είναι ασύμβατες.

Αν τέμνονται, το σημείο τομής προσδιορίζεται από τις εξισώσεις (πρέπει να συναληθεύονται)

$$\begin{cases} x = -3\lambda = \kappa \\ y = 2\lambda = 1 \\ z = \lambda + 4 = 0 \end{cases}$$

που είναι αδύνατο, άρα οι ευθείες είναι ασύμβατες. Η μεταξύ τους απόσταση βρίσκεται, όπως στις σημειώσεις, να είναι $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$.

Λύση:

(i) Αφού οι πίνακες είναι τύπου 1×3 και οι δύο, ορίζονται οι ακόλουθοι:

$$A^\top A = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^\top B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2x \\ -2 & 1 & -x \\ 2x & -x & x^2 \end{pmatrix}$$

$$A^\top A - B^\top B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2x \\ -2 & 1 & -x \\ 2x & -x & x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1-2x \\ 0 & 3 & 2+x \\ -1-2x & 2+x & 1-x^2 \end{pmatrix}$$

(ii) Είναι αδύνατη, αφού π.χ. $3 \neq 0$ για το δεύτερο στοιχείο της διαγωνίου.

Λύση:

(i) $tr(\lambda A) = tr(\lambda a_{ij}) = \lambda a_{11} + \ldots + \lambda a_{nn} = \lambda tr(a_{ij}) = \lambda tr(A)$. Επίσης υπολογίζοντας τα γινόμενα βλέπουμε

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \ldots a_{1n}b_{n1} & * & \ldots & * \\ * & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \ldots a_{2n}b_{n2} & \ldots & * \\ \ldots & & & \\ * & \ldots & * & a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{2n} + \ldots a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + \ldots b_{1n}a_{n1} & * & \ldots & * \\ * & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + \ldots b_{2n}a_{n2} & \ldots & * \\ \ldots & & & \\ * & \ldots & * & b_{n1}a_{1n} + b_{n2}a_{2n} + \ldots b_{nn}a_{nn} \end{pmatrix}$$

άρα στα ίχνη τους, και στις δύο περιπτώσεις, είναι όλοι οι όροι του αθροίσματος κοινοί.

(ii) Έστω ότι υπάρχουν πίνακες A, B τέτοιοι ώστε $AB - BA = I_n$. Τότε από ιδιότητες ίχνους $tr(AB - BA) = tr(AB) - tr(BA) = 0$ ενώ $tr(I) = n \cdot 1$, άτοπο.

Λύση:

(i) Στον EA αλλάζει η i-γραμμή με την j-γραμμή, στον BE αλλάζει η i-στήλη με την j-στήλη.

(ii) Στον DA η i-γραμμή πολλαπλασιάζεται με λ, στον BD η i-στήλη πολλαπλασιάζεται με λ.

(iii) Στον MA, στην i-γραμμή προστίθεται το λ-πολλαπλάσιο της j-γραμμής.

Λύση:

(i) Έχουμε $ad - bc = 0$, $A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{pmatrix}$ και

$$A^3 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3+abc+abc+bcd & a^2b+b^2c+abd+bd^2 \\ a^2c+acd+bc^2+cd^2 & abc+cbd+cbd+d^3 \end{pmatrix} \overset{ad=bc}{=}$$

$$\begin{pmatrix} a^3+2a^2d+ad^2 & a^2b+2abd+bd^2 \\ a^2c+2acd+cd^2 & a^2d+2ad^2+d^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(a+d)^2 & b(a+d)^2 \\ c(a+d)^2 & d(a+d)^2 \end{pmatrix} = (a+d)^2 A$$

(ii) Σε οποιονδήποτε διανυσματικό χώρο ξέρουμε ότι αν $\lambda\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, τότε είτε $\lambda = 0$ είτε $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$. Εδώ έχουμε πως $A^3 = (a+d)^2 A$ είναι ο μηδενικός πίνακας, οπότε είτε $A = 0$ (άτοπο από εκφώνηση), είτε $a = -d$ οπότε και $A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{pmatrix} \overset{d=-a, bc=-a^2}{=} \begin{pmatrix} a^2-a^2 & ab-ab \\ ca-ac & -a^2+a^2 \end{pmatrix} = 0.$

(iii) $A^9 = (A^3)^3 = (a+d)^3 A^3 = (a+d)^6 A$ οπότε εδώ με $a = 2, d = -1$ παίρνουμε $A^9 = A$.

Λύση: Θα πρέπει $\det(A) = 0$, άρα

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & 2 & 1 \\ 0 & x & -1 \end{vmatrix} \overset{\Sigma_3 \to \Sigma_3 - \Sigma_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 2 & 1\text{-}x \\ 0 & x & -1 \end{vmatrix} = -2 - (1-x)x = x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1) = 0$$

Άρα για να αντιστρέφεται ο A, θα πρέπει $x \neq 2$ ή $x \neq$ -1.

Έχουμε τα εξής αλγεβρικά συμπληρώματα

$$A_{11} = +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ x & -1 \end{vmatrix} = -2 - x \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ x & -1 \end{vmatrix} = x \quad A_{31} = +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} x & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = x \quad A_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = x - 1$$

$$A_{13} = +\begin{vmatrix} x & 2 \\ 0 & x \end{vmatrix} = x^2 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{vmatrix} = -x \quad A_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ x & 2 \end{vmatrix} = 2$$

άρα $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}(A) = \dfrac{1}{(x-2)(x+1)}\begin{pmatrix} \text{-2-}x & x & \text{-2} \\ x & \text{-1} & x\text{-1} \\ x^2 & \text{-}x & 2 \end{pmatrix}$.

Για Gauss-Jordan σχηματίζω τον επαυξημένο με τον I_3 και κάνω γραμμοπράξεις

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ x & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - x\Gamma_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1-x & -x & 1 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\Gamma_2 \to \frac{1}{2}\Gamma_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1-x}{2} & -\frac{x}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\Gamma_3\to\Gamma_3-x\Gamma_2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&\frac{1-x}{2}&-\frac{x}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{(x-2)(x+1)}{2}&\frac{x^2}{2}&-\frac{x}{2}&1\end{array}\right)$$

$$\overset{\Gamma_3\to\frac{2}{(x-2)(x+1)}\Gamma_3}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&\frac{1-x}{2}&-\frac{x}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1&\frac{x^2}{(x-2)(x+1)}&-\frac{x}{(x-2)(x+1)}&\frac{2}{(x-2)(x+1)}\end{array}\right)$$

$$\underset{\Gamma_2\to\Gamma_2-\frac{1-x}{2}\Gamma_3}{\overset{\Gamma_1\to\Gamma_1-\Gamma_3}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{-x-2}{(x-2)(x+1)}&\frac{x}{(x-2)(x+1)}&-\frac{2}{(x-2)(x+1)}\\0&1&0&*&*&*\\0&0&1&\frac{x^2}{(x-2)(x+1)}&-\frac{x}{(x-2)(x+1)}&\frac{2}{(x-2)(x+1)}\end{array}\right)$$

Παρατηρώ ότι γενικά, με παραμέτρους, η μέθοδος Gauss-Jordan δυσκολεύει, κυρίως λόγω αλγεβρικών πράξεων.

Λύση:

$$\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0&0\\3-a&\lambda-a+1&a-3&1\\4-a&3-a&\lambda-5+a&1\\2&2&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-a+1&a-3&1\\3-a&\lambda-5+a&1\\2&-2&\lambda-1\end{vmatrix}\overset{\Sigma_2\to\Sigma_2+\Sigma_1}{=}$$

$$(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-a+1&\lambda-2&1\\3-a&\lambda-2&1\\2&0&\lambda-1\end{vmatrix}\overset{\Gamma_1\to\Gamma_1+\Gamma_2}{=}(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\3-a&\lambda-2&1\\2&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2)^2$$

οπότε οι λύσεις είναι $\lambda=1,2$.

Λύση: Το 3×3-σύστημα θα έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν η ορίζουσα των συντελεστών είναι διάφορη του μηδενός (τύπου Cramer).

$$D=\begin{vmatrix}1&a&b^2\\1&a&ab\\b&a^2&a^2b\end{vmatrix}\overset{\Gamma_2\to\Gamma_2-\Gamma_1}{=}\begin{vmatrix}1&a&b^2\\0&0&b(a-b)\\b&a^2&a^2b\end{vmatrix}\overset{Laplace}{=}-b(a-b)\begin{vmatrix}1&a\\b&a^2\end{vmatrix}=-ab(a-b)^2$$

$\boxed{a\neq 0, b\neq 0, a\neq b}$

$$D_x=\begin{vmatrix}1&a&b^2\\a&a&ab\\a^2b&a^2&a^2b\end{vmatrix}=\ldots=a^3b(b-1)(a-b)$$

$$D_y=\begin{vmatrix}1&1&b^2\\1&a&ab\\b&a^2b&a^2b\end{vmatrix}=\ldots=ab(a-1)(b-1)$$

$$D_z=\begin{vmatrix}1&a&1\\1&a&a\\b&a^2&a^2b\end{vmatrix}=\ldots=a(b-1)(a-1)$$

Η μοναδική λύση σε αυτή την περίπτωση δίνεται από

$$\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D},\frac{D_z}{D}\right)=\left(\frac{a^2(1-b)}{a-b},\frac{((a-1)(b-1)}{a-b},\frac{a-1}{b(a-b)}\right)$$

$\boxed{a=b\neq 0}$ Το σύστημα γίνεται $\begin{cases} x+ay+a^2z=1 \\ x+ay+a^2z=a \\ ax+a^2y+a^3z=a^3 \end{cases}$ που αν $a\neq 1$ είναι αδύνατο. Αν $a=1$, τότε ανάγεται στο $x+y+z=1$ το οποίο έχει διπαραμετρική απειρία λύσεων, τις

$$\{(1-y-z,y,z)\mid y,z\in\mathbb{R}\}=\{\kappa(-1,1,0)+\lambda(-1,0,1)+(1,0,0)\mid \kappa,\lambda\in\mathbb{R}\}.$$

$\boxed{a=0\neq b}$ Το σύστημα γίνεται $\begin{cases} x+b^2z=1 \\ x=0 \\ bx=0 \end{cases}$ άρα $x=0, z=\frac{1}{b^2}$. Λόγω της ελεύθερης παραμέτρου $y\in\mathbb{R}$, το σύστημα έχει μονοπαραμετρική απειρία λύσεων, με σύνολο λύσεων $\{\kappa(0,1,0)+(0,0,\frac{1}{b^2})\mid \kappa\in\mathbb{R}\}$.

$\boxed{b=0\neq a}$ Το σύστημα γίνεται $\begin{cases} x+ay=1 \\ x+ay=a \\ a^2y=0 \end{cases}$ που είναι αδύνατο αν $a\neq 1$. Αν $a=1$, έχουμε $y=0$, $a=1$ και $z\in\mathbb{R}$ άρα μονοπαραμετρική απειρία λύσεων $\{\kappa(0,0,1)+(1,0,0)\mid \kappa\in\mathbb{R}\}$.

$\boxed{a=0=b}$ Το σύστημα είναι αδύνατο.

Λύση: '$\Leftarrow$' Προφανές αφού τότε $V_1\cup V_2=V_i$ για το υπερσύνολο V_i, και $V_i\leq V$ εξ' υποθέσεως.

'$\Rightarrow$' Έστω $V_1\cup V_2\leq V$ και έστω ότι $V_1\not\subseteq V_2$ και $V_2\not\subseteq V_1$. Τότε υπάρχουν διανύσματα $v\in V_1$ με $v\notin V_2$ και $u\in V_2$ με $u\notin V_1$. Όμως $v,u\in V_1\cup V_2$ οπότε $u+v\in V_1\cup V_2$ αφού η ένωση είναι υπόχωρος. Όμως αν $u+v\in V_1$, τότε $(u+v)-u\in V_1\leq V$ άτοπο, και ομοίως αν $u+v\in V_2$ τότε $u\in V_2$, άτοπο.

Λύση: Έστω $\lambda\vec{v}+\lambda_1\vec{v}_1+\ldots+\lambda_k\vec{v}_k=\vec{0}$. Τότε $\lambda\vec{v}=-\lambda_1\vec{v}_1-\ldots-\lambda_k\vec{v}_k$. Αν $\lambda\neq 0$, τότε $\vec{v}=-\frac{\vec{v}_1}{\lambda_1}-\ldots-\frac{\vec{v}_k}{\lambda_k}\Rightarrow\vec{v}\in[\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_k]$, άτοπο εξ' υποθέσεως. Άρα αναγκαστικά $\lambda=0$. Τότε έχουμε $\lambda_1\vec{v}_1+\ldots+\lambda_k\vec{v}_k=\vec{0}$ που από γραμμική ανεξαρτησία μας δίνει τα υπόλοιπα $\lambda_1=\ldots=\lambda_k=0$.

Λύση: $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^2)=4$ με βάση $\{(1,0),(i,0),(0,1),(0,i)\}$, $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2)=2$ με βάση $\{(1,0),(0,1)\}$.

Λύση:

(i) Αφού B είναι βάση, κάθε $\vec{v}\in V$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως $\vec{v}=\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2+\lambda_3\vec{v}_3$...

(ii) Έστω $\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2+\lambda_3(\vec{v_1}-\vec{v_2}+2\vec{v}_3)=\vec{0}\Rightarrow(\lambda_1+\lambda_3)\vec{v}_1+(\lambda_2-\lambda_3)\vec{v}_2+2\lambda_3\vec{v}_3=\vec{0}$. Αφού τα $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, αναγκαστικά $2\lambda_3=0\Rightarrow\lambda_3=0$ και τότε και $\lambda_1=\lambda_2=0$, άρα και το B αποτελείται από γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα. Επίσης, από πρόταση μαθήματος, $[\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3]=[\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v_1}-\vec{v_2}+2\vec{v_3}]=V$, άρα το καινούργιο σύνολο είναι βάση.

Λύση:

(i) Από ορισμό γραμμικής θήκης, $W_1\leq\mathbb{R}^3$. Για W_2 είτε μέσω του ορισμού υποχώρου, είτε εκφράζω ως γραμμική θήκη.

$$\begin{aligned} W_2 =&\{(x,y,z)\mid x-2y+3z=0\}=\{(2y-3z,y,z)\mid y,z\in\mathbb{R}\}=\{(2\kappa-3\lambda,\kappa,\lambda)\mid \kappa,\lambda\in\mathbb{R}\}= \\ =&\{\kappa(2,1,0)+\lambda(-3,0,1)\mid \kappa,\lambda\in\mathbb{R}\}=[(2,1,0),(-3,0,1)] \end{aligned}$$

(ii) Για τον W_2, τα δύο διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα γιατί μπορώ να τα φέρω σε κλιμακωτή μορφή $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$, άρα μια βάση του είναι η $\{(2,1,0),(-3,0,1)\}$ (ή και η $\{(2,1,0),(0,\frac{3}{2},1)\}$) και η διάστασή του είναι 2. Αντίστοιχα για τον W_1, μια βάση είναι η $\{(2,0,3),(1,-1,1)\}$ και η διάστασή του είναι 2.

Για το άθροισμά τους, ισχύει από ορισμό ότι $W_1 + W_2 = [(2,0,3),(1,-1,1),(2,1,0),(-3,0,1)]$ και ελέγχω γραμμική ανεξαρτησία.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Άρα τα τρία πρώτα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα, και μία βάση είναι η $\{(2,0,3),(1,-1,1),(2,1,0)\}$ (είτε η $\{(1,-1,1),(0,2,1),(0,0,-\frac{7}{2}\}$ είτε η $\{(1,0,0,),(0,1,0),(0,0,1)\}$) και η διάσταση είναι 3.

Για την τομή τους, μπορώ να φέρω τον W_1 σε μορφή εξίσωσης [που ουσιαστικά ισοδυναμεί με το να φέρω το επίπεδο σε αναλυτική μορφή εξίσωσης, από διανυσματική που είναι τώρα: αν το σκεφτώ, παίρνω εξωτερικό γινόμενο για κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο]. Για τυχαίο διάνυσμα, ισχύει $x = 2\kappa + \lambda, y = -\lambda, z = 3\kappa + \lambda \Rightarrow W_1 = \{(x,y,z) \mid 3x - 2z = -y\}$ βρίσκοντας τους κατάλληλους συντελεστές. Τότε

$$W_1 \cap W_2 = \left\{ (x,y,z) \mid \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \end{cases} \right\} = (\text{π.χ.}Gauss...) = [(1,11,7)]$$

Βάση το $\{(1,11,7)\}$, διάσταση 1. Εναλλακτικά, ζητάω από ένα στοιχείο της γραμμικής θήκης του W_1 να ικανοποιεί τη σχέση που εκφράζει τον W_2.

(iii) Δεν είναι ευθύ, γιατί $W_1 \cap W_2 \neq \{\vec{0}\}$. Το στοιχείο γράφεται ως

$$(1,0,0) = a(2,0,3) + b(1,-1,1) + c(2,1,0) + d(-3,0,1) = (2a+b+2c-3d, -b+c, 3a+b+d) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2a + b + 2c - 3d = 1 \\ -b + c = 0 \\ 3a + b + d = 0 \end{cases}$$

Ψάχνω μόνο δύο λύσεις, οπότε παίρνω για παράδειγμα τα $b = c = 0, a = \frac{1}{11}, d = -\frac{3}{11}$ και $a = 0, b = c = \frac{1}{6}, d = -\frac{1}{6}$.

(iv) Οι υπόχωροι W_1, W_2 είναι επίπεδα που διέρχονται από το $(0,0,0)$, η τομή τους είναι η ευθεία που ορίζεται από αυτά τα δύο, και το άθροισμά τους είναι όλος ο $\mathbb{R}^3$.